EXPERTENMODUS

Analysis 1

Modul 1

Autor: Dr.Jo,PAc

Fünfte Fassung vom 21. November 2026

Analysis 1 – Expertenmodus, Modul 1
Autor: Dr.Jo,PAc
Fünfte Fassung vom 21. November 2026.

© 2026 Dr.Jo für die eigenen urheberrechtlich geschützten Beiträge. Rechte an zitierten Werken und an verwendeten Schriften verbleiben bei den jeweiligen Rechteinhabern.

Verleger: Dr.Jo
Druckerei: PoD Amazon.
Herstellung: PoD Amazon.

Herausgeber und Kontakt
Dr.Jo,PAc
Verantwortlich: Dr.Jo Weigl,PAc
c/o F.R.Granaria AC – Redaktion
Sienna 39, Warsaw Towers
00-121 Warszawa
Polen
E-Mail: redaktion@granaria.ac

ORCID: 0009-0006-5203-5100

Gesetzt aus STIX Two Text, STIX Two Math und Avenir Next.

Inhaltsverzeichnis

I Zahlen 1

1 Sprache und Beweise 3
1.1 Aussagen und ihre Verknüpfungen . . . 4
1.2 Quantoren . . . 5
1.3 Beweisformen . . . 6
1.4 Mengen . . . 7
1.5 Abbildungen . . . 9
1.6 Vollständige Induktion . . . 11
1.7 Fakultät, Binomialkoeffizienten, Binomialsatz . . . 14
1.8 Ungleichungen und Betrag . . . 17
1.9 Relationen . . . 19
1.10 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt . . . 21
1.11 Durchgerechnete Beispiele . . . 22
1.12 Ausblick . . . 23
Aufgaben und Lösungen . . . 24

2 Die reellen Zahlen 37
2.1 Körper und angeordnete Körper . . . 38
2.2 Die Lücke in $\mathbb{Q}$ . . . 42
2.3 Folgen in angeordneten Körpern . . . 44
2.4 Konstruktion der reellen Zahlen . . . 48
2.5 Archimedische Eigenschaft und Dichtheit . . . 53
2.6 Vollständigkeit, Supremum und Wurzeln . . . 54
2.7 Abzählbarkeit . . . 60
2.8 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt . . . 64
2.9 Durchgerechnete Beispiele . . . 65
2.10 Ausblick . . . 66
Aufgaben und Lösungen . . . 68

3 Komplexe Zahlen 83
3.1 Konstruktion des Körpers . . . 84
3.2 Realteil, Imaginärteil, Konjugation und Betrag . . . 89
3.3 Die Zahlenebene . . . 92
3.4 Quadratwurzeln und quadratische Gleichungen . . . 94

3.5 Warum sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt . . . 96
3.6 Der Einheitskreis . . . 98
3.7 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt . . . 99
3.8 Durchgerechnete Beispiele . . . 101
3.9 Ausblick . . . 103
Aufgaben und Lösungen . . . 106

II Grenzwerte 119

4 Folgen 121
4.1 Konvergenz . . . 122
4.2 Beschränktheit und Rechenregeln . . . 125
4.3 Grenzwerte und Ungleichungen . . . 127
4.4 Bestimmte Divergenz . . . 130
4.5 Monotone Folgen . . . 131
4.6 Die Zahl e . . . 133
4.7 Teilfolgen, Häufungswerte, Limes superior und Limes inferior . . . 136
4.8 Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ . . . 141
4.9 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt . . . 143
4.10 Durchgerechnete Beispiele . . . 144
4.11 Ausblick . . . 146
Aufgaben und Lösungen . . . 148

5 Vollständigkeit in vier Gestalten 165
5.1 Folgen in einem angeordneten Körper . . . 166
5.2 Die vier Gestalten . . . 168
5.3 Von der Supremumseigenschaft zum Satz von Bolzano-Weierstraß . . . 170
5.4 Vom Satz von Bolzano-Weierstraß zur Supremumseigenschaft . . . 171
5.5 Häufungswerte und zwei weitere Beweise des Satzes von Bolzano-Weierstraß . . . 174
5.6 Gegenbeispiele . . . 177
5.7 Durchgerechnete Beispiele . . . 180
5.8 Ausblick . . . 183
Aufgaben und Lösungen . . . 185

6 Reihen 199
6.1 Reihen und ihr Wert . . . 200
6.2 Nichtnegative Glieder und absolute Konvergenz . . . 203
6.3 Wurzel- und Quotientenkriterium . . . 205
6.4 Alternierende Reihen . . . 207
6.5 Umordnungen . . . 209
6.6 Das Cauchy-Produkt . . . 212

6.7 Gegenbeispiele . . . 214
6.8 Durchgerechnete Beispiele . . . 215
6.9 Ausblick . . . 218
Aufgaben und Lösungen . . . 220

III Stetigkeit 231

7 Stetige Funktionen 233
7.1 Grenzwerte von Funktionen . . . 234
7.2 Stetigkeit . . . 238
7.3 Der Zwischenwertsatz . . . 242
7.4 Monotone Funktionen und Umkehrfunktionen . . . 245
7.5 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt . . . 250
7.6 Durchgerechnete Beispiele . . . 252
7.7 Ausblick . . . 254
Aufgaben und Lösungen . . . 256

8 Kompaktheit auf der Zahlengeraden 267
8.1 Offene und abgeschlossene Mengen . . . 268
8.2 Kompaktheit und der Satz von Heine-Borel . . . 273
8.3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen . . . 277
8.4 Gleichmäßige Stetigkeit . . . 279
8.5 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt . . . 282
8.6 Durchgerechnete Beispiele . . . 283
8.7 Ausblick . . . 284
Aufgaben und Lösungen . . . 286

9 Die elementaren Funktionen 299
9.1 Die Exponentialreihe . . . 301
9.2 Die reelle Exponentialfunktion . . . 303
9.3 Der Logarithmus . . . 306
9.4 Die allgemeine Potenz . . . 307
9.5 Kosinus und Sinus . . . 309
9.6 Die Zahl π . . . 313
9.7 Polardarstellung und komplexer Logarithmus . . . 316
9.8 Gegenbeispiele . . . 319
9.9 Durchgerechnete Beispiele . . . 321
9.10 Ausblick . . . 323
Aufgaben und Lösungen . . . 325

IV Differential- und Integralrechnung **335**

10 Ableitung **337**
10.1 Ableitung als lineare Näherung 339
10.2 Rechenregeln 342
10.3 Ableitung der Umkehrfunktion 344
10.4 Die Ableitungen der elementaren Funktionen 345
10.5 Lokale Extrema 347
10.6 Mittelwertsätze und Monotonie 348
10.7 Die Regeln von de l'Hospital 353
10.8 Gegenbeispiele 355
10.9 Durchgerechnete Beispiele 357
10.10 Ausblick 359
Aufgaben und Lösungen 361

11 Taylor und Konvexität **373**
11.1 Das Taylorpolynom 374
11.2 Restglieder nach Lagrange und Cauchy 376
11.3 Die qualitative Form: Restglied nach Peano 378
11.4 Taylorreihen 380
11.5 Konvexe Funktionen 382
11.6 Die Ungleichung von Jensen und ihre Folgen 387
11.7 Das Newton-Verfahren 389
11.8 Gegenbeispiele 391
11.9 Durchgerechnete Beispiele 392
11.10 Ausblick 395
Aufgaben und Lösungen 397

12 Das Riemann-Integral **409**
12.1 Zerlegungen, Ober- und Untersummen 410
12.2 Das Riemannsche Kriterium 413
12.3 Monotone und stetige Funktionen 414
12.4 Rechenregeln 416
12.5 Riemannsche Summen 422
12.6 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 423
12.7 Gegenbeispiele 425
12.8 Durchgerechnete Beispiele 426
12.9 Ausblick 429
Aufgaben und Lösungen 432

13 Hauptsatz und Integrationstechnik **443**
13.1 Integralfunktion und Stammfunktion 444
13.2 Der Hauptsatz 445

13.3 Partielle Integration 447
13.4 Substitution 451
13.5 Uneigentliche Integrale 452
13.6 Das Integralkriterium 458
13.7 Die Gammafunktion 459
13.8 Die Stirlingsche Formel 461
13.9 Gegenbeispiele 464
13.10 Durchgerechnete Beispiele 466
13.11 Ausblick 468
Aufgaben und Lösungen 470

V Funktionenfolgen **483**

14 Gleichmäßige Konvergenz und Potenzreihen **485**
14.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz 487
14.2 Stetigkeit der Grenzfunktion 489
14.3 Grenzwert und Integral 490
14.4 Grenzwert und Ableitung 491
14.5 Funktionenreihen und das Weierstraß-Kriterium 493
14.6 Potenzreihen und Konvergenzradius 495
14.7 Differenzieren und Integrieren von Potenzreihen 499
14.8 Der Abelsche Grenzwertsatz 501
14.9 Der Weierstraßsche Approximationssatz 503
14.10 Gegenbeispiele 506
14.11 Durchgerechnete Beispiele 508
14.12 Ausblick 511
Aufgaben und Lösungen 514

Quellenverzeichnis **527**

Teil I

Zahlen

EINHEIT 1

Sprache und Beweise

Leitfrage

Man bilde die Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ Die ersten fünf sind

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537,$$

und alle fünf sind Primzahlen. Pierre de Fermat vermutete, dass alle Zahlen F_n prim sind. Die Vermutung ist falsch; Leonhard Euler fand den Teiler:

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Die Analysis handelt fast nur von Aussagen über unendlich viele Fälle: über alle natürlichen Zahlen, alle reellen Zahlen, alle noch so kleinen Abstände. Kein Vorrat an Beispielen entscheidet eine solche Aussage. **Wie beweist man etwas über unendlich viele Fälle, und wie sagt man überhaupt genau, was man behauptet?** Diese Einheit stellt die Sprache und die Beweisformen bereit, die der ganze Kurs benutzt.

Schreibweisen. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ sind die natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bezeichnen die ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ heißt a ein *Teiler* von b, geschrieben $a \mid b$, wenn $b = ac$ mit einem $c \in \mathbb{Z}$ gilt. Eine ganze Zahl n heißt *gerade*, wenn $2 \mid n$, sonst *ungerade*; die ungeraden Zahlen sind genau die Zahlen $2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl $p \geq 2$, deren einzige Teiler in $\mathbb{N}$ die Zahlen 1 und p sind. Für reelle $a \leq b$ sind $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ und $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ das *abgeschlossene* und das *offene Intervall* von a bis b; entsprechend $[a, b)$ und $(a, b]$, ferner $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\}$ und $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Das Zeichen ∞ ist dabei keine Zahl.

Voraussetzungen. Der Kurs setzt keine Hochschulmathematik voraus, verlangt aber, dass jeder Schluss nachvollzogen wird. Was nicht bewiesen wird, ist als Voraussetzung ausgewiesen. In dieser Einheit sind das:

1. die Peano-Axiome (Abschnitt 1.6) und, ohne Ausführung, der daraus folgende Aufbau von $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ mit Addition, Multiplikation und Anordnung; dazu gehören der Rekursionssatz, die Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$ (aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$)

und die Division mit Rest (insbesondere ist jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade);

2. das Rechnen mit Brüchen in $\mathbb{Q}$; wie $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ entsteht, zeigen Abschnitt 1.9 und Aufgabe B5;
3. dass $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, der $\mathbb{Q}$ enthält; benutzt werden nur die in Abschnitt 1.8 aufgezählten Anordnungsregeln, und jede Stelle nennt die Regel, die eingeht;
4. der Mengenbegriff in der Form von Abschnitt 1.4 und die Zählregeln für endliche Mengen aus Abschnitt 1.7.

Einheit 2 löst Punkt 3 ein: Dort wird $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruiert, und die Anordnungsregeln werden bewiesen.

1.1 Aussagen und ihre Verknüpfungen

Definition 1.1. Eine *Aussage* ist ein sprachliches oder formelhaftes Gebilde, das entweder wahr oder falsch ist.

„7 ist eine Primzahl“ ist eine Aussage (wahr), „$4 > 9$“ ebenfalls (falsch). Keine Aussage ist „$x > 3$“: Der Wahrheitswert hängt von x ab. Ein solcher Ausdruck heißt *Aussageform*; er wird zur Aussage, sobald man für x etwas einsetzt oder x durch einen Quantor bindet (Abschnitt 1.2).

Aus Aussagen A und B entstehen neue:

Zeichen	gelesen	wahr genau dann, wenn
$\neg A$	nicht A	A falsch ist
$A \wedge B$	A und B	beide wahr sind
$A \vee B$	A oder B	mindestens eine wahr ist
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B	A falsch oder B wahr ist
$A \iff B$	A genau dann, wenn B	beide denselben Wahrheitswert haben

Zwei Punkte weichen vom Alltagsgebrauch ab. Erstens ist das mathematische „oder“ nicht ausschließend: $A \vee B$ ist auch wahr, wenn beide gelten. Zweitens ist $A \Rightarrow B$ wahr, sobald A falsch ist. Die Implikation behauptet nichts über den Fall, in dem die Voraussetzung nicht eintritt. „Wenn $4 > 9$, dann ist $1 = 2$“ ist eine wahre Aussage.

Der Grund für diese Festlegung liegt im Gebrauch. Der Satz „Für jedes $n \in \mathbb{N}$: Ist n durch 4 teilbar, so ist n gerade“ soll wahr sein. Er umfasst auch $n = 2$ und $n = 3$, bei denen die Voraussetzung nicht erfüllt ist. Wäre die Implikation dort falsch, so wäre jeder Satz dieser Form falsch.

Satz 1.2 (Rechenregeln der Logik). Für Aussagen A, B gilt:

1. $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$ und $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$ (Regeln von De Morgan),
2. $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontraposition),
3. $\neg(A \Rightarrow B) \iff A \wedge \neg B$.

Beweis. Jede Seite hängt nur von den Wahrheitswerten von A und B ab; es gibt vier Fälle. Für (2) und (3):

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$
w	w	w	w	f
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	f

Die dritte und vierte Spalte stimmen überein, die fünfte ist überall das Gegenteil der dritten. Teil (1) prüft man ebenso. □

Regel (3) ist die meistgebrauchte: Eine Implikation widerlegt man, indem man einen Fall angibt, in dem die Voraussetzung gilt und die Behauptung nicht. Die Verneinung von „wenn A, dann B“ ist *nicht* „wenn A, dann nicht B“.

Vorsicht bei der Umkehrung: $B \Rightarrow A$ ist etwas anderes als $A \Rightarrow B$. Aus „n ist durch 4 teilbar“ folgt „n ist gerade“; die Umkehrung ist falsch, wie $n = 6$ zeigt.

1.2 Quantoren

Ist $A(x)$ eine Aussageform und M eine Menge, so bedeutet

- $\forall x \in M : A(x)$ — für jedes x aus M gilt $A(x)$,
- $\exists x \in M : A(x)$ — es gibt mindestens ein x aus M, für das $A(x)$ gilt.

Regel 1.3 (Verneinung).

$$\neg\big(\forall x \in M : A(x)\big) \iff \exists x \in M : \neg A(x),$$
$$\neg\big(\exists x \in M : A(x)\big) \iff \forall x \in M : \neg A(x).$$

Regel 1.3 wird nicht aus Satz 1.2 bewiesen; sie gibt wieder, was die Quantoren bedeuten. Für eine endliche Menge $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ ist $\forall x \in M : A(x)$ dasselbe wie $A(x_1) \wedge \cdots \wedge A(x_r)$, und Regel 1.3 ist dann die wiederholte De-Morgan-Regel. Für die leere Menge ist jede Allaussage wahr und jede Existenzaussage falsch.

Kurzformen wie $\forall \varepsilon > 0$ oder $\exists n \geq N$ bedeuten $\forall \varepsilon \in \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ beziehungsweise $\exists n \in \{k \in \mathbb{N} : \ k \geq N\}$. Beim Verneinen wechselt nur der Quantor, die Einschränkung bleibt stehen: Die Verneinung von $\forall \varepsilon > 0 : \ A(\varepsilon)$ ist $\exists \varepsilon > 0 : \ \neg A(\varepsilon)$, nicht $\exists \varepsilon \leq 0 : \ \neg A(\varepsilon)$.

Beim Verneinen wird also jeder Quantor umgedreht und die Aussage am Ende verneint. Die Leitfrage ist ein Fall davon: „Für alle n ist F_n prim“ wird durch *ein* Gegenbeispiel widerlegt, nämlich $n = 5$.

Die Reihenfolge verschiedener Quantoren ist nicht vertauschbar. Man vergleiche

$$\text{(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : \ y > x, \qquad \text{(b)} \quad \exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : \ y > x.$$

(a) ist wahr: Zu gegebenem x wähle man $y = x + 1$. Das y darf von x abhängen. (b) ist falsch: Es müsste eine einzige Zahl y geben, die größer ist als jede reelle Zahl, also auch größer als y selbst. Bei (a) wird y nach x gewählt, bei (b) vor x.

Dieser Unterschied trägt später ganze Begriffe. Ein Vorgriff auf Einheit 4: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert gegen a, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N : \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Nach Regel 1.3 heißt „(a_n) konvergiert nicht gegen a“:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \ \exists n \geq N : \ |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Man erhält die Verneinung mechanisch, ohne die Bedeutung schon verstanden zu haben. Genau dafür ist die formale Schreibweise da.

1.3 Beweisformen

Bewiesen werden soll meist eine Implikation $A \Rightarrow B$. Drei Formen kommen immer wieder vor.

Direkter Beweis. Man setzt A voraus und leitet B her.

Beispiel. Ist $n \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist n^2 ungerade. Denn $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$, also $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Beweis durch Kontraposition. Statt $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$; nach Satz 1.2 ist das dieselbe Aussage.

Beispiel. Ist n^2 gerade, so ist n gerade. Direkt kommt man schlecht voran, weil man aus $n^2 = 2m$ nicht ohne Weiteres auf n schließen kann. Die Kontraposition lautet „ist n ungerade, so ist n^2 ungerade“, und das ist das vorige Beispiel.

Diese kleine Aussage wird in Einheit 2 gebraucht, im Beweis, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist: Aus einer Darstellung $p^2 = 2q^2$ mit ganzen Zahlen p, q folgt, dass p^2 gerade ist, nach dem Beispiel also auch p.

Beweis durch Widerspruch. Man nimmt an, die Behauptung sei falsch, und leitet daraus etwas Falsches her. Dann kann die Annahme nicht stimmen.

Beispiel. Es gibt keine kleinste positive rationale Zahl. Angenommen, $r > 0$ wäre die kleinste. Dann ist $r/2$ ebenfalls rational und positiv, aber $r/2 < r$, denn $r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0$ – ein Widerspruch zur Wahl von r.

Eine Äquivalenz $A \iff B$ beweist man in zwei getrennten Teilen, $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$. Eine Allaussage widerlegt man durch ein Gegenbeispiel; bewiesen ist sie durch noch so viele Beispiele nicht.

1.4 Mengen

Wir verwenden den Mengenbegriff so, wie ihn die gesamte Analysis benutzt: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, ihren *Elementen*; $x \in M$ heißt, x ist Element von M. Eine Menge ist durch ihre Elemente bestimmt: $M = N$ gilt genau dann, wenn beide dieselben Elemente haben. Die leere Menge $\varnothing$ hat kein Element.

Bemerkung (Grenzen des naiven Mengenbegriffs). Nicht jede Eigenschaft definiert eine Menge. Wäre $R = \{x : x \notin x\}$ eine Menge, so gälte $R \in R \iff R \notin R$ (Russell). Die axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel) schließt solche Bildungen aus. Für die Analysis genügt eine Vorsichtsregel: Mengen werden nur als Teilmengen bereits vorhandener Mengen ausgesondert, $\{x \in M : A(x)\}$, oder mit den Operationen der folgenden Definition gebildet.

Definition 1.4. Für Mengen A, B heißt

- $A \subseteq B$ (*Teilmenge*), wenn jedes Element von A auch in B liegt; Gleichheit ist zugelassen,
- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ die *Vereinigung*,
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ der *Durchschnitt*,
- $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ die *Differenz*,
- $A \times B = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ das *kartesische Produkt* (Menge der geordneten Paare),
- $\mathcal{P}(A) = \{T : T \subseteq A\}$ die *Potenzmenge*.

Von geordneten Paaren wird nur eine Eigenschaft gebraucht: $(a, b) = (a', b')$ gilt genau dann, wenn $a = a'$ und $b = b'$.

Die Gleichheit zweier Mengen beweist man fast immer über zwei Inklusionen: $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Satz 1.5 (De Morgan für Mengen). Für Teilmengen A, B einer Menge X gilt

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \qquad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Beweis. Für $x \in X$ gilt: $x \in X \setminus (A \cup B) \iff \neg(x \in A \vee x \in B) \iff x \notin A \wedge x \notin B \iff x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Der mittlere Schritt ist Satz 1.2 (1), angewandt auf die Aussagen „$x \in A$“ und „$x \in B$“. Die zweite Gleichung folgt ebenso aus der anderen De-Morgan-Regel. □

Die Mengenregeln sind also die Regeln der Logik in anderer Schreibweise: $\cup$ entspricht „oder“, $\cap$ entspricht „und“, das Komplement der Verneinung.

Vereinigung und Durchschnitt bildet man auch über beliebig viele Mengen. Eine *Familie* $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge X ordnet jedem i aus der *Indexmenge* I eine Teilmenge $A_i \subseteq X$ zu; sie ist eine Abbildung $I \to \mathcal{P}(X)$ im Sinn von Abschnitt 1.5. Allgemein heißt jede Abbildung mit Definitionsbereich I eine Familie; eine Folge ist später eine Familie mit $I = \mathbb{N}$. Man setzt

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I : x \in A_i\}, \qquad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I : x \in A_i\}.$$

Beides sind Aussonderungen aus X. Für $I = \varnothing$ ist die Vereinigung leer und der Durchschnitt gleich X. Ohne die Grundmenge X wäre der leere Durchschnitt die Gesamtheit aller Dinge, und die ist keine Menge. Die Regeln von De Morgan gelten auch für Familien,

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i), \qquad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i),$$

mit demselben Beweis wie Satz 1.5; an die Stelle von Satz 1.2 (1) tritt Regel 1.3.

Beispiel. Für $A_n = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1/n\}$ ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$, obwohl jede einzelne Menge A_n unendlich viele Elemente hat und $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ gilt. Der Nachweis, dass kein $x > 0$ in allen A_n liegt, braucht eine Eigenschaft der reellen Zahlen, die erst Einheit 2 bereitstellt (zu jedem $x > 0$ gibt es ein n mit $1/n < x$).

1.5 Abbildungen

Definition 1.6. Eine *Abbildung* $f : X \to Y$ ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zu. X heißt *Definitionsbereich*, Y *Zielmenge*. Zwei Abbildungen sind gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich, dieselbe Zielmenge und für jedes x denselben Wert haben.

Zur Abbildung gehören also drei Angaben, nicht nur die Rechenvorschrift. $x \mapsto x^2$ als Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und als Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$ sind verschiedene Abbildungen mit verschiedenen Eigenschaften, wie sich gleich zeigt.

Bemerkung (Abbildung als Menge). Präzise ist eine Abbildung $f : X \to Y$ durch ihren *Graphen* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ zusammen mit X und Y gegeben. Eine Teilmenge $\Gamma \subseteq X \times Y$ ist genau dann Graph einer Abbildung, wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in \Gamma$ gibt. Daraus ergeben sich die Randfälle: Für jede Menge Y gibt es genau eine Abbildung $\emptyset \to Y$, die *leere Abbildung* mit dem Graphen $\emptyset$. Ist $X \neq \emptyset$, so gibt es keine Abbildung $X \to \emptyset$.

Definition 1.7. Für $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ heißt

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y \quad \text{das } \textit{Bild} \text{ von } A,$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X \quad \text{das } \textit{Urbild} \text{ von } B.$$

Das Urbild ist für jede Abbildung erklärt; die Schreibweise $f^{-1}(B)$ setzt nicht voraus, dass es eine Umkehrabbildung gibt.

Zu einer Abbildung $f : X \to Y$ und einem $y \in Y$ gehört die Gleichung $f(x) = y$. Zwei Fragen stellen sich: Hat sie für jedes y eine Lösung? Hat sie für jedes y höchstens eine? Die folgenden Begriffe geben diesen Fragen Namen.

Definition 1.8. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, wenn aus $f(x) = f(x')$ stets $x = x'$ folgt,
- *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, also $f(X) = Y$,
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Surjektiv heißt also: Die Gleichung $f(x) = y$ ist für jedes y lösbar. Injektiv heißt: Sie hat für jedes y höchstens eine Lösung. Bijektiv heißt: genau eine.

Beispiel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist nicht injektiv ($f(-1) = f(1)$) und nicht surjektiv (-1 wird nicht angenommen). Dieselbe Vorschrift als Abbildung $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Als Abbildung $[0, \infty) \to [0, \infty)$ ist sie injektiv; dass sie auch surjektiv ist, heißt: Jede Zahl $y \geq 0$ hat eine Quadratwurzel. Das ist keine Formalität, sondern ein Satz über die reellen Zahlen (Einheit 2; in $\mathbb{Q}$ ist er falsch).

Definition 1.9. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist die *Verkettung* $g \circ f : X \to Z$ durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ erklärt. Die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist $x \mapsto x$.

Die Verkettung ist assoziativ, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, aber nicht kommutativ: Für $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ ist $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$ und $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$.

Satz 1.10 (Umkehrabbildung). Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt; man nennt g die *Umkehrabbildung* und schreibt f^{-1}.

Beweisidee. Injektiv heißt „höchstens ein Urbildpunkt“, surjektiv „mindestens einer“; zusammen gibt es zu jedem y genau ein x, und dieses x ist $g(y)$.

Beweis. „⇒“: Sei f bijektiv. Zu $y \in Y$ gibt es wegen der Surjektivität ein x mit $f(x) = y$ und wegen der Injektivität nur eines. Setze $g(y) = x$. Dann ist $f(g(y)) = y$ nach Konstruktion, und $g(f(x))$ ist das eindeutige Element, das auf $f(x)$ abgebildet wird, also x.

„⇐“: Sei g wie angegeben. Aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$; also ist f injektiv. Für $y \in Y$ ist $y = f(g(y))$; also ist f surjektiv.

Eindeutigkeit: Erfüllt auch h beide Gleichungen, so ist $h = h \circ \mathrm{id}_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g$. □

Satz 1.11 (Bild, Urbild und Mengenoperationen). Für $f : X \to Y$, $A_1, A_2 \subseteq X$ und $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ gilt:

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ und $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,
2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
3. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$,
4. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$,
5. Regel (1) gilt ebenso für Vereinigung und Durchschnitt beliebiger Familien, Regel (2) für die Vereinigung beliebiger Familien.

Beweis. (1) $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \iff f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$; mit „oder“ ebenso.

(2) $y \in f(A_1 \cup A_2) \iff$ es gibt $x \in A_1$ oder $x \in A_2$ mit $f(x) = y \iff y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) Ist $y = f(x)$ mit $x \in A_1 \cap A_2$, so liegt y in $f(A_1)$ und in $f(A_2)$.

(4) $x \in f^{-1}(Y \setminus B) \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B)$.

(5) Für eine Familie $(B_i)_{i\in I}$ ist $x \in f^{-1}\big(\bigcup_i B_i\big) \iff \exists i : f(x) \in B_i \iff x \in \bigcup_i f^{-1}(B_i)$; mit „$\forall i$“ ebenso, und für das Bild einer Vereinigung wie in (2). □

In (3) steht nur eine Inklusion, und mehr gilt nicht; siehe Abschnitt 1.10. Das Urbild verträgt sich mit Vereinigung, Durchschnitt und Komplement, das Bild nur mit der Vereinigung. Deshalb wird Stetigkeit später auch über Urbilder beschrieben: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind.

Bemerkung (einseitige Inverse). Die beiden Gleichungen in Satz 1.10 lassen sich trennen. Für $X \neq \varnothing$ ist f genau dann injektiv, wenn es ein $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt (*Linksinverse*). Gibt es ein $h : Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ (*Rechtsinverse*), so ist f surjektiv. Die Umkehrung der zweiten Aussage verlangt, zu jedem y gleichzeitig ein Urbild auszuwählen; für unendliches Y ist das im Allgemeinen nur mit dem Auswahlaxiom möglich (Aufgabe V5).

1.6 Vollständige Induktion

Nun zur ersten Hälfte der Leitfrage. Unendlich viele Fälle einzeln zu prüfen ist unmöglich. Die vollständige Induktion ersetzt diese Prüfung durch zwei endliche Aufgaben: einen ersten Fall nachzuweisen und einmal allgemein zu zeigen, dass jeder Fall den nächsten nach sich zieht. Dass dies genügt, ist keine Eigenschaft der Logik, sondern eine der natürlichen Zahlen.

Die natürlichen Zahlen werden in diesem Kurs nicht konstruiert, sondern durch die **Peano-Axiome** festgelegt: Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$, ein Element $1 \in \mathbb{N}$ und eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (*Nachfolger*) mit

- (P1) ν ist injektiv,
- (P2) 1 ist kein Nachfolger: $1 \notin \nu(\mathbb{N})$,
- (P3) ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\nu(M) \subseteq M$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Die übliche Beschreibung $\{1, 2, 3, \dots\}$ enthält mit den Pünktchen genau das, was zu klären ist: dass man von 1 aus durch fortgesetztes Weiterzählen jede natürliche Zahl erreicht und nichts sonst. Die drei Axiome sprechen das aus, und keines ist entbehrlich:

- Ohne (P1): $X = \{1, 2\}$ mit $\nu(1) = 2$, $\nu(2) = 2$ erfüllt (P2) und (P3), aber das Zählen bleibt bei 2 stehen.
- Ohne (P2): $X = \{1\}$ mit $\nu(1) = 1$ erfüllt (P1) und (P3); das Zählen läuft im Kreis.
- Ohne (P3): $X = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\}$ mit $\nu(x) = x + 1$ erfüllt (P1) und (P2), enthält aber Elemente, die man von 1 aus nie erreicht; die Teilmenge $M = \mathbb{N}$ zeigt, dass (P3) verletzt ist.

Die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen geht auf Richard Dedekind und Giuseppe Peano zurück.

Man schreibt $n+1$ für $\nu(n)$. Jedes $n \neq 1$ ist ein Nachfolger, hat also einen *Vorgänger* $n-1 \in \mathbb{N}$, der nach (P1) eindeutig ist: Die Menge $\{1\} \cup \nu(\mathbb{N})$ erfüllt die Voraussetzungen von (P3).

Rekursionssatz (ohne Beweis). Sei A eine Menge, $a \in A$, und sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\varphi_n : A \to A$ gegeben. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ mit $f(1) = a$ und $f(n+1) = \varphi_n\big(f(n)\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit dem Rekursionssatz werden Addition, Multiplikation und Anordnung auf $\mathbb{N}$ erklärt; wir setzen ihre Rechenregeln voraus. Von der Anordnung wird ausdrücklich benutzt: $1 \leq n$ für alle n, und zwischen n und $n+1$ liegt keine natürliche Zahl, das heißt, aus $k > n$ folgt $k \geq n+1$.

Induktionsprinzip. Sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Gilt

- (*Induktionsanfang*) $A(1)$ und
- (*Induktionsschritt*) für jedes $n \in \mathbb{N}$: aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$,

so gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Menge $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ enthält 1, und mit n enthält sie auch $\nu(n) = n+1$. Nach (P3) ist $M = \mathbb{N}$. □

Im Induktionsschritt wird $A(n)$ nicht bewiesen, sondern vorausgesetzt; man nennt $A(n)$ dort die *Induktionsvoraussetzung*. Bewiesen wird die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. Das ist kein Zirkel: Niemand behauptet im Schritt, dass $A(n)$ gilt.

Anfang an beliebiger Stelle. Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, und sei $A(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq n_0$ eine Aussage. Gilt $A(n_0)$ und folgt für jedes $n \geq n_0$ aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$, so gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $B(m)$ die Aussage $A(n_0 + m - 1)$. $B(1)$ ist $A(n_0)$. Gilt $B(m)$, so gilt $A(n_0 + m - 1)$ mit $n_0 + m - 1 \geq n_0$, nach Voraussetzung also $A(n_0 + m)$, und das ist $B(m+1)$. Nach dem Induktionsprinzip gilt $B(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Jedes $n \geq n_0$ ist von der Form $n_0 + m - 1$ mit $m = n - n_0 + 1 \in \mathbb{N}$. □

Insbesondere darf eine Induktion bei $n_0 = 0$ beginnen; davon machen die Sätze 1.13, 1.19, 1.20 und 1.24 Gebrauch.

Summen, Produkte, Potenzen werden rekursiv erklärt. Für ganze Zahlen m und $n \geq m-1$ sei

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k = 0, \qquad \sum_{k=m}^{n+1} a_k = \Big(\sum_{k=m}^{n} a_k\Big) + a_{n+1},$$

entsprechend $\prod$ mit dem leeren Produkt 1 als Anfang, und $x^0 = 1$, $x^{n+1} = x^n \cdot x$ für

$n \in \mathbb{N}_0$. Das schließt $0^0 = 1$ ein; diese Vereinbarung für ganzzahlige Exponenten bleibt im ganzen Kurs bestehen. Die Schreibweise $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ ist eine Abkürzung für die rekursiv erklärte Summe. Der Name des Laufindex ist frei, und man darf ihn verschieben: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_{j-1}$. Regeln wie $x^{m+n} = x^m x^n$ oder das allgemeine Assoziativ- und Kommutativgesetz für endliche Summen sind Induktionsbeweise, die wir nicht einzeln ausführen.

Satz 1.12. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ steht links 1, rechts $\frac{1\cdot 2}{2} = 1$. Induktionsschritt: Gelte die Formel für ein n. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad \square$$

Satz 1.13 (geometrische Summe). Für jede reelle Zahl $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis. Induktion über n, mit Anfang bei $n = 0$: Links steht $q^0 = 1$, rechts $(1 - q)/(1 - q) = 1$. Schritt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \qquad \square$$

Woher die Formel kommt, sieht man ohne Induktion. Für $S = \sum_{k=0}^{n} q^k$ ist $qS = \sum_{k=1}^{n+1} q^k$; in der Differenz heben sich alle Summanden bis auf den ersten und den letzten weg, $S - qS = 1 - q^{n+1}$. In dieser Form, ohne Division, gilt die Gleichung für jedes q. Die geometrische Summe wird in Einheit 6 zur geometrischen Reihe, dem Maßstab für fast alle Konvergenzkriterien.

Satz 1.14 (starke Induktion). Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Gilt $A(n_0)$ und folgt für jedes $n \geq n_0$ aus der Gültigkeit von $A(n_0), A(n_0 + 1), \ldots, A(n)$ die von $A(n + 1)$, so gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis. Sei $B(n)$ die Aussage „$A(k)$ gilt für alle k mit $n_0 \leq k \leq n$“. $B(n_0)$ ist $A(n_0)$. Gilt $B(n)$, so nach Voraussetzung auch $A(n+1)$, also $B(n+1)$. Nach der Induktion mit Anfang n_0 gilt $B(n)$ für alle $n \geq n_0$, insbesondere $A(n)$. $\square$

Satz 1.15. Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen (wobei eine einzelne Primzahl als Produkt mit einem Faktor zählt).

Beweis. Starke Induktion mit Anfang $n_0 = 2$: 2 ist prim. Gelte die Behauptung für alle Zahlen von 2 bis n. Ist $n+1$ prim, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls hat $n+1$ einen Teiler $a \in \mathbb{N}$ mit $a \neq 1$ und $a \neq n+1$, also $n+1 = ab$ mit einem $b \in \mathbb{Z}$; wegen $a > 0$ und $ab > 0$ ist $b > 0$, also $b \in \mathbb{N}$. Wegen $b \geq 1$ ist $a \leq ab = n+1$, also $2 \leq a \leq n$. Wegen $a \geq 2$ ist $b < 2b \leq ab = n+1$, und $b = 1$ würde $a = n+1$ ergeben; also $2 \leq b \leq n$. Nach Voraussetzung sind a und b Produkte von Primzahlen, also auch ab. □

Die gewöhnliche Induktion käme hier nicht voran: Über $n+1 = ab$ sagt die Aussage für n allein nichts.

Satz 1.16 (Wohlordnung). Jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ besitzt ein *kleinstes Element*, das heißt ein $m \in M$ mit $m \leq k$ für alle $k \in M$.

Beweis. Angenommen, M hat kein kleinstes Element. Sei $A(n)$ die Aussage „kein $k \leq n$ liegt in M“. Anfang: Aus $k \leq 1$ folgt $k = 1$, und läge 1 in M, so wäre 1 wegen $1 \leq k$ für alle k das kleinste Element; also gilt $A(1)$. Schritt: Gelte $A(n)$. Jedes $k \in M$ erfüllt dann $k > n$, also $k \geq n+1$. Läge $n+1$ in M, so wäre es das kleinste Element; also $n+1 \notin M$, und mit $A(n)$ folgt $A(n+1)$. Nach dem Induktionsprinzip gilt $A(n)$ für alle n; wegen $n \leq n$ liegt kein n in M, also ist $M = \varnothing$ – im Widerspruch dazu, dass M nicht leer ist. □

Umgekehrt folgt aus der Wohlordnung zusammen mit der Vorgängereigenschaft das Induktionsprinzip (Aufgabe V2). In der Anwendung liefert die Wohlordnung eine eigene Beweisfigur: Man nimmt an, eine Aussage sei nicht für alle n richtig, betrachtet das kleinste Gegenbeispiel und zeigt, dass es ein noch kleineres gäbe.

1.7 Fakultät, Binomialkoeffizienten, Binomialsatz

Zwei Fragen führen auf dieselben Zahlen. Welche Koeffizienten entstehen beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$? Und wie viele k-elementige Teilmengen hat eine n-elementige Menge? Für $n = 3$ ist $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und $\{1,2,3\}$ hat $1, 3, 3, 1$ Teilmengen mit $0, 1, 2, 3$ Elementen. Wir definieren die Zahlen zunächst durch eine Formel, mit der man rechnen kann, und zeigen dann, dass sie beide Fragen beantwortet.

Definition 1.17. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ die *Fakultät*; insbesondere $0! = 1$ (leeres Produkt). Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

der *Binomialkoeffizient*.

Unmittelbar aus der Definition: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Lemma 1.18 (Pascal). Für $1 \le k \le n$ gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Beweis. Auf den Hauptnenner $k!\,(n+1-k)!$ gebracht:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n+1-k)!}$$
$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \qquad \square$$

Mit dem Lemma erkennt man alle Binomialkoeffizienten ohne Rechnung als natürliche Zahlen, durch Induktion über n. Für $n = 0$ ist $\binom{0}{0} = 1$. Sind alle $\binom{n}{k}$ mit $0 \le k \le n$ natürliche Zahlen, so ist $\binom{n+1}{k}$ für $k = 0$ und $k = n+1$ gleich 1 und für $1 \le k \le n$ nach Lemma 1.18 die Summe zweier natürlicher Zahlen. Der Bruch in Definition 1.17 geht also stets auf, etwa $\binom{7}{3} = \frac{5040}{6 \cdot 24} = 35$.

Bemerkung (allgemeiner Binomialkoeffizient). Für reelles x und $k \in \mathbb{N}_0$ setzt man

$$\binom{x}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (x - j).$$

Für $x = n \in \mathbb{N}_0$ und $k \le n$ ist das Definition 1.17, denn $\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) = \frac{n!}{(n-k)!}$; für $k > n$ enthält das Produkt den Faktor $n - n = 0$, also ist $\binom{n}{k} = 0$. Diese Fassung wird später für die Binomialreihe gebraucht.

Definition (endliche Menge). Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Menge X hat *n Elemente*, wenn es eine Bijektion $\{1, \dots, n\} \to X$ gibt; für $n = 0$ heißt das $X = \varnothing$. X heißt *endlich*, wenn X für ein n genau n Elemente hat.

Wir benutzen ohne Beweis die folgenden *Zählregeln*; jede ist eine Induktion über n. Die Zahl n ist durch X eindeutig bestimmt. Hat X genau $n+1$ Elemente und ist $x_0 \in X$, so hat $X \setminus \{x_0\}$ genau n Elemente. Sind $Y_1, \dots, Y_r$ paarweise disjunkt mit $p_1, \dots, p_r$ Elementen, so hat $Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ genau $p_1 + \dots + p_r$ Elemente. Ist $f : Y \to Z$ bijektiv und hat Y genau p Elemente, so auch Z. Jede Teilmenge einer Menge mit n Elementen ist endlich und hat höchstens n Elemente; hat sie genau n Elemente, so ist sie die ganze Menge.

Satz 1.19 (Anzahl der Teilmengen). Eine Menge mit n Elementen besitzt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen ($0 \le k \le n$).

Beweis. Induktion über n. Für $n = 0$ gibt es genau eine Teilmenge, die leere, und $\binom{0}{0} = 1$. Sei die Aussage für n richtig und X eine Menge mit $n+1$ Elementen. Für $k = 0$ und $k = n+1$ gibt es je genau eine Teilmenge. Sei $1 \leq k \leq n$ und $x_0 \in X$ fest. Die k-elementigen Teilmengen von X zerfallen in zwei Sorten. Die ohne x_0 sind die k-elementigen Teilmengen von $X \setminus \{x_0\}$, also $\binom{n}{k}$ Stück. Die mit x_0 entstehen, indem man zu einer $(k-1)$-elementigen Teilmenge T von $X \setminus \{x_0\}$ das Element x_0 hinzunimmt; die Zuordnung $T \mapsto T \cup \{x_0\}$ ist bijektiv mit der Umkehrung $S \mapsto S \setminus \{x_0\}$, also sind es $\binom{n}{k-1}$ Stück. Zusammen sind es nach Lemma 1.18 genau $\binom{n+1}{k}$. □

Satz 1.20 (Binomialsatz). Für reelle Zahlen a, b und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweisidee. Beim Übergang von n zu $n+1$ multipliziert man mit $(a+b)$; jeder Summand zerfällt in zwei, und Pascals Lemma fügt benachbarte Koeffizienten wieder zusammen.

Beweis. Induktion über n. Für $n = 0$ sind beide Seiten 1. Gelte die Formel für n. Dann ist

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

In der zweiten Summe verschieben wir den Index ($k+1$ wird zum neuen k):

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Aus der ersten Summe lösen wir den Summanden $k = 0$ heraus, aus der zweiten den Summanden $k = n+1$, und fassen den Rest zusammen:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,$$

zuletzt mit Lemma 1.18 und $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. □

Der Satz lässt sich auch zählend lesen. Beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n = (a+b) \cdots (a+b)$ wählt man aus jedem der n Faktoren entweder a oder b. Der Summand $a^{n-k} b^k$ entsteht so oft, wie man k der n Faktoren für b auswählen kann, nach Satz 1.19 also $\binom{n}{k}$-mal.

Bemerkung (Allgemeinheit). Der Beweis benutzt von a und b nur die Rechengesetze der Addition und Multiplikation einschließlich $ab = ba$. Der Binomialsatz gilt deshalb

ebenso für komplexe Zahlen; in dieser Form wird er später für die Exponentialfunktion gebraucht. Ohne $ab = ba$ ist er falsch: Schon $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$ zeigt, was fehlt.

Folgerung 1.21. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Eine Menge mit n Elementen hat also genau 2^n Teilmengen.

Beweis. Binomialsatz mit $a = b = 1$; die zweite Aussage folgt mit Satz 1.19 und der Zählregel für disjunkte Vereinigungen. □

1.8 Ungleichungen und Betrag

Die Analysis ist zu einem großen Teil die Kunst des Abschätzens: Man berechnet eine Größe nicht, man schließt sie ein. Benutzt werden folgende Anordnungsregeln für reelle Zahlen; Einheit 2 beweist sie. Dabei bedeutet $x \le y$, dass $x < y$ oder $x = y$ gilt.

- (O0) Für je zwei reelle Zahlen x, y gilt genau eine der Beziehungen $x < y$, $x = y$, $y < x$. Aus $x \le y$ und $y \le z$ folgt $x \le z$; aus $x < y$ und $y \le z$ folgt $x < z$, ebenso aus $x \le y$ und $y < z$.
- (O1) Aus $x \le y$ folgt $x + z \le y + z$.
- (O2) Aus $x \le y$ und $z \ge 0$ folgt $xz \le yz$; für $z \le 0$ dreht sich die Ungleichung um.
- (O3) Für jedes x ist $x^2 \ge 0$, und $x^2 > 0$ für $x \ne 0$; insbesondere ist $1 > 0$.
- (O4) Aus $x \le y$ und $u \le v$ folgt $x + u \le y + v$.
- (O5) (O1) und (O2) gelten auch mit $<$ statt $\le$, in (O2) dann mit $z > 0$ beziehungsweise $z < 0$.
- (O6) Aus $0 < x \le y$ folgt $0 < \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$; aus $0 < x < y$ folgt $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

(O4) ist keine neue Regel: Nach (O1) ist $x + u \le y + u$ und $y + u \le y + v$, nach (O0) also $x + u \le y + v$.

Definition 1.22. Der *Betrag* einer reellen Zahl x ist $|x| = x$, falls $x \ge 0$, und $|x| = -x$, falls $x < 0$.

Es gilt $|x| \ge 0$, $|x| = 0$ nur für $x = 0$, $|xy| = |x|\,|y|$ und $-|x| \le x \le |x|$. Für $c \ge 0$ gilt

$$|x| \le c \iff -c \le x \le c,$$

und ebenso $|x| < c \iff -c < x < c$ für $c > 0$. Alle diese Regeln beweist man durch die Fallunterscheidung $x \ge 0$ oder $x < 0$ nach (O0). Zum Beispiel die erste Äquivalenz: Ist $x \ge 0$, so ist $-c \le 0 \le x$, und $|x| \le c$ heißt $x \le c$. Ist $x < 0$, so ist $x < 0 \le c$, und $|x| = -x \le c$ ist nach (O2) mit $z = -1$ gleichwertig mit $x \ge -c$.

Geometrisch ist $|x-y|$ der Abstand von x und y auf der Zahlengeraden. Der Ausdruck $|a_n - a| < \varepsilon$ aus Abschnitt 1.2 heißt also: a_n liegt näher als ε bei a.

Satz 1.23 (Dreiecksungleichung). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x+y| \le |x| + |y| \qquad \text{und} \qquad \big||x| - |y|\big| \le |x-y|.$$

Beweis. Aus $-|x| \le x \le |x|$ und $-|y| \le y \le |y|$ folgt mit (O4)

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|,$$

und das ist $|x+y| \le |x| + |y|$. Für die zweite Ungleichung schreibe man $x = (x-y)+y$; die erste liefert $|x| \le |x-y| + |y|$, also $|x| - |y| \le |x-y|$. Vertauscht man die Rollen, folgt $|y| - |x| \le |y-x| = |x-y|$. Beides zusammen ist die Behauptung. □

Der Kunstgriff $x = (x-y)+y$, das Einschieben einer Null, ist der häufigste Handgriff der Analysis. Er kommt in fast jedem Grenzwertbeweis vor.

Ausblick (Abstand). Setzt man $d(x,y) = |x-y|$, so gilt $d(x,y) \ge 0$ mit Gleichheit nur für $x = y$, ferner $d(x,y) = d(y,x)$ und, nach Satz 1.23 mit $x - z = (x-y) + (y-z)$, $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Eine Abbildung d mit diesen drei Eigenschaften heißt *Metrik*. Viele Sätze über Konvergenz und Stetigkeit benutzen von $\mathbb{R}$ nur diese drei Eigenschaften.

Satz 1.24 (Bernoullische Ungleichung). Für jede reelle Zahl $x \ge -1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n \ge 1 + nx.$$

Beweis. Induktion über n. Für $n = 0$ steht auf beiden Seiten 1. Gelte die Ungleichung für n. Wegen $1 + x \ge 0$ darf man sie nach (O2) mit $1 + x$ multiplizieren:

$$(1+x)^{n+1} \ge (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x,$$

zuletzt wegen $nx^2 \ge 0$ ((O2) und (O3)). □

Die Voraussetzung $x \ge -1$ geht im Beweis an genau einer Stelle ein: beim Multiplizieren mit $1+x$. Sie ist eine Bedingung dieses Beweises, nicht die Grenze der Aussage. Für $-2 \le x < -1$ gilt die Ungleichung ebenfalls: Für $n \le 1$ ist sie eine Gleichung; für $n \ge 2$ ist $|1+x| \le 1$, also $(1+x)^n \ge -1$, während $1 + nx \le 1 - n \le -1$ ist. Erst für $x < -2$ kann sie scheitern, wie (G6) zeigt.

Satz 1.25. Für alle reellen Zahlen a, b gilt $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, mit Gleichheit genau für $a = b$.

Beweis. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \ge 0$ nach (O3), und der Ausdruck ist genau für $a = b$ null. □

Für $a, b \geq 0$ ist das die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$; die Wurzel steht uns erst ab Einheit 2 zur Verfügung.

1.9 Relationen

Die Zeichen $\leq$, $=$ und $\subseteq$ haben eine gemeinsame Form: Sie setzen je zwei Elemente einer Menge in Beziehung. Zwei Sorten solcher Beziehungen durchziehen die ganze Mathematik.

Definition 1.26. Eine *Relation* auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$; statt $(x, y) \in R$ schreibt man $x \sim y$, bei Ordnungen meist $x \preceq y$. Die Relation heißt

- *reflexiv*, wenn $x \sim x$ für alle $x \in X$,
- *symmetrisch*, wenn aus $x \sim y$ stets $y \sim x$ folgt,
- *antisymmetrisch*, wenn aus $x \sim y$ und $y \sim x$ stets $x = y$ folgt,
- *transitiv*, wenn aus $x \sim y$ und $y \sim z$ stets $x \sim z$ folgt.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt *Ordnung*; sie heißt *total*, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind, also stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt.

Beispiele. (a) $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung. (b) $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist eine Ordnung; sie ist nicht total, sobald X zwei verschiedene Elemente a, b hat, denn $\{a\}$ und $\{b\}$ sind nicht vergleichbar. (c) Für festes $m \in \mathbb{N}$ ist „$a \equiv b$, wenn $m \mid a - b$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. (d) Jede Abbildung $f : X \to Y$ liefert eine Äquivalenzrelation auf X: $x \sim x'$, wenn $f(x) = f(x')$.

Bemerkung (Ordnungen). Zu einer Ordnung $\preceq$ gehört die *strikte Ordnung* $x \prec y$, die „$x \preceq y$ und $x \neq y$“ bedeutet. In einer geordneten Menge $(X, \preceq)$ heißt $s \in X$ *obere Schranke* von $A \subseteq X$, wenn $a \preceq s$ für alle $a \in A$ gilt, und *Supremum* von A, wenn s obere Schranke ist und $s \preceq t$ für jede obere Schranke t von A gilt. Wegen der Antisymmetrie gibt es höchstens ein Supremum. Ob jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat, ist die Frage, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet (Einheit 2).

Äquivalenzrelationen beschreiben „gleich unter einem Gesichtspunkt“. Die Paare $(1, 2)$ und $(2, 4)$ sind verschieden, als Brüche sollen sie gleich sein; die ganzen Zahlen 3 und 10 sind verschieden, haben aber bei Division durch 7 denselben Rest. Man will dann mit den Gesamtheiten gleichwertiger Objekte rechnen wie mit einzelnen Objekten. Dafür muss feststehen, dass diese Gesamtheiten die Menge sauber zerlegen; das leistet Satz 1.28.

Definition 1.27. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die *Äquivalenzklasse* von $x \in X$ ist $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$; jedes Element einer Klasse heißt *Repräsentant*. Die Menge aller Klassen heißt *Quotientenmenge* $X/\!\sim$.

Satz 1.28 (Klasseneinteilung). Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gilt:

1. $x \in [x]$ für jedes $x \in X$; insbesondere ist keine Klasse leer, und X ist die Vereinigung aller Klassen.
2. $[x] = [y]$ genau dann, wenn $x \sim y$.
3. Zwei Klassen sind entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. (1) ist die Reflexivität.

(2) Ist $[x] = [y]$, so ist $x \in [x] = [y]$, also $x \sim y$. Sei umgekehrt $x \sim y$ und $z \in [x]$. Dann ist $z \sim x$ und $x \sim y$, wegen der Transitivität also $z \sim y$, das heißt $z \in [y]$. Damit ist $[x] \subseteq [y]$. Wegen der Symmetrie gilt auch $y \sim x$, und dasselbe Argument liefert $[y] \subseteq [x]$.

(3) Ist $z \in [x] \cap [y]$, so ist $z \sim x$ und $z \sim y$, nach (2) also $[z] = [x]$ und $[z] = [y]$, folglich $[x] = [y]$. □

Alle drei Eigenschaften gehen ein: die Reflexivität in (1) und in der ersten Richtung von (2), Symmetrie und Transitivität in der zweiten Richtung von (2); (3) folgt aus (2). Dass man auf die Transitivität nicht verzichten kann, zeigt (G8). Umgekehrt definiert jede Zerlegung von X in nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen eine Äquivalenzrelation: „$x \sim y$, wenn beide in derselben Teilmenge liegen“.

Bemerkung (Wohldefiniertheit). Wer eine Abbildung auf $X/\sim$ durch eine Vorschrift an Repräsentanten erklärt, muss zeigen, dass das Ergebnis nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt. In Beispiel (c) ist $[a] + [b] = [a + b]$ zulässig: Aus $a \equiv a'$ und $b \equiv b'$ folgt, dass m auch $(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b')$ teilt. Die Vorschrift „$[a] \mapsto a$“ ist dagegen keine Abbildung nach $\mathbb{Z}$.

Auf diese Weise entstehen die Zahlbereiche. Die rationalen Zahlen gewinnt man als Klassen von Paaren $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ unter „$(a, b) \sim (c, d)$, wenn $ad = bc$“ (Aufgabe B5); ein Bruch $\frac{a}{b}$ ist eine solche Klasse, und $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ist die Gleichheit zweier Klassen. Nach demselben Verfahren, mit anderen Objekten, werden später die reellen Zahlen konstruiert: Dort fasst man Folgen rationaler Zahlen, deren Glieder einander beliebig nahe kommen, zu Klassen zusammen.

1.10 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt

(G1) Induktionsschritt ohne Anfang. Sei $A(n)$ die Aussage „$n = n+1$“. Der Induktionsschritt gelingt: Aus $n = n+1$ folgt durch Addition von 1 sofort $n+1 = n+2$. Trotzdem ist $A(n)$ für jedes n falsch. Der Schritt allein beweist nichts.

(G2) Induktionsanfang ohne Schritt. Die Aussage der Leitfrage, „F_n ist prim“, stimmt für $n = 0$ bis $n = 4$ und scheitert bei $n = 5$. Ein Induktionsschritt müsste aus der Primalität von F_n die von $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ herleiten; das ist unmöglich, denn F_4 ist prim und F_5 nicht. Bestätigte Fälle ersetzen keinen Schritt, gleichgültig wie viele es sind.

(G3) Ein Schritt, der nicht für jedes n trägt. Behauptung: „In jeder Gruppe von n Personen haben alle am selben Tag Geburtstag.“ Scheinbeweis: Für $n = 1$ ist das richtig. Gelte es für n, und seien $n+1$ Personen $P_1, \dots, P_{n+1}$ gegeben. Die ersten n haben nach Voraussetzung denselben Geburtstag, die letzten n ebenfalls; weil sich beide Gruppen überschneiden, haben alle $n+1$ denselben.

Der Fehler: Die Gruppen $\{P_1, \dots, P_n\}$ und $\{P_2, \dots, P_{n+1}\}$ überschneiden sich nur für $n \geq 2$. Für $n = 1$ sind es $\{P_1\}$ und $\{P_2\}$, ohne gemeinsame Person. Der Schritt von 1 auf 2 ist nicht bewiesen, und an ihm hängt alles. Ein Induktionsschritt muss für *jedes* n ab dem Anfang gelten.

(G4) Vertauschte Quantoren. $\forall x\, \exists y : y > x$ ist wahr, $\exists y\, \forall x : y > x$ falsch (Abschnitt 1.2).

(G5) Bild eines Durchschnitts. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A_1 = \{-1\}$, $A_2 = \{1\}$ ist $f(A_1 \cap A_2) = f(\varnothing) = \varnothing$, aber $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$. In Satz 1.11 (3) gilt Gleichheit für alle A_1, A_2 genau dann, wenn f injektiv ist (Aufgabe B4).

(G6) Bernoulli ohne Voraussetzung. Für $x = -4$ und $n = 3$ ist $(1+x)^n = (-3)^3 = -27$, aber $1 + nx = -11$. Die Ungleichung ist verletzt. Im Beweis scheitert der Schritt, in dem mit der negativen Zahl $1 + x$ multipliziert wird.

(G7) Einseitige Verkettung. In Satz 1.10 genügt eine der beiden Gleichungen nicht. Für $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$, $f(1) = 1$ und $g : Y \to X$ konstant ist $g \circ f = \mathrm{id}_X$, aber f ist nicht surjektiv und g nicht injektiv.

(G8) Ohne Transitivität keine Klassen. Auf $\mathbb{R}$ sei $x \sim y$, wenn $|x - y| \leq 1$. Die Relation ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv: $0 \sim 1$ und $1 \sim 2$, aber nicht $0 \sim 2$. Die Mengen $\{y : y \sim 0\}$ und $\{y : y \sim 1\}$ sind verschieden und nicht disjunkt (beide enthalten $\frac{1}{2}$); Satz 1.28 (3) gilt nicht. „Ungefähr gleich“ mit fester Toleranz ist keine Äquivalenzrelation: Kleine Abweichungen addieren sich. Die Analysis arbeitet deshalb nicht mit einer festen Toleranz, sondern mit Aussagen, die für jede vorgegebene Toleranz $\varepsilon > 0$ gelten; das ist die Quantorenform aus Abschnitt 1.2.

1.11 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (Verneinen). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn

$$\exists C > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} : \ |f(x)| \le C.$$

Unbeschränkt heißt nach Regel 1.3: $\forall C > 0 \ \exists x \in \mathbb{R} : \ |f(x)| > C$. Für $f(x) = x^2$ weist man das so nach: Sei $C > 0$ beliebig. Wähle $x = C + 1$. Dann ist $x > 1$ und $x > 0$, nach (O5) also $x^2 > x$, und $x > C$; zusammen $|f(x)| = x^2 > C$. Man beachte die Form: Das C wird vorgegeben, das x wird in Abhängigkeit von C gewählt.

Beispiel 2 (Summe mit zwei Beweisen). Behauptung: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Erster Beweis (Induktion). Für $n = 1$: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Schritt:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Zweiter Beweis (Teleskopsumme). Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ heben sich benachbarte Summanden weg:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Die Induktion bestätigt eine Formel, die man schon kennt. Der zweite Beweis zeigt, woher sie kommt; dasselbe Wegheben trug die Herleitung der geometrischen Summe nach Satz 1.13.

Beispiel 3 (Bernoulli als Werkzeug). Sei $0 < q < 1$. Wir zeigen, dass q^n beliebig klein wird, mit einer ausdrücklichen Schranke. Schreibe $q = \frac{1}{1+x}$ mit $x = \frac{1}{q} - 1 > 0$. Nach Bernoulli ist $(1+x)^n \ge 1 + nx > nx > 0$ für $n \in \mathbb{N}$, mit (O6) also

$$q^n = \frac{1}{(1+x)^n} \le \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}.$$

Für $q = \frac{9}{10}$ ist $x = \frac{1}{9}$, also $q^n < \frac{9}{n}$. Die Schranke ist grob (tatsächlich fällt q^n viel schneller), aber sie genügt für den Schluss, auf den es bei den Folgen ankommt.

Beispiel 4 (Eine Ungleichung ab einer Stelle). Behauptung: $2^n > n^3$ für alle $n \ge 10$. Anfang: $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$. Schritt: Sei $n \ge 10$ und $2^n > n^3$. Nach (O5) ist $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3$, und es bleibt $2n^3 \ge (n+1)^3$ zu zeigen, ausmultipliziert $n^3 \ge 3n^2 + 3n + 1$. Für $n \ge 4$ ist $n^2 \ge 4n$ (Multiplikation von $n \ge 4$ mit $n > 0$, (O2)), also $n^3 = n \cdot n^2 \ge 4n^2 = 3n^2 + n^2 \ge 3n^2 + 4n > 3n^2 + 3n + 1$, das Letzte wegen $n > 1$. Mit (O0) folgt $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Was trägt wo? Die Rechnung des Schritts ist für jedes $n \geq 4$ richtig; bei $n = 3$ versagt sie, denn $2 \cdot 27 = 54 < 64 = 4^3$. Die Behauptung selbst gilt für $n = 1$ ($2 > 1$), ist aber für $n = 2, \dots, 9$ falsch, zuletzt $2^9 = 512 < 729 = 9^3$. Der wahre Fall $n = 1$ nützt nichts, weil der Schritt von 1 auf 2 nicht trägt; der Schritt ab $n = 4$ nützt erst, wenn ein wahrer Fall erreicht ist, und das ist $n = 10$. Beides wird gebraucht.

1.12 Ausblick

- Die **Quantorenfolge** $\forall\varepsilon\,\exists N\,\forall n$ ist das Gerüst der Einheit über Folgen und kehrt als $\forall\varepsilon\,\exists\delta$ bei der Stetigkeit wieder. Der Unterschied zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit sowie zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz ist jeweils nur eine vertauschte Quantorenreihenfolge, wie in (G4).
- Die **geometrische Summe** und die **Bernoullische Ungleichung** tragen die Konvergenzkriterien für Reihen und die Untersuchung der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$, aus der die Zahl e entsteht (vorbereitet in Aufgabe V4).
- Der **Binomialsatz** liefert die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.
- Die **Dreiecksungleichung** steht in jedem Grenzwertbeweis; aus ihr wird der Begriff der Metrik.
- **Äquivalenzklassen** liefern $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ aus den rationalen Cauchy-Folgen, später jede Quotientenbildung der Algebra und Topologie.
- Die **Anordnungsregeln** (O0) bis (O6), die hier benutzt wurden, und die Existenz von Wurzeln werden bei der Konstruktion der reellen Zahlen bewiesen. Dort zeigt sich auch, was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet.

Zum Vergleich.[1] Der Stoff dieser Einheit gehört zum Anfang jeder Analysis-Vorlesung. Parallel lesen kann man O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016), § 1 (vollständige Induktion, Summen- und Produktzeichen, Fakultät, Binomialkoeffizienten, Binomialsatz, geometrische Summe) und § 3 (Peano-Axiome, Betrag und Dreiecksungleichung, Bernoullische Ungleichung). Satz 1.19 wird dort ebenso durch Induktion über die Elementzahl bewiesen (§ 1, Satz 4, mit der Bemerkung über die Ganzzahligkeit), Satz 1.24 mit demselben Induktionsschritt (§ 3, Satz 2); dass q^n für $0 < q < 1$ beliebig klein wird, folgt dort ebenfalls aus der Bernoullischen Ungleichung (§ 3, Satz 3). Die Fermat-Zahlen der Leitfrage mit dem Teiler 641 von F_5 bespricht Forster in einer Bemerkung zu (1.7). Aufgabe R1 und Beispiel 2 behandeln Aussagen, die bei Forster und in O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011), Übungsaufgaben sind: die Summenformel in R1 (Forster, Aufgabe 1.3; Übungsbuch, Aufgabe 1 O) und die Summe in Beispiel 2 (Forster, Aufgabe 1.6 und Beispiel (4.9); Übungsbuch, Aufgabe 1 L). Satz 1.25 ist ein Teil der Ungleichungskette in Aufgabe 3 G des Übungsbuchs.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 1

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Beweisen Sie durch Induktion: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

R2. Verneinen Sie, ohne das Zeichen $\neg$ vor einem Quantor stehen zu lassen:

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}:\ n > x$

(b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}:\ xy = y$

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}:\ \big(|x-1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon\big)$

Welche der Aussagen (a) und (b) sind wahr? (Bei (a) genügt eine Begründung, warum die Aussage wahr sein sollte; der Beweis folgt in Einheit 2.)

R3. Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^3 in $(2x-1)^5$.

R4. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2x - 3| < 5$.

R5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n = \Big\{x \in \mathbb{R}:\ \tfrac{1}{n} \le x \le 2 - \tfrac{1}{n}\Big\}, \qquad B_n = \Big\{x \in \mathbb{R}:\ -\tfrac{1}{n} < x < 1 + \tfrac{1}{n}\Big\}.$$

Bestimmen Sie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ und beweisen Sie Ihr Ergebnis über zwei Inklusionen. Sie dürfen dabei die archimedische Eigenschaft benutzen, die in Einheit 2 bewiesen wird:

(A) Zu jedem $t > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < t$.

An welcher Stelle wird (A) gebraucht, an welcher nicht?

R6. (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| + |x+2| \le 5$.

(b) Zeigen Sie mit der Dreiecksungleichung, ohne Fallunterscheidung, dass $|x-1|+|x+2| \ge 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für welche x gilt Gleichheit?

Stufe B – Beweisen

B1. Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf zwei Wegen: durch Induktion und, indem Sie jeden Summanden als Differenz zweier Fakultäten schreiben, wie im zweiten Beweis von Beispiel 2 (Abschnitt 1.11).

B2. Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(c) Geben Sie Abbildungen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, für die $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ gilt, f aber nicht surjektiv und g nicht injektiv ist. Warum kann es ein solches Beispiel mit einer endlichen Menge $X = Y = Z$ nicht geben?

B3. (a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

(b) Sei X eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie mit (a): Es gibt genau 3^n Paare (S, T) von Teilmengen von X mit $S \subseteq T$.

B4. Sei $f : X \to Y$. Zeigen Sie: Genau dann gilt $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle $A_1, A_2 \subseteq X$, wenn f injektiv ist.

B5. Auf $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ sei $(a, b) \sim (c, d)$, wenn $ad = bc$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. An welcher Stelle wird benutzt, dass die zweite Komponente nicht null ist? Zeigen Sie außerdem, dass $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc,\ bd)]$ wohldefiniert ist.

B6. (a) Zeigen Sie, dass $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ für alle Wahrheitswerte von A, B, C wahr ist. Es genügt, die Belegungen zu untersuchen, in denen $A \Rightarrow C$ falsch ist – warum?

(b) Zeigen Sie, dass $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ und $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ nicht gleichwertig sind.

(c) Beweisen Sie durch Kontraposition: Sind $m, n \in \mathbb{Z}$ und ist mn gerade, so ist m gerade oder n gerade.

(d) Beweisen Sie durch Widerspruch: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und gilt $|a - b| \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so ist $a = b$.

B7. Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X.

(a) Führen Sie den Beweis der Regeln von De Morgan für Familien aus (Abschnitt 1.4), einschließlich des Falls $I = \emptyset$.

(b) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, und $A = \{1\}$ zeigen Sie: Weder $f(\mathbb{R} \setminus A) \subseteq \mathbb{R} \setminus f(A)$ noch $\mathbb{R} \setminus f(A) \subseteq f(\mathbb{R} \setminus A)$ gilt. Das Bild verträgt sich also nicht mit dem Komplement.

(c) Zeigen Sie für eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$: Es gilt $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ für alle $A \subseteq X$ genau dann, wenn f injektiv ist, und $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$ für alle $A \subseteq X$ genau dann, wenn f surjektiv ist.

B8. (a) Zeigen Sie durch Induktion für reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

(b) Zeigen Sie für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$:

$$|xy - ab| \leq |x|\,|y - b| + |b|\,|x - a|,$$

und folgern Sie: Ist $|x-a| \leq 1$, so gilt $|xy-ab| \leq (|a|+1)|y-b| + |b|\,|x-a|$.

(c) Zeigen Sie: $|x+y| = |x| + |y|$ gilt genau dann, wenn $xy \geq 0$ ist.

Stufe V – Vertiefen

V1. Die Fibonacci-Zahlen sind durch $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 2$ erklärt. Zeigen Sie $f_n < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erklären Sie, warum im Induktionsschritt zwei Vorgänger gebraucht werden und warum deshalb f_2 gesondert geprüft werden muss.

V2. Setzen Sie voraus: $\mathbb{N}$ mit der üblichen Anordnung erfüllt die Wohlordnung (jede nichtleere Teilmenge hat ein kleinstes Element), und jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq 1$ hat einen Vorgänger $n-1 \in \mathbb{N}$ mit $n-1 < n$ und $(n-1)+1 = n$.

(a) Leiten Sie daraus das Induktionsprinzip her.

(b) Sei $W = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ mit einem neuen Element ω, das größer als jede natürliche Zahl ist, und sei $\nu(n) = n+1$, $\nu(\omega) = \omega$. Zeigen Sie: Jede nichtleere Teilmenge von W hat ein kleinstes Element, aber das Induktionsprinzip „aus $A(1)$ und $A(x) \Rightarrow A(\nu(x))$ für alle $x \in W$ folgt $A(x)$ für alle $x \in W$“ ist falsch. Welche Voraussetzung aus (a) fehlt?

V3. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

V4. Sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit der Bernoullischen Ungleichung:

(a) $a_n \geq 2$ für alle n,

(b) $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n.

V5. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann injektiv, wenn es ein $g\colon Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gibt.

(b) Gibt es ein $h\colon Y \to X$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$, so ist f surjektiv.

(c) Wo liegt die Schwierigkeit bei der Umkehrung von (b)?

(d) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass in (a) auf $X \neq \emptyset$ nicht verzichtet werden kann.

V6. Für $a, b \in \mathbb{N}$ schreibe man $a \mid b$ („a teilt b“), wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $b = ka$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass $\mid$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist, aber keine totale.

(b) Auf $\mathbb{Z}$ sei $a \mid b$ entsprechend mit $k \in \mathbb{Z}$ erklärt. Welche der drei Eigenschaften einer Ordnung gehen verloren, und an welcher Stelle Ihres Beweises aus (a)?

(c) Zeigen Sie: Aus $a \mid b$ folgt $a \leq b$ (für $a, b \in \mathbb{N}$).

(d) Sei $\preceq$ eine Ordnung auf einer Menge M. Ein $m \in M$ heißt *kleinstes Element*, wenn $m \preceq x$ für alle $x \in M$ gilt, und *minimal*, wenn aus $x \in M$ und $x \preceq m$ stets $x = m$ folgt. Zeigen Sie: Ein kleinstes Element ist minimal, und es ist dann das einzige minimale Element. Ist $\preceq$ total, so ist jedes minimale Element ein kleinstes.

(e) Bestimmen Sie für $M = \{2, 3, 4, \dots\}$ mit der Ordnung $|$ alle minimalen Elemente und zeigen Sie, dass M kein kleinstes Element hat. Vergleichen Sie mit Satz 1.16.

Lösungen

Lösung R1. Anfang $n = 1$: $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$. Schritt:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)\big(2n^2+n+6n+6\big)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

denn $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$. Das ist die Formel für $n+1$.

Lösung R2.

(a) Verneinung: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}:\ n \le x$. Die ursprüngliche Aussage (a) ist wahr; sie besagt, dass die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ nicht beschränkt sind. Ihr Beweis gehört zu Einheit 2 (archimedische Eigenschaft).

(b) Verneinung: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}:\ xy \neq y$. Die ursprüngliche Aussage (b) ist wahr: $x = 1$ leistet das Verlangte.

(c) Verneinung: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}:\ \big(|x-1| < \delta \wedge |x^2-1| \ge \varepsilon\big)$. Die Implikation im Inneren wird nach Satz 1.2 (3) zu „Voraussetzung und nicht Behauptung“; die Einschränkungen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ bleiben stehen (Abschnitt 1.2). Die Aussage (c) selbst ist wahr: Zu $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon/3$, falls $\varepsilon \le 3$, und sonst $\delta = 1$. Aus $|x-1| < \delta$ folgt $|x+1| \le |x-1|+2 < 3$ und damit $|x^2-1| = |x-1|\,|x+1| < 3\delta \le \varepsilon$. Sie besagt, dass $x \mapsto x^2$ an der Stelle 1 stetig ist; der Begriff folgt später.

Lösung R3. Nach dem Binomialsatz mit $a = 2x$, $b = -1$ ist der Summand mit x^3 der zu $k = 2$:

$$\binom{5}{2}(2x)^3(-1)^2 = 10 \cdot 8\, x^3 = 80\, x^3.$$

Der Koeffizient ist 80.

Lösung R4. Nach Abschnitt 1.8 gilt $|y| < c \iff -c < y < c$ für $c > 0$. Mit den strengen Regeln (O5) folgt

$$|2x-3| < 5 \iff -5 < 2x-3 < 5 \iff -2 < 2x < 8 \iff -1 < x < 4$$

(zweiter Schritt: 3 addieren; dritter: mit $\frac{1}{2} > 0$ multiplizieren). Die Lösungsmenge ist das offene Intervall $(-1, 4)$: alle Punkte, deren Abstand von $\frac{3}{2}$ kleiner als $\frac{5}{2}$ ist, denn $|2x-3| < 5 \iff |x - \frac{3}{2}| < \frac{5}{2}$.

Lösung R5. *Vorbemerkung.* Für $n \geq m$ gilt $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$, und stets $\frac{1}{n} > 0$ ((O6) und (O3)).

Vereinigung. Behauptung: $\bigcup_n A_n = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 2\}$.

„$\subseteq$“: Liegt x in einem A_n, so ist $0 < \frac{1}{n} \leq x$ und $x \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$. Hier wird (A) nicht gebraucht.

„$\supseteq$“: Sei $0 < x < 2$. Dann sind $x > 0$ und $2 - x > 0$. Nach (A) gibt es n_1 mit $\frac{1}{n_1} < x$ und n_2 mit $\frac{1}{n_2} < 2 - x$. Für $n = \max\{n_1, n_2\}$ ist $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1} < x$ und $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_2} < 2 - x$, also $\frac{1}{n} \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}$, das heißt $x \in A_n$.

Durchschnitt. Behauptung: $\bigcap_n B_n = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leq x \leq 1\}$.

„$\supseteq$“: Aus $0 \leq x \leq 1$ folgt $-\frac{1}{n} < 0 \leq x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$ für jedes n. Hier wird (A) nicht gebraucht.

„$\subseteq$“: Sei x in allen B_n. Angenommen, $x < 0$. Dann ist $-x > 0$, und nach (A) gibt es n mit $\frac{1}{n} < -x$, also $x < -\frac{1}{n}$; dann liegt x nicht in B_n – Widerspruch. Angenommen, $x > 1$. Dann gibt es nach (A) ein n mit $\frac{1}{n} < x - 1$, also $x > 1 + \frac{1}{n}$, und $x \notin B_n$ – Widerspruch. Also ist $0 \leq x \leq 1$.

Deutung. Jedes A_n enthält seine Randpunkte, die Vereinigung keinen; jedes B_n enthält seine Randpunkte nicht, der Durchschnitt beide. Später heißt das: Eine Vereinigung abgeschlossener Intervalle braucht nicht abgeschlossen, ein Durchschnitt offener Intervalle nicht offen zu sein. (A) wird jeweils nur für die schwierigere Inklusion gebraucht, wie im Beispiel $\bigcap_n \{0 < x < \frac{1}{n}\} = \varnothing$ des Abschnitts 1.4.

Lösung R6. (a) Nach Definition 1.22 ist $|x-1| = x - 1$ für $x \geq 1$ und $= 1 - x$ für $x < 1$, ebenso $|x+2| = x + 2$ für $x \geq -2$ und $= -x - 2$ für $x < -2$. Drei Fälle:

- $x \geq 1$: Die Summe ist $(x-1) + (x+2) = 2x + 1$, und $2x + 1 \leq 5 \iff x \leq 2$. Lösungen: $1 \leq x \leq 2$.
- $-2 \leq x < 1$: Die Summe ist $(1 - x) + (x + 2) = 3 \leq 5$. Lösungen: alle x mit $-2 \leq x < 1$.

- $x < -2$: Die Summe ist $(1-x)+(-x-2) = -2x-1$, und $-2x-1 \le 5 \iff -2x \le 6 \iff x \ge -3$ (Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ dreht die Ungleichung um, (O2)). Lösungen: $-3 \le x < -2$.

Zusammen: $\{x \in \mathbb{R} : -3 \le x \le 2\}$. Geometrisch: alle Punkte, deren Abstände zu 1 und zu -2 zusammen höchstens 5 betragen.

(b) Mit $|-u| = |u|$ und der Dreiecksungleichung:

$$3 = \big|(x+2)+(1-x)\big| \le |x+2| + |1-x| = |x+2| + |x-1|.$$

Gleichheit: Nach der Fallunterscheidung aus (a) ist die Summe im mittleren Fall gleich 3, im ersten Fall $2x+1 = 3$ nur für $x = 1$, im dritten Fall $-2x-1 = 3$ nur für $x = -2$, das nicht zum dritten Fall gehört. Also gilt Gleichheit genau für $-2 \le x \le 1$, das heißt für die Punkte zwischen -2 und 1 einschließlich der Endpunkte. (Vergleich mit B8 (c): Gleichheit genau, wenn $(x+2)(1-x) \ge 0$, und das ist dieselbe Bedingung.)

Lösung B1. *Induktion.* Anfang $n = 1$: links $1 \cdot 1! = 1$, rechts $2! - 1 = 1$. Schritt: Gilt die Formel für n, so ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! = (n+1)!\big(1+(n+1)\big) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Differenzen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $(k+1)! = (k+1)\cdot k! = k\cdot k! + k!$, also $k \cdot k! = (k+1)! - k!$. Damit ist

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = \big(2! - 1!\big) + \big(3! - 2!\big) + \cdots + \big((n+1)! - n!\big) = (n+1)! - 1!,$$

denn jede Fakultät von 2! bis $n!$ tritt einmal mit Plus und einmal mit Minus auf. Wegen $1! = 1$ ist das die Behauptung. Der zweite Weg erklärt, warum gerade $(n+1)! - 1$ herauskommt; der erste setzt die Formel als bekannt voraus.

Lösung B2. (a) Sei $f(x) = f(x')$. Dann ist $g(f(x)) = g(f(x'))$, und weil $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x = x'$.

(b) Sei $z \in Z$. Weil $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es $x \in X$ mit $g(f(x)) = z$. Dann ist $y = f(x) \in Y$ ein Element mit $g(y) = z$.

(c) $f(n) = n+1$ und $g(1) = 1$, $g(n) = n-1$ für $n \ge 2$ (Vorgänger, Abschnitt 1.6). Dann ist $g(f(n)) = g(n+1) = n$, also $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. f nimmt den Wert 1 nicht an (P2), und $g(1) = g(2) = 1$.

Für eine endliche Menge X mit n Elementen ist eine injektive Abbildung $f : X \to X$ auch surjektiv: f ist eine Bijektion von X auf $f(X)$, also hat die Teilmenge $f(X) \subseteq X$

genau n Elemente und ist nach den Zählregeln des Abschnitts 1.7 ganz X. Nach (a) wäre f injektiv, also bijektiv, und dann wäre $g = g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$ ebenfalls bijektiv. Das Beispiel zeigt, dass sich unendliche Mengen anders verhalten: $\mathbb{N}$ lässt sich injektiv auf eine echte Teilmenge von sich abbilden. Ein Beispiel mit verschiedenen endlichen Mengen ist (G7).

Lösung B3. (a) Satz 1.20 mit $a = 1$ und $b = 2$ gibt $3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

(b) Für $0 \le k \le n$ sei P_k die Menge der gesuchten Paare (S, T), bei denen T genau k Elemente hat. Jedes Paar liegt in genau einem P_k, denn $T \subseteq X$ hat nach den Zählregeln eine eindeutig bestimmte Elementzahl $k \le n$. Halten wir eine k-elementige Teilmenge T fest. Die Paare (S, T) mit diesem T entsprechen umkehrbar eindeutig den Teilmengen S von T, vermöge $(S, T) \mapsto S$ und $S \mapsto (S, T)$; nach Folgerung 1.21 sind es 2^k. Nach Satz 1.19 gibt es $\binom{n}{k}$ solche T, und Paare mit verschiedenem T sind verschieden. Also zerfällt P_k in $\binom{n}{k}$ disjunkte Teile mit je 2^k Elementen und hat nach der Zählregel für disjunkte Vereinigungen $\binom{n}{k} 2^k$ Elemente. Dieselbe Regel, auf $P_0, \dots, P_n$ angewandt, ergibt mit (a) insgesamt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$ Paare.

Deutung. Ein Paar (S, T) legt für jedes $x \in X$ eine von drei Möglichkeiten fest: $x \in S$, oder $x \in T \setminus S$, oder $x \notin T$. Das macht die Zahl 3^n plausibel; ein Beweis auf diesem Weg bräuchte eine Zählregel für Auswahlen, die Abschnitt 1.7 nicht bereitstellt. Für $n = 1$, $X = \{x\}$, sind es die drei Paare $(\varnothing, \varnothing)$, $(\varnothing, X)$ und (X, X).

Lösung B4. „⇐“: Sei f injektiv. Die Inklusion „⊆“ gilt immer (Satz 1.11 (3)). Sei $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Dann gibt es $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$ mit $f(a_1) = y = f(a_2)$. Aus der Injektivität folgt $a_1 = a_2$; dieses Element liegt in $A_1 \cap A_2$, also $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

„⇒“: Kontraposition. Sei f nicht injektiv; dann gibt es $x \neq x'$ mit $f(x) = f(x')$. Für $A_1 = \{x\}$, $A_2 = \{x'\}$ ist $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, also $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$, aber $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x)\} \neq \varnothing$.

Lösung B5. Reflexiv: $ab = ba$. Symmetrisch: Aus $ad = bc$ folgt $cb = da$. Transitiv: Sei $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$, also $ad = bc$ und $cf = de$. Dann ist

$$(af)d = (ad)f = (bc)f = b(cf) = b(de) = (be)d,$$

also $d(af - be) = 0$. Wegen $d \neq 0$ folgt $af = be$, das heißt $(a, b) \sim (e, f)$. Genau hier geht $d \neq 0$ ein, zusammen mit der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$. Ließe man die zweite Komponente 0 zu, wäre $(1, 1) \sim (0, 0)$ und $(0, 0) \sim (2, 1)$, aber nicht $(1, 1) \sim (2, 1)$.

Wohldefiniertheit: Sei $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$, also $ab' = a'b$ und $cd' = c'd$. Zu zeigen ist $(ad + bc)\, b'd' = (a'd' + b'c')\, bd$. Es ist

$$(ad + bc)\, b'd' = (ab')\, dd' + (cd')\, bb' = (a'b)\, dd' + (c'd)\, bb' = (a'd' + b'c')\, bd.$$

Außerdem liegt bd wieder in $\mathbb{N}$, das Ergebnis also in X.

Lösung B6. (a) Eine Implikation $P \Rightarrow Q$ ist nur dann falsch, wenn Q falsch und P wahr ist. Es genügt also, die Belegungen zu betrachten, in denen $Q = (A \Rightarrow C)$ falsch ist, und dort zu zeigen, dass P falsch ist. $A \Rightarrow C$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und C falsch ist. Ist dann B wahr, so ist $B \Rightarrow C$ falsch; ist B falsch, so ist $A \Rightarrow B$ falsch. In beiden Fällen ist $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ falsch, die Gesamtaussage also wahr. In allen übrigen Belegungen ist sie wahr, weil ihre Behauptung wahr ist. Diese Regel (Kettenschluss) erlaubt, Beweise in Zwischenschritte zu zerlegen.

(b) Belegung A falsch, B beliebig, C falsch: $A \Rightarrow B$ ist wahr, also ist $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ falsch. Dagegen ist $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ wahr, weil A falsch ist. Die Klammerung bei mehrfachen Implikationen ist also nicht gleichgültig.

(c) Die Verneinung der Behauptung „m gerade oder n gerade“ ist nach Satz 1.2 (1) „m ungerade und n ungerade“ (jede ganze Zahl ist entweder gerade oder ungerade). Zu zeigen ist also: Sind m und n ungerade, so ist mn ungerade. Mit $m = 2k + 1$, $n = 2l + 1$, $k, l \in \mathbb{Z}$, ist

$$mn = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1,$$

also ist mn ungerade.

(d) Angenommen, $a \neq b$. Dann ist $a - b \neq 0$, also $|a - b| > 0$, und $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$ ist positiv. Die Voraussetzung gibt für dieses ε:

$$|a - b| \leq \tfrac{1}{2}|a - b|.$$

Subtraktion von $\frac{1}{2}|a - b|$ (O1) ergibt $\frac{1}{2}|a - b| \leq 0$, das heißt $\varepsilon \leq 0$ – im Widerspruch zu $\varepsilon > 0$. Die Annahme $a \neq b$ diente dazu, ein *positives* ε wählen zu dürfen.

Ausblick. So beweist man in der Analysis Gleichheiten: Man zeigt, dass der Abstand kleiner ist als jede positive Zahl. Daraus folgt später, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert hat.

Lösung B7. (a) Für $x \in X$ gilt nach Regel 1.3:

$$x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff \neg\big(\exists i \in I : \ x \in A_i\big) \iff \forall i \in I : \ x \notin A_i \iff x \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Beide Seiten der ersten Regel sind Teilmengen von X und haben dieselben Elemente. Die zweite Regel ebenso: Für $x \in X$ gilt $x \notin \bigcap_i A_i \iff \neg(\forall i : \ x \in A_i) \iff \exists i : \ x \notin A_i \iff x \in \bigcup_i (X \setminus A_i)$. Der Beweis benutzt nichts über I. Für $I = \varnothing$ lauten die Regeln $X \setminus \varnothing = X$ und $X \setminus X = \varnothing$.

(b) $f(\mathbb{R}\setminus\{1\})$ enthält $f(-1)=1$, aber $\mathbb{R}\setminus f(\{1\})=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ enthält 1 nicht; die erste Inklusion ist falsch. Umgekehrt liegt -1 in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, aber nicht in $f(\mathbb{R}\setminus\{1\})$, weil $x^2\geq 0$ für jedes x gilt (O3); die zweite Inklusion ist falsch.

(c) *Injektiv.* Sei f injektiv und $y\in f(X\setminus A)$, also $y=f(x)$ mit $x\notin A$. Läge y in $f(A)$, so wäre $y=f(a)$ mit $a\in A$, und aus $f(a)=f(x)$ folgte $a=x\in A$ – Widerspruch. Also $y\in Y\setminus f(A)$. Ist f nicht injektiv, etwa $f(x)=f(x')$ mit $x\neq x'$, so wähle $A=\{x'\}$: Dann liegt $f(x)$ in $f(X\setminus A)$ und in $f(A)$, die Inklusion ist verletzt.

Surjektiv. Sei f surjektiv und $y\notin f(A)$. Es gibt x mit $f(x)=y$, und $x\notin A$ (sonst wäre $y\in f(A)$), also $y\in f(X\setminus A)$. Gilt umgekehrt die Inklusion für alle A, so für $A=\varnothing$: $Y\subseteq f(X)$, also ist f surjektiv.

Folglich gilt $f(X\setminus A)=Y\setminus f(A)$ für alle A genau dann, wenn f bijektiv ist. Das Urbild verträgt sich dagegen nach Satz 1.11 mit allen Mengenoperationen, ohne Voraussetzung an f.

Lösung B8. (a) Anfang $n=1$: $|x_1|\leq|x_1|$. Schritt: Gelte die Ungleichung für n. Mit Satz 1.23 und (O1):

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1}x_k\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\Big|\leq\Big|\sum_{k=1}^{n}x_k\Big|+|x_{n+1}|\leq\sum_{k=1}^{n}|x_k|+|x_{n+1}|=\sum_{k=1}^{n+1}|x_k|.$$

(b) Man schiebt die Null $-xb+xb$ ein:

$$xy-ab=(xy-xb)+(xb-ab)=x(y-b)+b(x-a).$$

Dreiecksungleichung und $|uv|=|u|\,|v|$ ergeben die Behauptung. Ist $|x-a|\leq 1$, so ist $|x|=|(x-a)+a|\leq|x-a|+|a|\leq 1+|a|$, und Multiplikation mit $|y-b|\geq 0$ (O2) gibt $|x|\,|y-b|\leq(|a|+1)|y-b|$. Addiert man auf beiden Seiten $|b|\,|x-a|$ (O1) und verkettet mit der ersten Ungleichung (O0), so folgt die Behauptung.

Ausblick. Die rechte Seite hängt nur noch von den Abständen $|x-a|$, $|y-b|$ und den festen Zahlen a, b ab. Sind x nahe bei a und y nahe bei b, so ist xy nahe bei ab; das ist der Kern der Produktregel für Grenzwerte. Die Bedingung $|x-a|\leq 1$ dient nur dazu, den Faktor $|x|$ durch eine feste Zahl zu ersetzen.

(c) Für jedes $u\in\mathbb{R}$ ist $|u|^2=|u^2|=u^2$, weil $u^2\geq 0$ (O3). Also

$$|x+y|^2=x^2+2xy+y^2,\qquad(|x|+|y|)^2=x^2+2|xy|+y^2.$$

Für $u,v\geq 0$ gilt $u=v\iff u^2=v^2$: „$\Rightarrow$“ ist klar; aus $u^2=v^2$ folgt $(u-v)(u+v)=0$, also $u=v$ oder $u+v=0$, und im zweiten Fall ist $0\leq u\leq u+v=0$, also $u=v=0$. (Benutzt wird, dass ein Produkt reeller Zahlen nur null ist, wenn ein Faktor null ist – Körpereigenschaft, Einheit 2.) Mit $u=|x+y|$, $v=|x|+|y|$ folgt:

$$|x+y|=|x|+|y|\iff xy=|xy|\iff xy\geq 0,$$

der letzte Schritt nach Definition 1.22 (für $z < 0$ ist $|z| = -z \neq z$). In Worten: In der Dreiecksungleichung gilt genau dann Gleichheit, wenn x und y nicht entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Lösung V1. Die Rekursion greift auf zwei Vorgänger zurück; der Schritt braucht deshalb die Aussage für n und für $n-1$. Wir benutzen Satz 1.14 mit $n_0 = 1$.

Anfang: $f_1 = 1 < 2$. Schritt: Seien $f_1 < 2^1, \dots, f_n < 2^n$ bereits gezeigt. Für $n = 1$ greift die Rekursion nicht (sie gilt erst für $n \geq 2$ und würde sonst f_0 verlangen); hier prüft man direkt $f_2 = 1 < 4$. Für $n \geq 2$ ist

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} < 2^n + 2^{n-1} < 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Wer nur f_1 prüft und den Schritt ohne Fallunterscheidung führt, hat den Übergang von 1 auf 2 nicht bewiesen; das ist dieselbe Fehlerquelle wie in (G3). Gleichwertig kann man die verstärkte Aussage „$f_n < 2^n$ und $f_{n+1} < 2^{n+1}$“ mit gewöhnlicher Induktion beweisen; auch dort steckt die Prüfung von f_2 im Anfang.

Lösung V2. (a) Sei $A(n)$ eine Aussage mit $A(1)$ und $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle n. Angenommen, $A(n)$ gilt nicht für alle n. Dann ist $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist falsch}\}$ nicht leer und hat nach der Wohlordnung ein kleinstes Element m. Wegen $A(1)$ ist $m \neq 1$, also existiert $m - 1 \in \mathbb{N}$. Wegen $m - 1 < m$ liegt $m - 1$ nicht in M; $A(m-1)$ ist also wahr. Nach dem Schritt ist dann $A\big((m-1)+1\big) = A(m)$ wahr – Widerspruch zu $m \in M$.

Benutzt wurden die Wohlordnung, die Existenz des Vorgängers und $m - 1 < m$. Im Kapitel ist die Vorgängereigenschaft aus (P3) gewonnen. Die Gleichwertigkeit von Induktion und Wohlordnung ist deshalb so zu lesen: Unter den übrigen Eigenschaften von $\mathbb{N}$, insbesondere der Vorgängereigenschaft, folgt jede der beiden Aussagen aus der anderen.

(b) Sei $T \subseteq W$ nicht leer. Enthält T eine natürliche Zahl, so hat $T \cap \mathbb{N}$ nach Satz 1.16 ein kleinstes Element t, und t ist auch kleiner als ω, also kleinstes Element von T. Andernfalls ist $T = \{\omega\}$ mit kleinstem Element ω. Sei nun $A(x)$ die Aussage „$x \in \mathbb{N}$“. $A(1)$ gilt; für $n \in \mathbb{N}$ folgt $A(n+1)$; für $x = \omega$ ist $A(\omega) \Rightarrow A(\nu(\omega))$ die Implikation $A(\omega) \Rightarrow A(\omega)$, also wahr. Trotzdem ist $A(\omega)$ falsch. Es fehlt die Vorgängereigenschaft: $\omega \neq 1$ ist kein Nachfolger eines anderen Elements. Der Beweis aus (a) bricht an der Stelle „$m \neq 1$, also existiert $m - 1$“ ab, wenn das kleinste Gegenbeispiel $m = \omega$ ist.

Lösung V3. Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$k\binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Der Summand zu $k = 0$ ist null. Also ist mit der Indexverschiebung $j = k - 1$ und Folgerung 1.21

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n\,2^{n-1}.$$

Deutung: Links zählt man alle Paare aus einer Teilmenge und einem ausgezeichneten Element darin. Rechts wählt man zuerst das Element (n Möglichkeiten) und dann eine beliebige Teilmenge der übrigen $n-1$ Elemente.

Lösung V4. (a) Bernoulli mit $x = \frac{1}{n} \geq -1$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$.

(b) Wegen $a_n > 0$ genügt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Es ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n},$$

denn $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$. Bernoulli mit $x = -\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1$ und Exponent $n+1$ gibt

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Also ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$.

Die Folge (a_n) wächst also. Später kommt hinzu, dass sie nach oben beschränkt ist; ihr Grenzwert ist die Zahl e.

Lösung V5. (a) „⇐“: Aus $f(x) = f(x')$ folgt $x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$. „⇒“: Sei f injektiv und $x_0 \in X$ fest (hier wird $X \neq \emptyset$ gebraucht). Setze $g(y) = x$, falls $y = f(x)$ für ein $x \in X$ – dieses x ist wegen der Injektivität eindeutig –, und $g(y) = x_0$, falls $y \notin f(X)$. Dann ist $g(f(x)) = x$ für alle x.

(b) Für $y \in Y$ ist $y = f(h(y))$, also liegt y im Bild von f.

(c) Ist f surjektiv, so ist jede der Mengen $f^{-1}(\{y\})$ nicht leer, und eine Rechtsinverse h entsteht, indem man aus jeder dieser Mengen ein Element $h(y)$ auswählt. Für endliches Y geht das durch Induktion über die Elementzahl. Für unendliches Y gibt es im Allgemeinen keine Vorschrift, die alle Auswahlen zugleich festlegt; dass eine solche Auswahlfunktion dennoch existiert, ist der Inhalt des Auswahlaxioms. In (a) trat das Problem nicht auf, weil $g(y)$ dort eindeutig bestimmt oder einheitlich gleich x_0 war.

(d) $X = \emptyset$, $Y = \{1\}$, $f : \emptyset \to Y$ die leere Abbildung (Abschnitt 1.5). Sie ist injektiv: Es gibt keine x, x', an denen die Bedingung verletzt sein könnte. Eine Abbildung $g : \{1\} \to \emptyset$ gibt es aber nicht, denn $g(1)$ müsste ein Element der leeren Menge sein.

Lösung V6. (a) *Reflexiv:* $a = 1 \cdot a$. *Transitiv:* Aus $b = ka$ und $c = lb$ folgt $c = (lk)a$ mit $lk \in \mathbb{N}$. *Antisymmetrisch:* Aus $b = ka$ und $a = lb$ folgt $a = lka$, also $a(lk - 1) = 0$ und wegen $a \neq 0$ dann $lk = 1$. Wäre $k \geq 2$, so wäre $lk \geq k \geq 2$ (wegen $l \geq 1$); also $k = 1$ und $b = a$.

Nicht total: $2 \nmid 3$, denn $2k$ ist 2 für $k = 1$ und mindestens 4 für $k \geq 2$; und $3 \nmid 2$, denn $3k \geq 3$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(b) Reflexivität und Transitivität bleiben mit derselben Rechnung erhalten. Die Antisymmetrie geht verloren: $-1 = (-1) \cdot 1$ und $1 = (-1) \cdot (-1)$, also $1 \mid -1$ und $-1 \mid 1$, aber $1 \neq -1$. Im Beweis aus (a) bricht der Schluss „$lk = 1 \Rightarrow k = 1$“: In $\mathbb{Z}$ ist auch $k = l = -1$ möglich. Die Voraussetzung $k \in \mathbb{N}$ wird also genau an dieser Stelle gebraucht.

(c) Ist $b = ka$ mit $k \geq 1$, so ist $b - a = (k - 1)a \geq 0$ nach (O2), weil $k - 1 \geq 0$ und $a > 0$.

(d) Sei m kleinstes Element und $x \preceq m$. Da auch $m \preceq x$, folgt $x = m$ aus der Antisymmetrie; m ist minimal. Ist m' ein weiteres minimales Element, so gilt $m \preceq m'$, und die Minimalität von m' ergibt $m = m'$. Sei nun $\preceq$ total und m minimal. Für $x \in M$ gilt $x \preceq m$ oder $m \preceq x$; im ersten Fall ist $x = m$ und $m \preceq x$ wegen der Reflexivität. Also ist $m \preceq x$ für alle x.

(e) Eine *Primzahl* ist eine Zahl $p \geq 2$, deren einzige Teiler in $\mathbb{N}$ die Zahlen 1 und p sind. Ein $m \in M$ ist minimal, wenn jeder Teiler $x \in M$ von m gleich m ist. Die Teiler von m in $\mathbb{N}$ sind 1 und die Teiler ≥ 2, und diese liegen in M. Also ist m genau dann minimal, wenn 1 und m seine einzigen Teiler sind: **Die minimalen Elemente sind genau die Primzahlen.** Insbesondere sind 2 und 3 minimal. Nach (d) hätte ein kleinstes Element das einzige minimale Element zu sein; es gibt also keines.

Vergleich mit Satz 1.16: Bezüglich $\leq$ hat M das kleinste Element 2. Ob eine Menge ein kleinstes Element hat, hängt von der Ordnung ab, nicht von der Menge allein. Das Supremum ist in Abschnitt 1.9 als *kleinste* obere Schranke erklärt; in der totalen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ fallen „minimal“ und „kleinst“ nach (d) zusammen, in einer nicht totalen Ordnung nicht.

EINHEIT 2

Die reellen Zahlen

Leitfrage

Die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 hat nach Pythagoras eine Länge d mit $d^2 = 2$. Eine rationale Zahl mit dieser Eigenschaft gibt es nicht (Satz 2.9). Trotzdem lässt sich d durch Brüche beliebig genau einkreisen. Das nach Heron von Alexandria benannte Verfahren, $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$, liefert

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \frac{3}{2}, \qquad x_3 = \frac{17}{12}, \qquad x_4 = \frac{577}{408}, \qquad x_4^2 - 2 = \frac{1}{166464}.$$

Die Glieder rücken immer enger zusammen, ihre Quadrate kommen der Zahl 2 beliebig nahe, aber in $\mathbb{Q}$ gibt es nichts, dem sie zustreben. **Was ist die Zahl, gegen die diese Folge läuft, wenn es sie in $\mathbb{Q}$ nicht gibt?** Die Antwort dieser Einheit sieht zunächst wie ein Kunstgriff aus: Man erklärt die Folge selbst, genauer die Gesamtheit aller zu ihr gleichwertigen Folgen, zur neuen Zahl. Daraus entsteht ein angeordneter Körper $\mathbb{R}$, in dem jede solche Folge einen Grenzwert hat. Mit ihm sind die Anordnungsregeln aus Einheit 1 bewiesen, Wurzeln existieren, und es zeigt sich, dass sich $\mathbb{R}$, anders als $\mathbb{Q}$, nicht in eine Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ schreiben lässt, die jede reelle Zahl enthält.

Voraussetzungen. Wir setzen voraus, dass $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition, Multiplikation und Anordnung ein angeordneter Körper im Sinn von Definition 2.3 ist; positiv sind die Brüche p/q mit $p, q \in \mathbb{N}$. Wie $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ entsteht, zeigt Einheit 1 (Abschnitt 1.9, Aufgabe B5); die Nachprüfung der Axiome für $\mathbb{Q}$ führen wir nicht aus. Aus Einheit 1 benutzen wir die Peano-Axiome mit Rekursionssatz und Induktion, die Wohlordnung (Satz 1.16), das Rechnen in $\mathbb{Z}$ einschließlich der Tatsache, dass jede ganze Zahl entweder gerade oder ungerade ist, die Zählregeln für endliche Mengen aus Abschnitt 1.7, die Verneinungsregel (Regel 1.3) sowie Äquivalenzrelationen, Klasseneinteilung und Ordnungsbegriffe aus Abschnitt 1.9 (Satz 1.28). Weitere Voraussetzungen ohne Beweis sind an Ort und Stelle als solche gekennzeichnet; sie betreffen nur Ausblicke und Vorgriffe. Über $\mathbb{R}$ wird nichts vorausgesetzt; $\mathbb{R}$ wird in Abschnitt 2.4 konstruiert. Was Einheit 1 über reelle Zahlen bewiesen hat, benutzte nur Körperregeln und die Anordnungsregeln (O0)–(O6); es gilt deshalb, sobald diese für $\mathbb{R}$ bewiesen sind (Folgerung 2.26).

2.1 Körper und angeordnete Körper

Bevor man $\mathbb{R}$ baut, muss feststehen, was das Ergebnis leisten soll. Die Rechengesetze, die $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gemeinsam haben, fasst der folgende Begriff zusammen.

Definition 2.1. Ein *Körper* ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (Abbildungen $K \times K \to K$) und zwei Elementen $0 \neq 1$, so dass für alle $x, y, z \in K$ gilt:

- (K1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(xy)z = x(yz)$ (Assoziativität),
- (K2) $x + y = y + x$ und $xy = yx$ (Kommutativität),
- (K3) $x + 0 = x$ und $x \cdot 1 = x$ (neutrale Elemente),
- (K4) zu jedem x gibt es ein $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0$, und zu jedem $x \neq 0$ ein $x^{-1} \in K$ mit $xx^{-1} = 1$ (Inverse),
- (K5) $x(y + z) = xy + xz$ (Distributivität).

Man schreibt $x - y = x + (-y)$ und $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ für $y \neq 0$.

Beispiele. $\mathbb{Q}$ ist ein Körper. $\mathbb{Z}$ ist keiner, denn 2 hat in $\mathbb{Z}$ kein multiplikatives Inverses. Die Menge $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit $0+0 = 1+1 = 0$ und $0+1 = 1+0 = 1$ sowie $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$ ist ein Körper; die Axiome prüft man durch Einsetzen aller Fälle. Es sind die Rechenregeln für „gerade“ und „ungerade“.

Lemma 2.2 (Rechenregeln im Körper). In jedem Körper K gilt für alle $x, y \in K$:

1. Die Elemente 0, 1, $-x$ und, für $x \neq 0$, x^{-1} sind durch (K3) und (K4) eindeutig bestimmt.
2. $0 \cdot x = 0$.
3. $-(-x) = x$, $(-1)x = -x$ und $(-x)(-y) = xy$.
4. Aus $xy = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$ (Nullteilerfreiheit).
5. Für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ ist $xy \neq 0$ und $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.

Beweis. (1) Sind 0 und $0'$ neutral, so ist $0 = 0 + 0' = 0'$; ebenso für 1. Gilt $x + y = 0$ und $x + y' = 0$, so ist $y = y + (x + y') = (y + x) + y' = y'$. Für x^{-1} ebenso.

(2) $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$. Addiert man $-(0x)$ auf beiden Seiten, folgt $0 = 0x$.

(3) Wegen $(-x) + x = 0$ ist x nach (1) das Negative von $-x$. Wegen $x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0$ ist $(-1)x = -x$. Damit ist $(-1)(-1) = -(-1) = 1$ und $(-x)(-y) = (-1)(-1)xy = xy$.

(4) Ist $x \neq 0$, so ist $y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1} \cdot 0 = 0$.

(5) $xy \neq 0$ nach (4), und $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = (xx^{-1})(yy^{-1}) = 1$. □

Die übrigen Regeln der Bruchrechnung, etwa $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, die Regeln für endliche

Summen, Produkte und Potenzen aus Abschnitt 1.6 einschließlich der geometrischen Summe (Satz 1.13) sowie der Binomialsatz (Satz 1.20, Abschnitt 1.7) folgen ebenso aus (K1)–(K5). Sie gelten in jedem Körper; wir benutzen sie ohne Einzelnachweis. Für $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man $x^{-n} = (x^{-1})^n$. Nach Lemma 2.2 (5) und Induktion ist $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, und die Regeln $x^{m+n} = x^m x^n$ und $(xy)^n = x^n y^n$ gelten dann für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und $x, y \neq 0$.

Definition 2.3. Ein *angeordneter Körper* ist ein Körper K zusammen mit einer Teilmenge $P \subseteq K$, den *positiven* Elementen, so dass gilt:

- (Pos1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der Aussagen $x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$.
- (Pos2) Aus $x, y \in P$ folgt $x + y \in P$ und $xy \in P$.

Man setzt $x < y$, wenn $y - x \in P$, und $x \leq y$, wenn $x < y$ oder $x = y$; $y > x$ und $y \geq x$ bedeuten dasselbe. Insbesondere ist $P = \{x \in K : x > 0\}$.

Die Anordnung wird also nicht durch eine Liste von Regeln eingeführt, sondern durch die Angabe, welche Elemente positiv sind. Das ist sparsamer, und es ist genau die Form, in der sich die Anordnung von $\mathbb{R}$ in Abschnitt 2.4 definieren lässt.

Satz 2.4 (Anordnungsregeln). In jedem angeordneten Körper gelten die Regeln (O0)–(O6) aus Abschnitt 1.8, und $\leq$ ist eine totale Ordnung.

Beweisidee. Jede Regel ist eine Aussage über die Positivität einer Differenz; man schreibt die Differenz als Summe oder Produkt und wendet (Pos2) an.

Beweis. Lemma 2.2 wird ohne Hinweis benutzt, insbesondere $-(y - x) = x - y$.

(O0) Nach (Pos1), angewandt auf $y - x$, gilt genau eine der Aussagen $y - x \in P$, $y - x = 0$, $x - y \in P$, das heißt genau eine der Beziehungen $x < y$, $x = y$, $y < x$. Seien $x \leq y$ und $y \leq z$. Ist $x = y$ oder $y = z$, so ist $x \leq z$ klar. Andernfalls ist $z - x = (z - y) + (y - x) \in P$ nach (Pos2). Dasselbe Argument zeigt: Aus $x < y$ und $y \leq z$ folgt $x < z$, ebenso aus $x \leq y$ und $y < z$.

(O1) $(y + z) - (x + z) = y - x$.

(O2) Es ist $yz - xz = (y - x)z$. Sind $y - x$ und z positiv, so auch das Produkt; ist ein Faktor null, so ist das Produkt null (Lemma 2.2 (2)). Also gilt $xz \leq yz$. Ist $z \leq 0$, so ist $-z \geq 0$, nach dem eben Gezeigten $-xz \leq -yz$, und Addition von $xz + yz$ ergibt mit (O1) $yz \leq xz$.

(O3) Ist $x \in P$, so ist $x^2 \in P$ nach (Pos2); ist $-x \in P$, so ist $x^2 = (-x)(-x) \in P$. Also ist $x^2 > 0$ für $x \neq 0$, und $0^2 = 0$. Wegen $1 \neq 0$ folgt $1 = 1^2 > 0$.

(O4) wurde in Abschnitt 1.8 aus (O0) und (O1) hergeleitet.

(O5) Die Beweise von (O1) und (O2) gelten wörtlich mit P statt „P oder null“.

(O6) Sei $x > 0$. Dann ist $\frac{1}{x} \neq 0$, weil $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \neq 0$. Wäre $-\frac{1}{x} \in P$, so wäre auch

$x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \in P$; zugleich ist $1 \in P$ nach (O3), im Widerspruch zu (Pos1) für das Element 1. Also $\frac{1}{x} > 0$. Ist $0 < x \leq y$, so ist auch $\frac{1}{y} > 0$, und

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = (y - x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \geq 0$$

nach (O2), sogar > 0 nach (O5), falls $x < y$.

Totale Ordnung: Die Relation $\leq$ ist reflexiv nach Definition und transitiv nach (O0). Sie ist antisymmetrisch, denn aus $x \leq y$, $y \leq x$ und $x \neq y$ folgten $x < y$ und $y < x$ zugleich, was (O0) ausschließt. Sie ist total, weil stets $x < y$, $x = y$ oder $y < x$ gilt. Die zugehörige strikte Ordnung im Sinn von Abschnitt 1.9 ist $<$. □

Folgerung 2.5. In einem angeordneten Körper sei $n \cdot 1 = 1 + \cdots + 1$ mit n Summanden. Dann gilt $n \cdot 1 \geq 1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und aus $m < n$ folgt $m \cdot 1 < n \cdot 1$. Insbesondere ist $2 = 1 + 1 \neq 0$, und ein angeordneter Körper hat unendlich viele Elemente.

Beweis. Für jedes x ist $x < x + 1$, denn $(x + 1) - x = 1 > 0$. Durch Induktion folgt $1 \leq n \cdot 1$ für alle n: Für $n = 1$ ist das klar, und aus $1 \leq n \cdot 1$ folgt $1 \leq n \cdot 1 < (n + 1) \cdot 1$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $n \geq m + 1$ zeigen wir $m \cdot 1 < n \cdot 1$ durch Induktion mit Anfang $m + 1$: Für $n = m + 1$ ist das eben Gezeigte. Aus $m \cdot 1 < n \cdot 1$ folgt mit $n \cdot 1 < (n + 1) \cdot 1$ nach (O0) auch $m \cdot 1 < (n + 1) \cdot 1$. Also ist $n \mapsto n \cdot 1$ injektiv.

Allgemein ist keine Menge X endlich, in die sich $\mathbb{N}$ injektiv abbilden lässt. Hätte X genau p Elemente und wäre $f : \mathbb{N} \to X$ injektiv, so wäre f eine Bijektion von $\{1, \ldots, p + 1\}$ auf die Teilmenge $f(\{1, \ldots, p+1\})$. Diese hätte also $p+1$ Elemente. Eine Teilmenge von X hat aber höchstens p Elemente, und die Anzahl ist eindeutig (Zählregeln aus Abschnitt 1.7). □

Der Körper $\mathbb{F}_2$ lässt sich also nicht anordnen, denn dort ist $1 + 1 = 0$.

Definition 2.6. Sei K ein angeordneter Körper. Der *Betrag* von $x \in K$ ist $|x| = x$ für $x \geq 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$.

Der Betrag ist eine Abbildung $K \to K$; seine Werte liegen in K selbst, für $K = \mathbb{Q}$ also in $\mathbb{Q}$. Für $K = \mathbb{R}$ ist das Definition 1.22. Was Abschnitt 1.8 aus den Regeln (O0)–(O6) gefolgert hat, gilt in jedem angeordneten Körper mit denselben Beweisen, denn diese benutzen nur (O0)–(O6) und Fallunterscheidungen nach (O0): $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ nur für $x = 0$, $|xy| = |x|\,|y|$, $-|x| \leq x \leq |x|$, $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$, die Dreiecksungleichung (Satz 1.23), die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24) und Satz 1.25. Dabei ist nx für $n \in \mathbb{N}_0$ als $(n \cdot 1)x$ zu lesen. Der Beweis von Satz 1.24 benutzt $n \cdot 1 \geq 0$, der von Satz 1.25 die Division durch $4 = (1 + 1)^2 \neq 0$; beides liefert Folgerung 2.5. Insbesondere hat $d(x, y) = |x - y|$ die drei Eigenschaften aus dem Ausblick in Abschnitt 1.8, mit Werten in K. Der Betrag komplexer Zahlen in Einheit 3 ist anders gebaut: $\mathbb{C}$ lässt sich nicht anordnen, und $|z|$ ist eine reelle Zahl.

Wie verhalten sich zwei angeordnete Körper zueinander? Der passende Vergleichsbegriff ist eine Abbildung, die alle Strukturen mitnimmt.

Definition 2.7. Seien K und L angeordnete Körper. Eine Abbildung $\varphi\colon K \to L$ heißt *Homomorphismus angeordneter Körper*, wenn für alle $x, y \in K$ gilt: $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\varphi(1) = 1$, und aus $x < y$ folgt $\varphi(x) < \varphi(y)$. Ein bijektiver Homomorphismus angeordneter Körper heißt *Isomorphismus*; K und L heißen dann *isomorph*.

Ein solcher Homomorphismus ist injektiv: Aus $x \neq y$ folgt nach (O0) $x < y$ oder $y < x$, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Wegen $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)+\varphi(0)$ ist $\varphi(0) = 0$. Daraus folgen $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, denn $\varphi(x)+\varphi(-x) = \varphi(0) = 0$, ferner $\varphi(x-y) = \varphi(x)-\varphi(y)$ und, für $x \neq 0$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$, denn $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(1) = 1$. Umgekehrt folgt aus $\varphi(x) < \varphi(y)$ auch $x < y$: Sonst wäre $x = y$ oder $y < x$, also $\varphi(x) = \varphi(y)$ oder $\varphi(y) < \varphi(x)$, im Widerspruch zu (O0). Schließlich ist $|\varphi(x)| = \varphi(|x|)$: Für $x \geq 0$ ist $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, für $x < 0$ ist $\varphi(x) < 0$ und $|\varphi(x)| = -\varphi(x) = \varphi(-x) = \varphi(|x|)$. Die Umkehrabbildung eines Isomorphismus ist wieder ein Isomorphismus: Additivität und Multiplikativität überträgt man durch Anwenden von φ, die Anordnung nach dem eben Gezeigten.

Lemma 2.8 ($\mathbb{Q}$ in jedem angeordneten Körper). Sei K ein angeordneter Körper. Es gibt genau eine Abbildung $j\colon \mathbb{Q} \to K$ mit $j(r+s) = j(r)+j(s)$ und $j(rs) = j(r)j(s)$ für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ und $j(1) = 1$. Sie ist ein Homomorphismus angeordneter Körper.

Beweisidee. Man bildet n auf $n\cdot 1$ ab, dann negative Zahlen auf die Negativen und Brüche auf Quotienten. Die Rechenregeln überträgt man Schritt für Schritt; die Positivität liefert Folgerung 2.5.

Beweis. Auf $\mathbb{N}$. Nach dem Rekursionssatz sei $j(1) = 1$ und $j(n+1) = j(n)+1$, also $j(n) = n\cdot 1$. Durch Induktion über n folgen $j(m+n) = j(m)+j(n)$ und $j(mn) = j(m)j(n)$; der Schritt lautet $j(m+n+1) = j(m+n)+1 = j(m)+j(n)+1 = j(m)+j(n+1)$ und $j(m(n+1)) = j(mn)+j(m) = j(m)\big(j(n)+1\big) = j(m)j(n+1)$. Nach Folgerung 2.5 ist $j(n) > 0$, und aus $m < n$ folgt $j(m) < j(n)$.

Auf $\mathbb{Z}$. Setze $j(0) = 0$ und $j(-n) = -j(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $j(-z) = -j(z)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$, und die Additivität gilt für Summanden aus $\mathbb{N}_0$. Sind $m, n \leq 0$, so folgt sie durch Übergang zu $-m, -n$. Sei etwa $m > 0 > n$. Ist $m+n \geq 0$, so ist $m = (m+n)+(-n)$ mit zwei Summanden aus $\mathbb{N}_0$, also $j(m) = j(m+n)-j(n)$. Ist $m+n < 0$, so ist $-n = (-(m+n))+m$ mit zwei Summanden aus $\mathbb{N}_0$, also $-j(n) = -j(m+n)+j(m)$. In beiden Fällen ist $j(m+n) = j(m)+j(n)$. Die Multiplikativität folgt aus dem Fall in $\mathbb{N}$ mit $j(-z) = -j(z)$ und Lemma 2.2 (3); ist ein Faktor null, so sind beide Seiten null. Aus $m < n$ in $\mathbb{Z}$ folgt $n-m \in \mathbb{N}$, also $j(n)-j(m) = j(n-m) > 0$.

Auf $\mathbb{Q}$. Schreibe $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und setze $j(r) = j(p)\,j(q)^{-1}$; das ist erlaubt wegen $j(q) > 0$. Die Definition hängt nicht von der Darstellung ab: Aus $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ folgt

$pq' = p'q$, also $j(p)j(q') = j(p')j(q)$, und Division durch $j(q)j(q')$ ergibt $j(p)j(q)^{-1} = j(p')j(q')^{-1}$. Für $q = 1$ erhält man die Werte auf $\mathbb{Z}$. Mit $r = \frac{p}{q}$ und $s = \frac{p'}{q'}$ ist $r + s = \frac{pq'+p'q}{qq'}$ und $rs = \frac{pp'}{qq'}$; die Regeln auf $\mathbb{Z}$ und die Bruchrechnung in K ergeben daraus $j(r + s) = j(r) + j(s)$ und $j(rs) = j(r)j(s)$. Ist $r = \frac{p}{q} > 0$, so ist $p = qr > 0$, also $p \in \mathbb{N}$ und $j(r) = j(p)\, j(q)^{-1} > 0$ nach (O6) und (Pos2). Aus $r < s$ folgt daher $j(s) - j(r) = j(s - r) > 0$.

Eindeutigkeit. Erfüllt $f : \mathbb{Q} \to K$ dieselben drei Gleichungen, so ist $f(0) = 0$ wie nach Definition 2.7, durch Induktion $f(n) = n \cdot 1 = j(n)$, und $f(-n) = -f(n)$. Für $q \in \mathbb{N}$ ist $f(q)f(\frac{1}{q}) = f(1) = 1$, also $f(\frac{p}{q}) = f(p)f(q)^{-1} = j(\frac{p}{q})$. □

Man schreibt deshalb in jedem angeordneten Körper oft r statt $j(r)$, insbesondere n statt $n \cdot 1$ und $\frac{1}{n}$ statt $\frac{1}{n\cdot 1}$. Für $K = \mathbb{R}$ ist j die Einbettung aus Satz 2.28.

2.2 Die Lücke in $\mathbb{Q}$

Satz 2.9. Es gibt keine rationale Zahl r mit $r^2 = 2$.

Beweis. Angenommen, $r \in \mathbb{Q}$ und $r^2 = 2$. Die Menge $\{q \in \mathbb{N} : qr \in \mathbb{Z}\}$ ist nicht leer und hat nach Satz 1.16 ein kleinstes Element q; sei $p = qr \in \mathbb{Z}$. Aus $r^2 = 2$ folgt $p^2 = 2q^2$. Also ist p^2 gerade und nach dem Beispiel in Abschnitt 1.3 auch p, etwa $p = 2p'$ mit $p' \in \mathbb{Z}$. Dann ist $4p'^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2p'^2$ gerade und damit auch $q = 2q'$ mit $q' \in \mathbb{N}$. Nun ist $q'r = p/2 = p' \in \mathbb{Z}$ und $q' < q$, im Widerspruch zur Wahl von q. □

Für sich genommen sagt Satz 2.9 nur, dass eine bestimmte Gleichung in $\mathbb{Q}$ unlösbar ist; das gilt für $x^2 = -1$ in jedem angeordneten Körper auch. Der eigentliche Mangel zeigt sich erst an der Anordnung.

Definition 2.10. Sei K ein angeordneter Körper und $A \subseteq K$. Ein $s \in K$ heißt *obere Schranke* von A, wenn $a \leq s$ für alle $a \in A$ gilt; A heißt *nach oben beschränkt*, wenn es eine obere Schranke gibt. Ein $s \in K$ heißt *Supremum* von A, geschrieben $s = \sup A$, wenn s obere Schranke von A ist und $s \leq t$ für jede obere Schranke t von A gilt. Liegt $\sup A$ in A, so heißt es *Maximum* von A. Entsprechend erklärt man *untere Schranke*, *nach unten beschränkt*, *Infimum* $\inf A$ (größte untere Schranke) und *Minimum*. A heißt *beschränkt*, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist. Der Körper K hat die *Supremumseigenschaft*, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von K ein Supremum in K besitzt.

Definition 2.10 ist der Sonderfall der Begriffe aus Abschnitt 1.9 für die totale Ordnung $\leq$ (Satz 2.4). Insbesondere gibt es höchstens ein Supremum. Ein Supremum braucht kein Maximum zu sein: In $\mathbb{Q}$ hat $A = \{x : 0 \leq x < 1\}$ die obere Schranke 1, und jedes $t < 1$ ist keine obere Schranke, denn für $t < 0$ liegt $0 \in A$ über t, für $0 \leq t < 1$ liegt $\frac{t+1}{2} \in A$

über t. Also ist $\sup A = 1 \notin A$.

Hilfsaussage (Quadrate). In einem angeordneten Körper gilt für $a, b \geq 0$: Aus $a < b$ folgt $a^2 < b^2$, denn $a^2 \leq ab < b^2$ nach (O2) und (O5). Mit (O0) folgt umgekehrt aus $a^2 < b^2$, dass $a < b$.

Satz 2.11. Die Menge $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0,\ x^2 < 2\}$ ist nicht leer und nach oben beschränkt, besitzt aber in $\mathbb{Q}$ kein Supremum. Insbesondere hat $\mathbb{Q}$ nicht die Supremumseigenschaft.

Beweisidee. Ein Supremum s müsste $s^2 = 2$ erfüllen: Wäre $s^2 < 2$, so läge ein etwas größeres Element noch in A; wäre $s^2 > 2$, so wäre ein etwas kleineres Element noch obere Schranke. Wie viel „etwas“ ist, rechnet man rückwärts aus. Gesucht ist $h > 0$ mit $2sh + h^2 < 2 - s^2$. Für $h \leq 1$ ist $h^2 \leq h$, und es genügt $h(2s + 1) \leq 2 - s^2$; Gleichheit $(s + h)^2 = 2$ schließt Satz 2.9 aus. Für die Verkleinerung $s - k$ im Fall $s^2 > 2$ lässt man $k^2 \geq 0$ weg und verlangt $2sk \leq s^2 - 2$. Dieselbe Rechnung trägt später den Beweis von Satz 2.39.

Beweis. Es ist $1 \in A$. Die Zahl 2 ist obere Schranke: Aus $x > 2$ folgt $x^2 > 4 > 2$ nach der Hilfsaussage. Angenommen, $s \in \mathbb{Q}$ ist ein Supremum von A. Dann ist $s \geq 1$, und nach Satz 2.9 ist $s^2 \neq 2$.

Fall $s^2 < 2$. Setze $h = \min\{1, \ \frac{2-s^2}{2s+1}\}$; dann ist $h \in \mathbb{Q}$ und $0 < h \leq 1$, also $h^2 \leq h$. Es folgt

$$(s + h)^2 = s^2 + 2sh + h^2 \leq s^2 + h(2s + 1) \leq s^2 + (2 - s^2) = 2.$$

Nach Satz 2.9 ist $(s + h)^2 \neq 2$, also $(s + h)^2 < 2$ und $s + h \in A$. Wegen $s + h > s$ ist s keine obere Schranke, ein Widerspruch.

Fall $s^2 > 2$. Setze $k = \frac{s^2-2}{2s} > 0$. Dann ist $s - k = \frac{s^2+2}{2s} > 0$ und

$$(s - k)^2 = s^2 - 2sk + k^2 = 2 + k^2 > 2.$$

Ist $x \in A$ mit $x > s - k$, so folgt nach der Hilfsaussage $x^2 > (s - k)^2 > 2$, unmöglich. Also ist $s - k$ eine obere Schranke von A, und $s - k < s$ widerspricht der Wahl von s. □

Die Lücke liegt also nicht an der speziellen Gleichung, sondern daran, dass eine beschränkte Menge rationaler Zahlen keine kleinste obere Schranke haben muss. Diese Lücke soll $\mathbb{R}$ schließen.

Intervalle. In einem angeordneten Körper K erklärt man für $a, b \in K$ die Intervalle $[a, b] = \{x \in K : \ a \leq x \leq b\}$, $(a, b) = \{x \in K : \ a < x < b\}$, $[a, b) = \{x \in K : \ a \leq x < b\}$ und $(a, b] = \{x \in K : \ a < x \leq b\}$, ferner $[a, \infty) = \{x \in K : \ x \geq a\}$, $(a, \infty) = \{x \in K : \ x > a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in K : \ x \leq b\}$, $(-\infty, b) = \{x \in K : \ x < b\}$ und $(-\infty, \infty) = K$. Die Zeichen $\pm\infty$ sind hier keine Elemente von K. Es ist $[a, a] = \{a\}$ und $(a, a) = \varnothing$; für $a > b$ sind alle vier beschränkten Intervalle leer. Für $K = \mathbb{R}$ enthält diese Liste die in Einheit 1 erklärten Intervalle, dort für $a \leq b$.

Jedes Intervall enthält mit zwei Punkten alle Punkte dazwischen. In $\mathbb{R}$ gilt auch die Umkehrung (Einheit 7, Lemma 7.18; Vorgriff, der Beweis braucht die Supremumseigenschaft). In $\mathbb{Q}$ gilt sie nicht. Die Menge $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0,\ x^2 < 2\}$ aus Satz 2.11 enthält mit $x < y$ jedes rationale z mit $x < z < y$ (Hilfsaussage), ist aber kein Intervall von $\mathbb{Q}$. Als nichtleere, nach oben beschränkte Menge könnte sie nur ein Intervall mit einem rechten Randpunkt $b \in \mathbb{Q}$ sein. Dann wäre b ihr Supremum: b ist obere Schranke; ist $t < b$ und $x \in A$, so liegt im Fall $x = b$ das Element x über t, und sonst liegt der Mittelpunkt von $\max\{t, x\}$ und b über t und zwischen x und b, also in A. Das widerspricht Satz 2.11.

2.3 Folgen in angeordneten Körpern

Die Konstruktion braucht Folgen rationaler Zahlen und drei Arten von Hilfssätzen. Lemma 2.15 sorgt dafür, dass Summe und Produkt von Cauchy-Folgen wieder Cauchy-Folgen sind; Lemma 2.16 liefert die Regeln für Nullfolgen, auf denen Gleichwertigkeit und Wohldefiniertheit beruhen, und Grenzwertregeln, die ab Abschnitt 2.5 in $\mathbb{R}$ gebraucht werden; Lemma 2.17 ist das Werkzeug für Inverse und Anordnung. Wir führen die Begriffe gleich in einem beliebigen angeordneten Körper ein, weil sie danach in $\mathbb{R}$ wörtlich wieder gebraucht werden. Zuerst wird der Begriff erklärt, der Lemma 2.13 und Satz 2.29 den Namen gibt.

Definition 2.12. Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch*, wenn es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot 1 > x$ gibt, wenn also $\{n \cdot 1 : \ n \in \mathbb{N}\}$ in K nicht nach oben beschränkt ist.

Ist K archimedisch, so gibt es zu jedem $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$: Man wählt $n > \frac{1}{\varepsilon}$ und wendet (O6) an. Weitere gleichwertige Fassungen stehen in Einheit 5 (Lemma 5.4). Dass nicht jeder angeordnete Körper archimedisch ist, zeigt Einheit 5, (G2) (Vorgriff).

Lemma 2.13 ($\mathbb{Q}$ ist archimedisch). Zu jedem $r \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > r$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Schreibe $r = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Ist $p \leq 0$, so ist $r \leq 0 < 1$. Ist $p > 0$, so ist $\frac{1}{q} \leq 1$ nach (O6), also $r = p \cdot \frac{1}{q} \leq p < p + 1$ nach (O2). Zum zweiten Teil wähle $n > \frac{1}{\varepsilon}$; nach der strengen Form von (O6) ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Definition 2.14. Sei K ein angeordneter Körper. Eine *Folge* in K ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to K$, $n \mapsto a_n$, geschrieben (a_n). Summe und Produkt zweier Folgen werden gliedweise gebildet: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n)(b_n) = (a_n b_n)$. Die Folge (a_n) heißt

- *beschränkt*, wenn es ein $C \in K$ mit $|a_n| \leq C$ für alle n gibt,
- *konvergent gegen* $a \in K$, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \ |a_n - a| < \varepsilon$; man schreibt $a_n \to a$,
- *Nullfolge*, wenn $a_n \to 0$,
- *Cauchy-Folge*, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N : \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Dabei durchläuft ε die positiven Elemente von K. Die Begriffe hängen also von dem Körper ab, in dem man die Folge liest; wir schreiben $\mathcal{C}(K)$ und $\mathcal{N}(K)$ für die Mengen der Cauchy-Folgen und der Nullfolgen in K. „Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$“ verlangt die Bedingung für alle rationalen $\varepsilon > 0$. Sobald $\mathbb{R}$ konstruiert ist, ist eine rationale Folge auch eine Folge in $\mathbb{R}$, und „Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$“ verlangt die Bedingung für alle reellen $\varepsilon > 0$. Dass beides dasselbe bedeutet, ist nicht selbstverständlich; es folgt aus der archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (Bemerkung nach Satz 2.29). In einem nicht archimedischen angeordneten Körper K gibt es nämlich ein $t > 0$ mit $t < \frac{1}{n}$ für alle n: Ist c eine obere Schranke von $\{n \cdot 1 : \ n \in \mathbb{N}\}$, so ist $c \geq 1 > 0$, und aus $n+1 \leq c$ folgt $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ nach (O6); also leistet $t = \frac{1}{c}$ das Verlangte. Dort erfüllt $(\frac{1}{n})$ die Nullfolgenbedingung für alle $\varepsilon > 0$ aus dem Bild von $\mathbb{Q}$ (Lemma 2.8), denn $\frac{1}{n}$ ist schließlich kleiner als jede positive rationale Zahl, aber nicht für $\varepsilon = t$.

Konvergenz verlangt, einen Grenzwert a anzugeben. Die Cauchy-Bedingung spricht nur über die Glieder selbst: Ab einer Stelle liegen je zwei beliebig nahe beieinander. Genau dieser Unterschied trennt $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$. Die Cauchy-Bedingung trägt den Namen von Augustin-Louis Cauchy. Einheit 4 nimmt beide Begriffe für Folgen in $\mathbb{R}$ ausführlich wieder auf.

Lemma 2.15 (Cauchy-Folgen). Sei K ein angeordneter Körper.

1. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
2. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt, insbesondere jede konvergente Folge.
3. Mit (a_n) und (b_n) sind auch $(a_n + b_n)$, $(-a_n)$ und $(a_n b_n)$ Cauchy-Folgen.

Beweis. (1) Sei $a_n \to a$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt N mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$. Für $m, n \geq N$ folgt $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$.

(2) Zu $\varepsilon = 1$ gibt es N mit $|a_n - a_N| < 1$ für $n \geq N$, also $|a_n| \leq |a_N| + 1$ nach Satz 1.23. Sei $C = 1 + \sum_{k=1}^{N} |a_k|$. Alle Summanden sind ≥ 0; nach (O4) ist deshalb $|a_n| \leq C$ für $n \leq N$ und $|a_n| \leq |a_N| + 1 \leq C$ für $n \geq N$.

(3) Es ist $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m|$; man wählt N so, dass beide Differenzen für $m, n \geq N$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind. Für $(-a_n)$ ist nichts zu zeigen. Für das Produkt seien nach (2) C_a und C_b Schranken von $|a_n|$ und $|b_n|$, und sei $C = C_a + C_b + 1$;

dann ist $C > 0$, $|a_n| \le C$ und $|b_n| \le C$ für alle n. Einschieben einer Null ergibt

$$a_n b_n - a_m b_m = a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m), \qquad |a_n b_n - a_m b_m| \le C\,|b_n - b_m| + C\,|a_n - a_m|.$$

Man wählt N so, dass beide Differenzen für $m, n \ge N$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2C}$ sind. □

Lemma 2.16 (Nullfolgen und Grenzwerte). Seien (a_n), (b_n) Folgen in einem angeordneten Körper K.

1. Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert; man schreibt ihn $\lim_{n\to\infty} a_n$.
2. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, so auch $(a_n + b_n)$. Ist (a_n) Nullfolge und (b_n) beschränkt, so ist $(a_n b_n)$ Nullfolge. Ist (a_n) Nullfolge und $|b_n| \le |a_n|$ für alle $n \ge N_0$, so ist (b_n) Nullfolge.
3. Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n b_n \to ab$.
4. Gilt $a_n \to a$ und $a_n \le c$ für alle $n \ge N_0$, so ist $a \le c$. Ebenso folgt $a \ge c$ aus $a_n \ge c$ für $n \ge N_0$.
5. Aus $a_n \to a$ folgt $|a_n| \to |a|$.

Beweis. (1) Gelte $a_n \to a$ und $a_n \to a'$ mit $a \ne a'$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - a'| > 0$ gibt es ein n mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - a'| < \varepsilon$; dann ist $|a - a'| < 2\varepsilon = |a - a'|$, ein Widerspruch.

(2) Die Summe behandelt man wie in Lemma 2.15 (3). Ist $|b_n| \le C$ für alle n, so auch $|b_n| \le C + 1$ mit $C + 1 \ge 1 > 0$; man darf also $C > 0$ annehmen. Ist $|a_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ für $n \ge N$, so ist $|a_n b_n| < \varepsilon$ für $n \ge N$. Die letzte Aussage ist klar.

(3) $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$ ist nach (2) eine Nullfolge. Ferner ist $a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$. Die Folge (a_n) ist nach Lemma 2.15 (2) beschränkt, die konstante Folge (b) auch; nach (2) sind beide Summanden und damit ihre Summe Nullfolgen.

(4) Angenommen, $a > c$. Für $\varepsilon = a - c$ gibt es N mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N$. Für $n \ge \max\{N, N_0\}$ ist dann $a_n > a - \varepsilon = c$, ein Widerspruch. Die zweite Aussage folgt durch Übergang zu $(-a_n)$.

(5) Nach Satz 1.23 ist $\big||a_n| - |a|\big| \le |a_n - a|$; man wendet (2) an. □

In (4) darf man $\le$ nicht durch $<$ ersetzen: In $\mathbb{Q}$ sind alle Glieder von $(\frac{1}{n})$ positiv, nach Lemma 2.13 ist der Grenzwert aber 0. Diese Beobachtung kehrt bei der Anordnung von $\mathbb{R}$ als (G3) wieder.

Der folgende Hilfssatz ist der Kern der ganzen Konstruktion. Er besagt: Eine Cauchy-Folge, die keine Nullfolge ist, bleibt schließlich auf einer Seite der Null, und zwar mit festem Abstand.

Lemma 2.17 (Trennungslemma). Sei (a_n) eine Cauchy-Folge in K, die keine Nullfolge ist. Dann gibt es $\delta \in K$ mit $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass entweder $a_n \geq \delta$ für alle $n \geq N$ oder $a_n \leq -\delta$ für alle $n \geq N$ gilt.

Beweis. Nach Regel 1.3 heißt „keine Nullfolge“: Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem N ein $n \geq N$ mit $|a_n| \geq \varepsilon$ existiert. Zu diesem ε gibt es nach der Cauchy-Bedingung ein N mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Wähle $m \geq N$ mit $|a_m| \geq \varepsilon$. Ist $a_m \geq \varepsilon$, so gilt für alle $n \geq N$

$$a_n = a_m + (a_n - a_m) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist $a_m \leq -\varepsilon$, so folgt ebenso $a_n < -\frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$. Mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ist die Behauptung bewiesen. □

Satz 2.18 (Heron-Folge). Die Folge $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$ ist wohldefiniert, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit $e_n = x_n^2 - 2$:

1. $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \geq 1$ und $0 \leq e_n \leq 2 \cdot 4^{1-n}$,
2. $0 \leq x_n - x_m \leq 4^{1-n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $m \geq n$.

Insbesondere ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert.

Beweis. (1) Für $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 0$ ist auch $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2}{2x}$ rational und positiv. Nach dem Rekursionssatz, angewandt auf $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ und $\varphi : A \to A$, ist die Folge wohldefiniert, und alle x_n sind rational und positiv. Eine kurze Rechnung ergibt

$$e_{n+1} = \frac{(x_n^2+2)^2 - 8x_n^2}{4x_n^2} = \frac{(x_n^2-2)^2}{4x_n^2} = \frac{e_n^2}{4x_n^2} \geq 0,$$

und mit $e_1 = 2$ ist $e_n \geq 0$ für alle n.

Aus $x_n > 0$ und $x_n^2 \geq 2 > 1$ folgt $x_n \geq 1$ (Hilfsaussage in Abschnitt 2.2). Wegen $4x_n^2 \geq 8$ ist $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{8}$. Ist $e_n \leq 2 \cdot 4^{1-n} \leq 2$, so folgt $e_{n+1} \leq e_n \cdot \frac{e_n}{8} \leq \frac{e_n}{4} \leq 2 \cdot 4^{-n}$; mit $e_1 = 2$ ergibt das die Schranke durch Induktion.

(2) Es ist $x_{n+1} - x_n = \frac{2-x_n^2}{2x_n} = -\frac{e_n}{2x_n} \leq 0$; die Folge fällt, also $x_m \leq x_n$ für $m \geq n$. Ferner ist

$$x_n - x_m = \frac{x_n^2 - x_m^2}{x_n + x_m} = \frac{e_n - e_m}{x_n + x_m} \leq \frac{e_n}{2} \leq 4^{1-n},$$

weil $e_m \geq 0$ und $x_n + x_m \geq 2$. Nach Bernoulli ist $4^{n-1} = (1+3)^{n-1} \geq 1 + 3(n-1) \geq n$, also $4^{1-n} \leq \frac{1}{n}$.

Cauchy-Folge: Zu $\varepsilon > 0$ in $\mathbb{Q}$ wähle N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (Lemma 2.13). Für $m \geq n \geq N$ ist $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Keine Konvergenz in $\mathbb{Q}$: Wegen $0 \le e_n \le \frac{2}{n}$ ist (e_n) nach Lemma 2.13 und Lemma 2.16 (2) eine Nullfolge, also $x_n^2 \to 2$. Gälte $x_n \to a \in \mathbb{Q}$, so nach Lemma 2.16 (3) auch $x_n^2 \to a^2$, und nach Lemma 2.16 (1) wäre $a^2 = 2$, im Widerspruch zu Satz 2.9. □

2.4 Konstruktion der reellen Zahlen

Die Heron-Folge „sollte“ einen Grenzwert haben und hat keinen. Die Konstruktion nimmt diese Feststellung beim Wort: Die fehlende Zahl wird durch die Folge selbst vertreten. Weil viele verschiedene Folgen denselben Punkt einkreisen, etwa die Heron-Folge und dieselbe Folge mit verändertem ersten Glied, fasst man gleichwertige Folgen zu Klassen zusammen, nach dem Verfahren aus Abschnitt 1.9.

Man könnte $\mathbb{R}$ auch durch Axiome beschreiben: ein angeordneter Körper, in dem jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum hat. Solche Axiome sagen aber nur, was $\mathbb{R}$ leisten soll, nicht, dass es einen solchen Körper gibt. Die Konstruktion zeigt, dass es ihn gibt, sofern es $\mathbb{Q}$ gibt; dass es bis auf Isomorphie nur einen gibt, zeigt Satz 2.41 zusammen mit einem Vorgriff auf Einheit 5 (Absatz nach Satz 2.41). Die Konstruktion hat fünf Schritte:

1. Die Menge der rationalen Cauchy-Folgen wird durch eine Äquivalenzrelation zerlegt; die Klassen sind die reellen Zahlen (Definition 2.19 bis Definition 2.21).
2. Summe und Produkt werden gliedweise gebildet; zu zeigen ist, dass das Ergebnis nicht vom Vertreter abhängt (Satz 2.22).
3. Die Körperaxiome übertragen sich gliedweise; nur das Inverse braucht das Trennungslemma (Satz 2.23).
4. Positiv heißt eine Klasse, deren Folgen schließlich oberhalb einer festen positiven Schranke bleiben (Definition 2.24, Satz 2.25).
5. $\mathbb{Q}$ wird als Teil von $\mathbb{R}$ wiedergefunden (Satz 2.28).

Dass sich der Aufwand lohnt, zeigen erst die Abschnitte 2.5 und 2.6: Im neuen Körper hat jede Cauchy-Folge einen Grenzwert.

Warum gerade Cauchy-Folgen? Die neue Zahl soll durch Folgen rationaler Zahlen gegeben werden, die einen Grenzwert haben *sollten*. Konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$ kommen dafür nicht in Frage: Ihr Grenzwert liegt bereits in $\mathbb{Q}$, Neues entsteht so nicht. Die Bedingung muss also ohne Grenzwert auskommen und nur über die Glieder sprechen; das leistet die Cauchy-Bedingung, und nach Lemma 2.15 (1) erfasst sie die konvergenten Folgen mit. Ein anderer naheliegender Weg sind unendliche Dezimalbrüche. Er führt ebenfalls zum Ziel, ist aber unbequem: 0,999 … und 1,000 … müssen als gleich erklärt werden (Beispiel 1 in Abschnitt 2.9), und beim Addieren und Multiplizieren kann ein Übertrag von beliebig weit hinten liegenden Stellen kommen. Cauchy-Folgen dagegen

addiert und multipliziert man gliedweise (Lemma 2.15 (3)). Die ganze Schwierigkeit verlagert sich in die Frage, wann zwei Folgen dieselbe Zahl darstellen.

Definition 2.19. Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ und $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{Q})$ die Menge der rationalen Nullfolgen, jeweils mit rationalem ε; nach Lemma 2.15 (1) ist $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$. Für $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}$ sei $(a_n) \sim (b_n)$, wenn $(a_n - b_n) \in \mathcal{N}$.

Lemma 2.20. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$.

Beweis. Reflexiv: $(a_n - a_n)$ ist die Nullfolge (0). Symmetrisch: $|b_n - a_n| = |a_n - b_n|$. Transitiv: Aus $(a_n - b_n), (b_n - c_n) \in \mathcal{N}$ folgt $(a_n - c_n) = (a_n - b_n) + (b_n - c_n) \in \mathcal{N}$ nach Lemma 2.16 (2). □

Ein Beispiel zeigt, warum man gerade diese Gleichwertigkeit wählt. Mit der Heron-Folge (x_n) ist auch $y_n = \frac{2}{x_n}$ eine rationale Folge, und wegen $x_n y_n = 2$ nähert sie sich derselben Stelle von der anderen Seite:

$$y_2 = \frac{4}{3} < x_2 = \frac{3}{2}, \qquad y_3 = \frac{24}{17} < x_3 = \frac{17}{12}, \qquad x_3 - y_3 = \frac{1}{204}.$$

Allgemein ist $x_n - y_n = \frac{x_n^2 - 2}{x_n} = \frac{e_n}{x_n}$ mit e_n aus Satz 2.18. Nach Satz 2.9 ist $e_n \neq 0$, also $y_n < x_n$ für jedes n, und wegen $x_n \geq 1$ ist $0 < x_n - y_n \leq e_n \leq \frac{2}{n}$. Nach Lemma 2.13 und Lemma 2.16 (2) ist $(x_n - y_n)$ deshalb eine Nullfolge, und $(y_n) = (x_n) - (x_n - y_n)$ ist nach Lemma 2.15 (1) und (3) eine Cauchy-Folge. Die beiden Folgen stimmen an keiner Stelle überein; „ab einer Stelle gleich" wäre als Gleichwertigkeit zu grob. Ihre Differenz ist aber eine Nullfolge. Das ist die Fassung von „sie hätten denselben Grenzwert", die ohne den Grenzwert auskommt: Für zwei in $\mathbb{Q}$ konvergente Folgen ist $(a_n - b_n)$ nach Lemma 2.16 (1) und (3) genau dann eine Nullfolge, wenn ihre Grenzwerte übereinstimmen.

Definition 2.21. Die Menge der *reellen Zahlen* ist die Quotientenmenge $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$. Die Klasse von (a_n) wird mit $[a_n]$ bezeichnet. Für $r \in \mathbb{Q}$ sei $\iota(r) = [r]$ die Klasse der konstanten Folge $(r, r, r, \dots)$.

Eine reelle Zahl ist hier weder eine Ziffernfolge noch ein Punkt auf einer Geraden, sondern eine Gesamtheit rationaler Folgen, die sich gegenseitig beliebig nahe kommen. Nach Satz 1.28 ist $[a_n] = [b_n]$ genau dann, wenn $(a_n - b_n)$ eine Nullfolge ist. Die Konstruktion benutzt nur Begriffe über $\mathbb{Q}$; Grenzwerte in $\mathbb{R}$ gibt es noch nicht.

Satz 2.22 (Wohldefiniertheit). Durch

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n], \qquad [a_n] \cdot [b_n] = [a_n b_n]$$

sind Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ erklärt.

Beweis. Die rechten Seiten sind Klassen von Cauchy-Folgen nach Lemma 2.15 (3). Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von den Repräsentanten (Bemerkung in Abschnitt 1.9). Seien $(a_n) \sim (a'_n)$ und $(b_n) \sim (b'_n)$. Dann ist $(a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) = (a'_n - a_n) + (b'_n - b_n)$ eine Nullfolge nach Lemma 2.16 (2). Für das Produkt schiebt man eine Null ein:

$$a'_n b'_n - a_n b_n = a'_n(b'_n - b_n) + b_n(a'_n - a_n).$$

Die Folgen (a'_n) und (b_n) sind Cauchy-Folgen, also beschränkt (Lemma 2.15 (2)); nach Lemma 2.16 (2) ist jeder Summand und damit die Summe eine Nullfolge. □

Satz 2.23. $\mathbb{R}$ ist mit diesen Verknüpfungen ein Körper mit Nullelement $0 = \iota(0)$ und Einselement $1 = \iota(1)$.

Beweisidee. Die Rechengesetze gelten gliedweise in $\mathbb{Q}$ und übertragen sich auf die Klassen. Nur das multiplikative Inverse verlangt Arbeit: Man muss $\frac{1}{a_n}$ bilden, obwohl einzelne a_n null sein können, und zeigen, dass das Ergebnis wieder eine Cauchy-Folge ist. Beides leistet das Trennungslemma.

Beweis. (K1), (K2), (K5) und (K3): Für jedes n gelten die Gesetze in $\mathbb{Q}$, etwa $(a_n + b_n) + c_n = a_n + (b_n + c_n)$. Also stimmen die Folgen überein, deren Klassen auf beiden Seiten stehen, und damit die Klassen. Ebenso $[a_n] + [0] = [a_n]$ und $[a_n] \cdot [1] = [a_n]$.

(K4), additiv: $(-a_n)$ ist eine Cauchy-Folge, und $[a_n] + [-a_n] = [0]$.

$0 \neq 1$: Die Folge $(1 - 0) = (1)$ ist keine Nullfolge.

(K4), multiplikativ: Sei $[a_n] \neq 0$, also $(a_n) \notin \mathcal{N}$. Nach Lemma 2.17 gibt es $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$, und N mit $|a_n| \geq \delta$ für alle $n \geq N$. Setze $a'_n = 1$ für $n < N$ und $a'_n = a_n$ für $n \geq N$. Die Folge $(a'_n - a_n)$ ist ab N null, also eine Nullfolge; deshalb ist $(a'_n) = (a_n) + (a'_n - a_n)$ eine Cauchy-Folge mit $(a'_n) \sim (a_n)$, und alle a'_n sind von null verschieden. Sei $b_n = \frac{1}{a'_n}$. Für $m, n \geq N$ ist

$$|b_n - b_m| = \frac{|a_m - a_n|}{|a_n|\,|a_m|} \leq \frac{|a_m - a_n|}{\delta^2},$$

nach (O2) und (O6). Zu $\varepsilon > 0$ wählt man $N' \geq N$ mit $|a_m - a_n| < \delta^2 \varepsilon$ für $m, n \geq N'$; also ist (b_n) eine Cauchy-Folge. Schließlich ist $[a_n] \cdot [b_n] = [a'_n] \cdot [b_n] = [a'_n b_n] = [1]$. □

Bemerkung (die algebraische Gestalt der Konstruktion). Mit gliedweiser Addition und Multiplikation erfüllt $\mathcal{C}$ alle Körperaxiome außer der Existenz multiplikativer Inverser (Lemma 2.15 (3) und der Beweis von Satz 2.23); in der Sprache der Algebra ist $\mathcal{C}$ ein *kommutativer Ring mit Eins*. Er ist nicht nullteilerfrei: $(1, 0, 0, \ldots)$ und $(0, 1, 1, \ldots)$ sind von der Folge (0) verschieden, ihr Produkt ist die Folge (0). Der erste Faktor ist allerdings eine Nullfolge, und im Quotienten verschwindet dieser Nullteiler: Nach dem Trennungslemma 2.17 ist das Produkt zweier Cauchy-Folgen, die keine Nullfolgen sind, nie eine Nullfolge. Die Nullfolgen bilden darin ein *Ideal*: Mit $(a_n), (b_n) \in \mathcal{N}$ ist $(a_n - b_n) \in \mathcal{N}$,

und mit $(a_n) \in \mathcal{N}$ und $(c_n) \in \mathcal{C}$ ist $(a_n c_n) \in \mathcal{N}$ (Lemma 2.15 (2), Lemma 2.16 (2)). Lemma 2.20 und Satz 2.22 benutzen von $\mathcal{N}$ nur diese beiden Eigenschaften; man schreibt deshalb auch $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\mathcal{N}$. Dass der Quotient ein Körper ist, hängt allein am Trennungslemma; gerade das fehlt in (G4). Ring und Ideal werden im Kurs nicht weiter gebraucht.

Als Nächstes die Anordnung. Naheliegend wäre, $[a_n]$ positiv zu nennen, wenn alle a_n positiv sind. Das geht nicht: $(\frac{1}{n})$ hat nur positive Glieder und vertritt die Null, und $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ vertritt dieselbe Zahl. Man verlangt deshalb einen festen Abstand von der Null, und zwar nur ab einer Stelle. Als Leitbild dient eine Beobachtung über konvergente Folgen: Gilt $a_n \to a$ mit $a > 0$, so ist $a_n > \frac{a}{2}$ für alle großen n (man wähle $\varepsilon = \frac{a}{2}$). Eine Folge mit positivem Grenzwert bleibt also schließlich oberhalb einer festen positiven Schranke. Definition 2.24 verlangt genau das, ohne vom Grenzwert zu sprechen, den es in $\mathbb{Q}$ nicht zu geben braucht.

Definition 2.24. Sei $P_\mathbb{R}$ die Menge aller $[a_n] \in \mathbb{R}$, für die es $\delta \in \mathbb{Q}$ mit $\delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \geq \delta$ für alle $n \geq N$ gilt.

Die Bedingung hängt nicht vom Repräsentanten ab. Ist $(a'_n) \sim (a_n)$ und $a_n \geq \delta$ für $n \geq N$, so gibt es N' mit $|a'_n - a_n| < \frac{\delta}{2}$ für $n \geq N'$, und für $n \geq \max\{N, N'\}$ ist $a'_n > a_n - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}$.

Satz 2.25. $(\mathbb{R}, P_\mathbb{R})$ ist ein angeordneter Körper.

Beweis. (Pos1): Sei $x = [a_n]$. Ist $x = 0$, so ist (a_n) eine Nullfolge. Dann liegt x nicht in $P_\mathbb{R}$, denn aus $a_n \geq \delta > 0$ für alle $n \geq N$ folgte $|a_n| \geq \delta$ unendlich oft; ebenso liegt $-x = 0$ nicht in $P_\mathbb{R}$. Ist $x \neq 0$, so liefert Lemma 2.17 ein $\delta > 0$ und ein N mit $a_n \geq \delta$ für alle $n \geq N$, also $x \in P_\mathbb{R}$, oder mit $-a_n \geq \delta$ für alle $n \geq N$, also $-x = [-a_n] \in P_\mathbb{R}$. Beides zugleich ist unmöglich: Aus $a_n \geq \delta$ und $-a_n \geq \delta'$ für ein gemeinsames großes n folgte $0 = a_n + (-a_n) \geq \delta + \delta' > 0$.

(Pos2): Gilt $a_n \geq \delta$ für $n \geq N$ und $b_n \geq \delta'$ für $n \geq N'$, so ist für $n \geq \max\{N, N'\}$ nach (O4) und (O2) in $\mathbb{Q}$

$$a_n + b_n \geq \delta + \delta' > 0, \qquad a_n b_n \geq \delta\delta' > 0. \qquad \square$$

Folgerung 2.26. In $\mathbb{R}$ gelten die Anordnungsregeln (O0)–(O6), und $\leq$ ist eine totale Ordnung; ebenso gelten die Eigenschaften des Betrags, die Dreiecksungleichung, die Bernoullische Ungleichung und Satz 1.25. Damit ist Voraussetzung 3 aus Einheit 1 eingelöst, soweit sie die Körper- und Anordnungsregeln betrifft; dass $\mathbb{R}$ den Körper $\mathbb{Q}$ enthält, zeigt Satz 2.28.

Beweis. Satz 2.25, Satz 2.4 und der Absatz nach Definition 2.6. $\square$

Lemma 2.27 (Vergleich). Seien $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}$ und $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N_0$. Dann ist $[a_n] \leq [b_n]$.

Beweis. Andernfalls wäre nach (O0) $[a_n] - [b_n] = [a_n - b_n] \in P_{\mathbb{R}}$, also $a_n - b_n \geq \delta > 0$ für alle großen n, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Auch hier gilt nur „$\leq$“: Aus $a_n < b_n$ für alle n folgt nicht $[a_n] < [b_n]$, wie $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ zeigt.

Satz 2.28 (Einbettung von $\mathbb{Q}$). Die Abbildung $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist injektiv, und für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\iota(r+s) = \iota(r) + \iota(s), \qquad \iota(rs) = \iota(r)\,\iota(s), \qquad r < s \iff \iota(r) < \iota(s).$$

Beweis. Die beiden Gleichungen gelten nach Definition der Verknüpfungen. Ist $r < s$, so ist $\iota(s) - \iota(r) = [s - r]$ die Klasse einer konstanten Folge mit Wert $s - r > 0$, also in $P_{\mathbb{R}}$ mit $\delta = s - r$. Ist umgekehrt nicht $r < s$, so ist $r = s$ oder $s < r$, also $\iota(r) = \iota(s)$ oder $\iota(s) < \iota(r)$, und nach (O0) nicht $\iota(r) < \iota(s)$. Sind $r \neq s$, so gilt $r < s$ oder $s < r$, also $\iota(r) \neq \iota(s)$. □

Satz 2.28 sagt in der Sprache von Definition 2.7: ι ist ein Homomorphismus angeordneter Körper, denn $\iota(1) = [1] = 1$. Nach Lemma 2.8 ist ι die einzige Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, die Summen und Produkte erhält und 1 auf 1 abbildet; insbesondere ist $\iota(n) = n \cdot 1$ für $n \in \mathbb{N}$ im Sinn von Folgerung 2.5.

Weil ι Rechenoperationen und Anordnung erhält, liefert jede Rechnung oder Abschätzung mit rationalen Zahlen in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$ dasselbe; insbesondere ist $\iota(|r|) = |\iota(r)|$. Von nun an schreiben wir r statt $\iota(r)$ und fassen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ als Teilmengen auf. Damit ist Voraussetzung 3 aus Einheit 1 vollständig eingelöst: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält.

Schon jetzt lässt sich zeigen, dass ι nicht surjektiv ist, also $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$: Die Klasse $[x_n]$ der Heron-Folge liegt nicht im Bild von ι. Aus $[x_n] = \iota(r) = [r]$ mit $r \in \mathbb{Q}$ folgte nämlich, dass $(x_n - r)$ eine rationale Nullfolge ist, also $x_n \to r$ in $\mathbb{Q}$, im Widerspruch zu Satz 2.18. Satz 2.39 zeigt dasselbe noch einmal in der Form $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zwischenbilanz. Gezeigt ist: Die Klassen rationaler Cauchy-Folgen bilden einen angeordneten Körper $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Q}$ samt Rechenarten und Anordnung als echten Teil enthält; die Anordnungsregeln aus Einheit 1 gelten in ihm. Noch nicht gezeigt ist, dass $\mathbb{R}$ die Lücke schließt, derentwegen er gebaut wurde: Wir wissen noch nicht, dass die Heron-Folge in $\mathbb{R}$ einen Grenzwert hat. Die beiden folgenden Abschnitte holen das nach, zuerst mit der archimedischen Eigenschaft als Werkzeug, dann mit der Vollständigkeit.

2.5 Archimedische Eigenschaft und Dichtheit

Satz 2.29 ($\mathbb{R}$ ist archimedisch). Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Sei $x = [a_k]$. Nach Lemma 2.15 (2) gibt es $C \in \mathbb{Q}$ mit $|a_k| \le C$ für alle k. Nach Lemma 2.13 gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > C + 1$. Dann ist $n - a_k \ge n - C > 1$ für alle k, also $n - x = [n - a_k] \in P_{\mathbb{R}}$ mit $\delta = 1$, das heißt $n > x$. Den zweiten Teil liefert der Absatz nach Definition 2.12. □

Das ist die Eigenschaft (A), die in Einheit 1 (Abschnitt 1.4, Aufgabe R5) vorweggenommen wurde. Sie ist nicht selbstverständlich: Es gibt angeordnete Körper, in denen $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist (Einheit 5, (G2); Vorgriff). In $\mathbb{R}$ folgt sie aus der Konstruktion, weil jede reelle Zahl durch eine beschränkte Folge rationaler Zahlen gegeben ist.

Bemerkung (Folgen in $\mathbb{R}$). Satz 2.29 sagt: $\mathbb{R}$ ist archimedisch im Sinn von Definition 2.12. Definition 2.14 und die Lemmata 2.15–2.17 gelten mit $K = \mathbb{R}$. Nach Satz 2.29 ist es dabei gleichgültig, ob ε alle positiven reellen Zahlen, nur die positiven rationalen oder nur die Zahlen $\frac{1}{k}$ durchläuft: Zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ gibt es ein k mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Insbesondere ist eine Folge rationaler Zahlen genau dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, wenn sie es in $\mathbb{R}$ ist, und $(\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Lemma 2.30 (ganzer Teil). Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \le x < m + 1$. Man schreibt $m = \lfloor x \rfloor$. Aussage und Beweis gelten wörtlich in jedem archimedisch angeordneten Körper, mit $j(m)$ an Stelle von m (Lemma 2.8).

Beweis. Nach Satz 2.29 gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $k > x$ und $k > -x$. Die Menge $T = \{i \in \mathbb{N} : i - k > x\}$ enthält $2k$ und hat nach Satz 1.16 ein kleinstes Element i_0. Setze $m = i_0 - k - 1$. Dann ist $m + 1 = i_0 - k > x$. Ist $i_0 = 1$, so ist $m = -k < x$. Ist $i_0 \ge 2$, so liegt $i_0 - 1$ nicht in T, also $m = (i_0 - 1) - k \le x$. Eindeutigkeit: Erfüllen m und m' die Bedingung, so ist $m \le x < m' + 1$ und $m' \le x < m + 1$, nach Satz 2.28 also $m < m' + 1$ und $m' < m + 1$ auch in $\mathbb{Z}$. Da zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen keine weitere liegt, folgt $m \le m'$ und $m' \le m$. □

Satz 2.31 (Dichtheit von $\mathbb{Q}$). Zu reellen Zahlen $x < y$ gibt es ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$. Aussage und Beweis gelten wörtlich in jedem archimedisch angeordneten Körper, mit dem Bild von $\mathbb{Q}$ aus Lemma 2.8 an Stelle von $\mathbb{Q}$.

Beweisidee. Man wählt ein so feines Raster $\frac{1}{n}\mathbb{Z}$, dass seine Maschenweite kleiner als $y - x$ ist; dann kann das Intervall nicht zwischen zwei Rasterpunkten hindurchfallen.

Beweis. Nach Satz 2.29 gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{y-x}$, also $ny - nx > 1$. Sei $m = \lfloor nx \rfloor + 1$. Dann ist $nx < m \le nx + 1 < ny$. Multiplikation mit $\frac{1}{n} > 0$ (O5) ergibt $x < \frac{m}{n} < y$. □

Zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ liegen sogar unendlich viele rationale: Nach Satz 2.31, zweimal angewandt, gibt es rationale a, b mit $x < a < b < y$. Die Zahlen $a + \frac{b-a}{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, sind rational, liegen zwischen a und b und sind nach (O6) paarweise verschieden; nach dem Beweis von Folgerung 2.5 ist ihre Menge nicht endlich.

Lemma 2.32 (Approximation). Ist $x = [a_n] \in \mathbb{R}$, so konvergiert die Folge (a_n), aufgefasst als Folge in $\mathbb{R}$, gegen x.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ reell. Wähle k mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$ (Satz 2.29) und N mit $|a_m - a_n| < \frac{1}{2k}$ für $m, n \geq N$. Halte $n \geq N$ fest. Die Zahl $x - a_n$ ist die Klasse der Folge $(a_m - a_n)_{m\in\mathbb{N}}$, und für $m \geq N$ ist $-\frac{1}{2k} \leq a_m - a_n \leq \frac{1}{2k}$. Lemma 2.27, angewandt mit den konstanten Folgen $(\pm\frac{1}{2k})$, ergibt $-\frac{1}{2k} \leq x - a_n \leq \frac{1}{2k}$, also $|x - a_n| \leq \frac{1}{2k} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. □

Damit ist die Konstruktion nachträglich gerechtfertigt: Die Klasse $[a_n]$ ist tatsächlich der Grenzwert ihrer Folgen. Die Heron-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen ihre eigene Klasse; dass diese Klasse die Zahl $\sqrt{2}$ ist, zeigt Beispiel 2 in Abschnitt 2.9.

2.6 Vollständigkeit, Supremum und Wurzeln

Satz 2.33 (Cauchy-Vollständigkeit). Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert in $\mathbb{R}$. Man sagt: $\mathbb{R}$ ist *Cauchy-vollständig*.

Beweisidee. Man ersetzt jedes Glied x_n durch eine rationale Zahl r_n, die höchstens $\frac{1}{n}$ entfernt ist. Die Folge (r_n) ist eine rationale Cauchy-Folge, ihre Klasse ist nach Lemma 2.32 ihr Grenzwert, und (x_n) hat denselben Grenzwert. Die Konstruktion wird also ein zweites Mal angewandt, diesmal ohne etwas Neues zu erzeugen.

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Setze $r_n = \frac{\lfloor nx_n \rfloor}{n} \in \mathbb{Q}$. Nach Lemma 2.30 ist $r_n \leq x_n < r_n + \frac{1}{n}$, also $|x_n - r_n| < \frac{1}{n}$.

(r_n) ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$: Sei $\varepsilon > 0$ rational. Wähle N mit $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $m, n \geq N$. Für $m, n \geq N$ ist

$$|r_n - r_m| \leq |r_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - r_m| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} \leq \varepsilon.$$

Die Abschätzung ist in $\mathbb{R}$ gerechnet. Da r_n, r_m und ε rational sind und ι die Anordnung erhält (Satz 2.28), gilt $|r_n - r_m| < \varepsilon$ auch in $\mathbb{Q}$.

Sei $x = [r_n]$. Nach Lemma 2.32 gilt $r_n \to x$ in $\mathbb{R}$. Also ist $x_n - x = (x_n - r_n) + (r_n - x)$ eine Summe zweier Nullfolgen ($|x_n - r_n| < \frac{1}{n}$, die Bemerkung nach Satz 2.29 und Lemma 2.16 (2)), das heißt $x_n \to x$. □

Bemerkung (keine Auswahl). Der naheliegende Beweis würde zu jedem x_n eine rationale Cauchy-Folge aus der Klasse x_n auswählen. Jede Klasse enthält unendlich viele Folgen, und eine Vorschrift, welche man nimmt, gibt es nicht. Abzählbar viele solche Wahlen verlangen eine Form des Auswahlaxioms (Abschnitt 1.5), die abzählbare Auswahl. Der Beweis oben vermeidet das, denn $r_n = \lfloor nx_n \rfloor / n$ ist nach Lemma 2.30 eindeutig bestimmt. Auch sonst kommt diese Einheit ohne Auswahl aus: Das Inverse in Satz 2.23 und die Wurzel in Satz 2.39 sind eindeutig, die Folgen in Satz 2.18 und Satz 2.34 entstehen durch Rekursion, und die Abzählung von $\mathbb{Q}$ in Satz 2.45 ist ausdrücklich angegeben. Ab Einheit 7 wird abzählbare Auswahl benutzt und dort ausgewiesen.

Zusammen mit Lemma 2.15 (1) heißt das: In $\mathbb{R}$ ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Das Cauchy-Kriterium entscheidet über Konvergenz, ohne dass man den Grenzwert kennen muss. Aufgabe V4 zeigt, dass eine Wiederholung der Konstruktion mit reellen statt rationalen Cauchy-Folgen nichts Neues liefert.

Satz 2.34 (Supremumseigenschaft). Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Beweisidee. Man halbiert fortgesetzt ein Intervall, dessen rechter Rand obere Schranke ist und dessen linker Rand nicht. Die Ränder bilden Cauchy-Folgen; ihr gemeinsamer Grenzwert ist das Supremum.

Beweis. Sei $a \in A$ und b eine obere Schranke. Setze $l_1 = a - 1$ und $r_1 = b$. Rekursiv sei $m_n = \frac{l_n + r_n}{2}$ und

$$(l_{n+1}, r_{n+1}) = (l_n, m_n), \text{ falls } m_n \text{ obere Schranke von } A \text{ ist}, \qquad (l_{n+1}, r_{n+1}) = (m_n, r_n) \text{ sonst.}$$

(Rekursionssatz mit der Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.) Durch Induktion folgt für alle n: r_n ist obere Schranke von A, l_n nicht; die Fallunterscheidung der Rekursion erhält beide Eigenschaften. Da l_n keine obere Schranke ist, gibt es $y \in A$ mit $l_n < y \le r_n$; also ist $l_n < r_n$ und damit $l_n < m_n < r_n$. Daraus folgt $l_n \le l_{n+1}$, $r_{n+1} \le r_n$ und $r_{n+1} - l_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n - l_n)$, also $r_n - l_n = \frac{c}{2^{n-1}}$ mit $c = r_1 - l_1 > 0$. Für $m \ge n$ gilt deshalb

$$l_n \le l_m < r_m \le r_n, \qquad \text{also} \qquad |l_m - l_n| \le r_n - l_n, \quad |r_m - r_n| \le r_n - l_n.$$

Nach Bernoulli ist $2^{n-1} \ge n$, also $r_n - l_n \le \frac{c}{n}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 2.29 ein N mit $\frac{c}{N} < \varepsilon$; für $m, n \ge N$ ist dann $|l_m - l_n| < \varepsilon$ und $|r_m - r_n| < \varepsilon$. Folglich sind (l_n) und (r_n) Cauchy-Folgen; nach Satz 2.33 gilt $r_n \to s$ für ein $s \in \mathbb{R}$, und wegen $l_n = r_n - (r_n - l_n)$ auch $l_n \to s$.

s ist obere Schranke: Für $y \in A$ ist $y \le r_n$ für alle n, nach Lemma 2.16 (4) also $y \le s$.

s ist die kleinste obere Schranke: Sei $t < s$. Wegen $l_n \to s$ gibt es n mit $|l_n - s| < s - t$, also $l_n > t$. Da l_n keine obere Schranke ist, gibt es $y \in A$ mit $y > l_n > t$; also ist auch t keine obere Schranke. □

Folgerung 2.35. Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum, nämlich $\inf A = -\sup(-A)$ mit $-A = \{-a : a \in A\}$.

Beweis. Nach (O2) mit $z = -1$ ist t genau dann untere Schranke von A, wenn $-t$ obere Schranke von $-A$ ist. Mit A ist also $-A$ nicht leer und nach oben beschränkt; $s = \sup(-A)$ existiert nach Satz 2.34. Dann ist $-s$ untere Schranke von A, und für jede untere Schranke t ist $-t$ obere Schranke von $-A$, also $s \leq -t$, das heißt $t \leq -s$. □

Bemerkung (Supremum und Archimedes). Die Supremumseigenschaft allein erzwingt die archimedische Eigenschaft im Sinn von Definition 2.12. Wäre in einem angeordneten Körper mit Supremumseigenschaft $\mathbb{N}$ (genauer $\{n \cdot 1\}$) nach oben beschränkt, so hätte es ein Supremum s. Dann wäre $s - 1$ keine obere Schranke, es gäbe also n mit $n > s - 1$, und $n + 1 > s$ widerspräche der Wahl von s. Wie Supremumseigenschaft, Cauchy-Vollständigkeit und weitere Formen der Vollständigkeit zusammenhängen, untersucht Einheit 5.

Für das Rechnen mit Suprema genügen meist drei Regeln. Die erste kennzeichnet das Supremum durch Annäherung von unten.

Lemma 2.36 (Regeln für Supremum und Infimum).

1. Sei K ein angeordneter Körper, $A \subseteq K$ nicht leer und s eine obere Schranke von A. Genau dann ist $s = \sup A$, wenn es zu jedem $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $a > s - \varepsilon$ gibt.
2. Seien $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, A nicht leer und B nach oben beschränkt. Dann ist $\sup A \leq \sup B$.
3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Ist A nach oben beschränkt und $\lambda > 0$, so ist $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$. Ist A nach unten beschränkt und $\lambda < 0$, so ist $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$.

Beweis. (1) Ist $s = \sup A$ und $\varepsilon > 0$, so ist $s - \varepsilon < s$ keine obere Schranke, also gibt es $a \in A$ mit $a > s - \varepsilon$. Umgekehrt sei die Bedingung erfüllt und $t < s$. Mit $\varepsilon = s - t$ gibt es $a \in A$ mit $a > t$, also ist t keine obere Schranke. Jede obere Schranke t erfüllt daher $t \geq s$ nach (O0).

(2) A ist nach oben beschränkt, $\sup A$ und $\sup B$ existieren nach Satz 2.34. Wegen $A \subseteq B$ ist $\sup B$ eine obere Schranke von A, also $\sup A \leq \sup B$.

(3) Sei $\lambda > 0$ und $s = \sup A$. Für $a \in A$ ist $\lambda a \leq \lambda s$ nach (O2); also ist λA nicht leer und hat die obere Schranke λs. Ist t eine obere Schranke von λA, so folgt aus $\lambda a \leq t$ durch Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda} > 0$, dass $a \leq \frac{t}{\lambda}$ für alle $a \in A$. Also ist $s \leq \frac{t}{\lambda}$, das heißt $\lambda s \leq t$. Sei nun $\lambda < 0$ und $\mu = -\lambda > 0$. Die Menge $-A$ ist nicht leer und nach oben beschränkt, und $\lambda A = \mu(-A)$. Nach dem eben Gezeigten und Folgerung 2.35 ist $\sup(\lambda A) = \mu \sup(-A) = \mu \cdot (-\inf A) = \lambda \inf A$. □

Für unbeschränkte und leere Mengen ist es bequem, Supremum und Infimum durch zwei zusätzliche Zeichen zu ergänzen.

Definition 2.37 (erweiterte Zahlengerade). Sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit zwei neuen Elementen $-\infty \neq \infty$, die keine reellen Zahlen sind. Man setzt $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $-\infty < \infty$; auf $\mathbb{R}$ bleibt die Anordnung unverändert. Für $A \subseteq \mathbb{R}$ setzt man $\sup A = \infty$, wenn A nicht nach oben beschränkt ist, $\inf A = -\infty$, wenn A nicht nach unten beschränkt ist, sowie $\sup \varnothing = -\infty$ und $\inf \varnothing = \infty$.

Mit diesen Festsetzungen hat jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum im Sinn von Abschnitt 1.9, bezüglich der totalen Ordnung von $\overline{\mathbb{R}}$. Ist A nicht leer und nach oben beschränkt, so sind die oberen Schranken von A in $\overline{\mathbb{R}}$ die reellen oberen Schranken und ∞; die kleinste ist $\sup A$ aus Satz 2.34, und $-\infty$ ist keine, weil A ein reelles Element enthält. Ist A nicht nach oben beschränkt, so ist ∞ die einzige obere Schranke in $\overline{\mathbb{R}}$. Für $A = \varnothing$ ist jedes Element von $\overline{\mathbb{R}}$ obere Schranke, die kleinste ist $-\infty$. Für das Infimum gilt Entsprechendes. $\overline{\mathbb{R}}$ ist kein Körper; Rechenregeln mit $\pm\infty$ werden erst eingeführt, wo sie gebraucht werden (Einheit 4), und Ausdrücke wie $\infty - \infty$ bleiben unerklärt.

Als erste Anwendung lösen wir die Gleichung aus der Leitfrage, gleich für beliebige Exponenten.

Lemma 2.38 (Potenzen). Sei K ein angeordneter Körper, $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq u \leq v$. Dann gilt:

1. $u^k \leq v^k$, und $u^k < v^k$, falls $u < v$.
2. $v^k - u^k \leq k\, v^{k-1}(v - u)$.

Beweis. Durch Induktion ist $0 \leq u^j \leq v^j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$: Nach (O2) ist $u^{j+1} = u^j u \leq u^j v \leq v^j v$, weil $u^j \geq 0$ und $v \geq 0$, und $u^{j+1} = u^j u \geq 0$. Insbesondere ist $u^k \leq v^k$. Durch Ausmultiplizieren (die Summanden heben sich paarweise weg) gilt

$$v^k - u^k = (v - u)\, S, \qquad S = \sum_{j=0}^{k-1} v^{k-1-j} u^j.$$

Jeder Summand von S liegt zwischen 0 und $v^{k-1-j} v^j = v^{k-1}$; also ist $0 \leq S \leq k\, v^{k-1}$, und (O2) ergibt (2). Ist $u < v$, so ist $v > 0$ und $S \geq v^{k-1} > 0$ (Summand $j = 0$), also $v^k - u^k = (v - u)S > 0$ nach (O5). □

Satz 2.39 (Wurzeln). Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ und $y^k = x$. Man schreibt $y = \sqrt[k]{x}$, für $k = 2$ auch $\sqrt{x}$. Insbesondere ist $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

Beweisidee. y ist das Supremum aller $t \geq 0$ mit $t^k \leq x$. Dass y^k weder kleiner noch größer als x sein kann, zeigt dieselbe Abschätzung wie in Satz 2.11, nun mit Lemma 2.38 (2)

an Stelle der ausmultiplizierten Quadrate; den Gleichheitsfall, den in Satz 2.11 Satz 2.9 ausschließt, vermeidet hier der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Wahl von h.

Beweis. Eindeutigkeit: Sind $y \neq y'$ nicht negativ, etwa $y < y'$, so ist $y^k < y'^k$ nach Lemma 2.38 (1).

Existenz: Für $x = 0$ ist $y = 0$. Sei $x > 0$ und $A = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0,\ t^k \leq x\}$. Die Zahl $t_0 = \min\{1, x\}$ liegt in A: Wegen $0 < t_0 \leq 1$ ist $t_0^{k-1} \leq 1$ nach Lemma 2.38 (1), also $t_0^k = t_0^{k-1} t_0 \leq t_0 \leq x$. Die Zahl $1 + x$ ist obere Schranke: Für $t > 1 + x$ ist $t > 1$, nach Lemma 2.38 (1) also $t^{k-1} \geq 1$ und $t^k = t^{k-1} t \geq t > x$. (Für $k = 1$ ist $t^0 = 1$, und beide Schlüsse sind klar.) Nach Satz 2.34 existiert $s = \sup A$, und $s \geq t_0 > 0$.

Fall $s^k < x$. Für $0 < h \leq 1$ ist nach Lemma 2.38 (2) mit $u = s$, $v = s + h$

$$(s + h)^k - s^k \leq k(s + h)^{k-1} h \leq k(s + 1)^{k-1} h.$$

Mit $h = \min\{1,\ \frac{x - s^k}{2k(s+1)^{k-1}}\} > 0$ folgt $(s + h)^k \leq s^k + \frac{x - s^k}{2} < x$. Also liegt $s + h > s$ in A, ein Widerspruch.

Fall $s^k > x$. Für $0 < h \leq \frac{s}{2}$ ist nach Lemma 2.38 (2) mit $u = s - h$, $v = s$

$$s^k - (s - h)^k \leq k\, s^{k-1} h.$$

Mit $h = \min\{\frac{s}{2},\ \frac{s^k - x}{2k s^{k-1}}\} > 0$ folgt $(s - h)^k \geq s^k - \frac{s^k - x}{2} > x$. Ist $t \in A$ mit $t > s - h$, so folgt $t^k > (s - h)^k > x$ nach Lemma 2.38 (1), unmöglich. Also ist $s - h < s$ eine obere Schranke von A, ein Widerspruch.

Folglich ist $s^k = x$. Schließlich ist $\sqrt{2}$ nicht rational: Wäre $\sqrt{2} = r \in \mathbb{Q}$, so wäre $r^2 = 2$ in $\mathbb{R}$ und nach Satz 2.28 auch in $\mathbb{Q}$, im Widerspruch zu Satz 2.9. □

Damit ist auch die Lücke aus Satz 2.11 geschlossen: Die dortige Menge A hat in $\mathbb{R}$ das Supremum $\sqrt{2}$. Denn $\sqrt{2}$ ist obere Schranke (aus $x > \sqrt{2} \geq 0$ folgt $x^2 > 2$), und zu $t < \sqrt{2}$ gibt es nach Satz 2.31 ein rationales r mit $\max\{t, 0\} < r < \sqrt{2}$, also $r \in A$ und $r > t$.

Als zweite Anwendung der Wurzeln zeigt sich, dass die Anordnung von $\mathbb{R}$ keine zusätzliche Wahl war.

> **Folgerung 2.40 (die Anordnung von $\mathbb{R}$).** Eine reelle Zahl x ist genau dann ≥ 0, wenn $x = y^2$ für ein $y \in \mathbb{R}$ gilt. Insbesondere ist $P_{\mathbb{R}}$ die einzige Teilmenge von $\mathbb{R}$, die (Pos1) und (Pos2) erfüllt.

Beweis. Ist $x \geq 0$, so ist $x = (\sqrt{x})^2$ nach Satz 2.39; umgekehrt ist $y^2 \geq 0$ nach (O3). Erfüllt $P' \subseteq \mathbb{R}$ die Bedingungen (Pos1) und (Pos2), so gilt (O3) nach Satz 2.4 auch für die Anordnung mit P'. Jedes $x \in P_{\mathbb{R}}$ ist ein Quadrat y^2 mit $y \neq 0$, liegt also in P'. Läge

ein $x \in P'$ nicht in $P_{\mathbb{R}}$, so wäre $x \neq 0$ und $-x \in P_{\mathbb{R}} \subseteq P'$, im Widerspruch zu (Pos1) für P'. □

Hängt $\mathbb{R}$ von der Konstruktion ab? Der folgende Satz zeigt, dass jeder angeordnete Körper mit den beiden Eigenschaften, die die Konstruktion geliefert hat, auf genau eine Weise mit $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Satz 2.41 (Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$). Sei K ein archimedisch angeordneter Körper, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert. Dann gibt es genau einen Isomorphismus angeordneter Körper $\varphi : \mathbb{R} \to K$. Er ist sogar die einzige Abbildung $\psi : \mathbb{R} \to K$ mit $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$, $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ und $\psi(1) = 1$.

Beweisidee. Eine reelle Zahl ist die Klasse einer rationalen Cauchy-Folge. Man bildet die Folge mit Lemma 2.8 nach K ab und nimmt dort den Grenzwert. Dass die Bildfolge in K eine Cauchy-Folge ist, verlangt die archimedische Eigenschaft von K: Die rationalen Toleranzen müssen in K beliebig klein werden.

Beweis. Sei $j : \mathbb{Q} \to K$ wie in Lemma 2.8; nach Definition 2.7 erhält j Differenzen, Anordnung und Betrag.

Schritt 1. Ist $(a_n) \in \mathcal{C}$, so ist $(j(a_n))$ eine Cauchy-Folge in K; ist $(a_n) \in \mathcal{N}$, so ist $(j(a_n))$ eine Nullfolge in K. Denn sei $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$. Da K archimedisch ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $j(k) > \frac{1}{\varepsilon}$, also $j(\frac{1}{k}) = \frac{1}{j(k)} < \varepsilon$ nach (O6). Wähle N mit $|a_n - a_m| < \frac{1}{k}$ für $m, n \geq N$. Dann ist $|j(a_n) - j(a_m)| = j(|a_n - a_m|) < j(\frac{1}{k}) < \varepsilon$. Für Nullfolgen schließt man ebenso, mit 0 an Stelle von a_m.

Schritt 2 (Definition von φ). Für $x = [a_n]$ sei $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} j(a_n)$. Der Grenzwert existiert nach Schritt 1 und der Voraussetzung über K, und er ist eindeutig (Lemma 2.16 (1)). Er hängt nicht vom Repräsentanten ab: Ist $(a_n) \sim (b_n)$, so ist $j(a_n) - j(b_n) = j(a_n - b_n)$ nach Schritt 1 eine Nullfolge in K, und Lemma 2.16 (3) und (1) ergeben gleiche Grenzwerte. Nach Lemma 2.16 (3) ist $\varphi([a_n] + [b_n]) = \lim\big(j(a_n) + j(b_n)\big) = \varphi([a_n]) + \varphi([b_n])$, ebenso für das Produkt. Für $r \in \mathbb{Q}$ ist $\varphi(r) = j(r)$, insbesondere $\varphi(1) = 1$.

Schritt 3 (Anordnung). Sei $x = [a_n] > 0$. Dann gibt es $\delta \in \mathbb{Q}$ mit $\delta > 0$ und N mit $a_n \geq \delta$ für $n \geq N$. Es folgt $j(a_n) \geq j(\delta)$ für $n \geq N$, nach Lemma 2.16 (4) in K also $\varphi(x) \geq j(\delta) > 0$. Aus $x < y$ folgt deshalb $\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) > 0$. Damit ist φ ein Homomorphismus angeordneter Körper und insbesondere injektiv.

Schritt 4 (surjektiv). Sei $y \in K$. Nach Lemma 2.30, in K angewandt, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $m_n \in \mathbb{Z}$ mit $j(m_n) \leq j(n)\, y < j(m_n) + 1$. Mit $r_n = \frac{m_n}{n} \in \mathbb{Q}$ folgt nach Multiplikation mit $\frac{1}{j(n)} > 0$, dass $j(r_n) \leq y < j(r_n) + j(\frac{1}{n})$, also $|y - j(r_n)| < j(\frac{1}{n})$. Daraus folgt $|j(r_n) - j(r_m)| < j(\frac{1}{n}) + j(\frac{1}{m}) = j(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$. Weil j Anordnung und Betrag erhält, gilt $|r_n - r_m| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ in $\mathbb{Q}$, und mit Lemma 2.13 ist $(r_n) \in \mathcal{C}$. Nach Schritt 1 ist $(j(\frac{1}{n}))$ eine Nullfolge in K, nach Lemma 2.16 (2) also $j(r_n) \to y$. Somit ist $\varphi([r_n]) = y$.

Schritt 5 (Eindeutigkeit). Sei $\psi : \mathbb{R} \to K$ additiv und multiplikativ mit $\psi(1) = 1$. Die Einschränkung auf $\mathbb{Q}$ erfüllt die Gleichungen aus Lemma 2.8, also ist $\psi(r) = j(r)$ für $r \in \mathbb{Q}$. Ferner ist ψ monoton wachsend: Wie nach Definition 2.7 ist $\psi(0) = 0$ und $\psi(x' - x) = \psi(x') - \psi(x)$; ist $x \leq x'$, so ist $x' - x = y^2$ nach Folgerung 2.40, also $\psi(x') - \psi(x) = \psi(y)^2 \geq 0$. Dasselbe gilt für φ. Seien $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $m = \lfloor kx \rfloor$ und $r = \frac{m}{k}$. Dann ist $r \leq x < r + \frac{1}{k}$, also $j(r) \leq \psi(x) \leq j(r) + j(\frac{1}{k})$ und ebenso für $\varphi(x)$. Es folgt $|\psi(x) - \varphi(x)| \leq j(\frac{1}{k})$ für jedes k. Wäre $\psi(x) \neq \varphi(x)$, so gäbe es wie in Schritt 1 ein k mit $j(\frac{1}{k}) < |\psi(x) - \varphi(x)|$, ein Widerspruch. Also ist $\psi = \varphi$, und jeder Isomorphismus $\mathbb{R} \to K$ ist gleich φ. □

Mit einem Vorgriff auf Einheit 5 ergibt sich daraus die übliche Form der Eindeutigkeitsaussage. Nach Satz 5.14 hat ein angeordneter Körper genau dann die Supremumseigenschaft, wenn er archimedisch und Cauchy-vollständig ist; die archimedische Eigenschaft zeigt schon die Bemerkung nach Folgerung 2.35. Also ist jeder angeordnete Körper mit Supremumseigenschaft zu $\mathbb{R}$ isomorph, und je zwei solche Körper K, L sind durch genau einen Isomorphismus verbunden, nämlich $\varphi_L \circ \varphi_K^{-1}$: Ist $\chi : K \to L$ ein Isomorphismus, so ist $\chi \circ \varphi_K$ ein Isomorphismus $\mathbb{R} \to L$, nach Satz 2.41 also gleich φ_L. In diesem Sinn ist es für alles Weitere gleichgültig, wie man $\mathbb{R}$ konstruiert. Die Voraussetzung „archimedisch“ in Satz 2.41 kann nicht entfallen: Einheit 5, (G2), gibt einen nicht archimedischen angeordneten Körper an, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert; er ist nicht zu $\mathbb{R}$ isomorph, weil ein Isomorphismus die archimedische Eigenschaft überträgt.

Eine andere verbreitete Konstruktion benutzt Schnitte in $\mathbb{Q}$. Die Konstruktion über Cauchy-Folgen wird mit Georg Cantor und Charles Méray verbunden, die über Schnitte mit Richard Dedekind.

Die Klassen haben damit ihren Dienst getan. Sie wurden gebraucht, um zu zeigen, dass es einen angeordneten Körper mit Supremumseigenschaft gibt; im Rechnen tauchen sie nicht mehr auf. Von nun an benutzt der Kurs von $\mathbb{R}$ nur noch Folgendes, nicht mehr die Klassen selbst: dass $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, der $\mathbb{Q}$ enthält (Satz 2.25, Satz 2.28), dass er archimedisch ist (Satz 2.29), dass er Cauchy-vollständig ist und die Supremumseigenschaft hat (Satz 2.33, Satz 2.34), dazu die Folgerungen daraus, insbesondere Lemma 2.30, Satz 2.31 und Satz 2.39.

2.7 Abzählbarkeit

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$: In jedem noch so kleinen Intervall liegen rationale Zahlen. Man könnte vermuten, dass $\mathbb{Q}$ deshalb „fast alle“ reellen Zahlen ausmacht. Das Gegenteil ist richtig, und der Beweis braucht die Vollständigkeit.

Definition 2.42. Eine Menge X heißt *abzählbar unendlich*, wenn es eine Bijektion $\mathbb{N} \to X$ gibt; *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist; *überabzählbar*,

wenn sie nicht abzählbar ist.

Lemma 2.43. Jede Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Beweisidee. Man zählt T der Größe nach ab: t_1 ist das kleinste Element, t_2 das kleinste der übrigen, und so fort. Der Aufwand im Beweis gilt allein dem „und so fort“, das der Rekursionssatz präzisiert.

Beweis. Ist T endlich, so ist nichts zu zeigen. Sei T nicht endlich. Dann ist T nach oben unbeschränkt: Wäre $T \subseteq \{1, \dots, M\}$, so wäre T als Teilmenge einer Menge mit M Elementen endlich (Zählregeln aus Abschnitt 1.7). Für jedes $t \in \mathbb{N}$ ist also $\{s \in T : s > t\}$ nicht leer, und nach Satz 1.16 ist $\sigma(t) = \min\{s \in T : s > t\}$ erklärt. Der Rekursionssatz liefert eine Folge mit $t_1 = \min T$ und $t_{n+1} = \sigma(t_n)$. Alle t_n liegen in T, und $t_{n+1} > t_n$. Durch Induktion ist $n \mapsto t_n$ streng wachsend, also injektiv, und $t_n \geq n$.

Surjektiv: Sei $k \in T$. Wegen $t_k \geq k$ ist $\{n \in \mathbb{N} : t_n \geq k\}$ nicht leer; sei n ihr kleinstes Element (Satz 1.16). Ist $n = 1$, so ist $k \leq t_1 = \min T \leq k$. Ist $n \geq 2$, so ist $t_{n-1} < k$, also $k \in \{s \in T : s > t_{n-1}\}$ und $t_n = \sigma(t_{n-1}) \leq k \leq t_n$. In beiden Fällen ist $k = t_n$. □

Je nach Beweis ist eine andere Form der Abzählbarkeit bequem: Satz 2.45 gibt Injektionen nach $\mathbb{N}$ an, das Diagonalargument geht von einer Liste aus, also von einer Surjektion von $\mathbb{N}$. Das folgende Lemma erlaubt, zwischen beiden Formen zu wechseln.

Lemma 2.44. Für eine Menge X sind gleichwertig:

1. X ist abzählbar.
2. Es gibt eine injektive Abbildung $X \to \mathbb{N}$.

Ist $X \neq \emptyset$, so ist das auch gleichwertig mit (3): Es gibt eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to X$.

Beweis. (1)⇒(2): Die Umkehrung einer Bijektion $\mathbb{N} \to X$ oder $\{1, \dots, n\} \to X$ ist eine Injektion nach $\mathbb{N}$. (2)⇒(1): Ist $f : X \to \mathbb{N}$ injektiv, so ist $X \to f(X)$, $x \mapsto f(x)$, bijektiv, und $f(X)$ ist nach Lemma 2.43 endlich oder abzählbar unendlich; mit $f(X)$ ist es auch X (Zählregel aus Abschnitt 1.7 und Verkettung von Bijektionen). (1)⇒(3): Eine Bijektion $\mathbb{N} \to X$ ist surjektiv; ist $\varphi : \{1, \dots, n\} \to X$ bijektiv mit $n \geq 1$, so setzt man $\varphi(k) = \varphi(n)$ für $k > n$. (3)⇒(2): Ist $f : \mathbb{N} \to X$ surjektiv, so ist $g(x) = \min f^{-1}(\{x\})$ erklärt, und wegen $f(g(x)) = x$ ist g injektiv. □

Insbesondere ist jede Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar: Man schränkt die Injektion ein.

Satz 2.45. Die Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

Beweis. Alle drei enthalten ein Abbild von $\mathbb{N}$ und sind deshalb nicht endlich (Folgerung 2.5, Beweis). Nach Lemma 2.44 genügt jeweils eine Injektion in $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Sei $f(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Aus $f(m,n) = f(m',n')$ mit etwa $m \le m'$ folgt nach Kürzen durch 2^{m-1} die Gleichung $2n - 1 = 2^{m'-m}(2n'-1)$. Links steht eine ungerade Zahl; wäre $m' > m$, so stünde rechts eine gerade. Also $m = m'$ und dann $n = n'$.

$\mathbb{Z}$: Sei $h(z) = 2z$ für $z \ge 1$ und $h(z) = 1 - 2z$ für $z \le 0$. Die Werte sind natürliche Zahlen, gerade im ersten, ungerade im zweiten Fall, und in jedem Fall ist z aus $h(z)$ ablesbar. Also ist h injektiv.

$\mathbb{Q}$: Für $r \in \mathbb{Q}$ sei q_r das kleinste $q \in \mathbb{N}$ mit $qr \in \mathbb{Z}$ und $p_r = q_r r$. Wegen $r = p_r/q_r$ ist $r \mapsto (p_r, q_r)$ injektiv, und die Verkettung

$$r \mapsto (p_r, q_r) \mapsto \big(h(p_r), q_r\big) \mapsto f\big(h(p_r), q_r\big)$$

ist eine Injektion $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. □

Die rationalen Zahlen lassen sich also in eine Liste $r_1, r_2, r_3, \dots$ schreiben, obwohl zwischen je zwei von ihnen unendlich viele weitere liegen. Mit den reellen Zahlen geht das nicht. Den Kern des Beweises bildet ein Argument über 0-1-Folgen.

Satz 2.46 (Cantorsches Diagonalargument). Die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen (ϵ_k) mit $\epsilon_k \in \{0,1\}$ ist überabzählbar.

Beweisidee. Man schreibe die Folgen einer angeblichen Liste untereinander und lese die Diagonale ab. Ändert man jeden Diagonaleintrag, so entsteht eine Folge, die sich von der n-ten Folge der Liste an der n-ten Stelle unterscheidet und deshalb in der Liste fehlt.

Beweis. Die Menge ist nicht leer. Angenommen, sie wäre abzählbar. Nach Lemma 2.44 gibt es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $n \mapsto (\epsilon_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$. Setze $d_k = 1 - \epsilon_k^{(k)}$. Die Folge (d_k) liegt in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, und für jedes n ist $d_n \ne \epsilon_n^{(n)}$, also $(d_k) \ne (\epsilon_k^{(n)})$. Damit ist die Abbildung nicht surjektiv, ein Widerspruch. □

Das Diagonalargument stammt von Georg Cantor; in seiner allgemeinen Form zeigt es, dass es keine surjektive Abbildung einer Menge auf ihre Potenzmenge gibt (Aufgabe V2).

Satz 2.47. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweisidee. Man bildet $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ injektiv in $\mathbb{R}$ ab, indem man eine 0-1-Folge als Ziffernfolge im Dreiersystem liest, mit den Ziffern 0 und 2. Dass die so gebildeten Summen konvergieren, sichert Satz 2.33; dass verschiedene Folgen verschiedene Zahlen ergeben, liegt an der Lücke, die der Verzicht auf die Ziffer 1 lässt. Im Zweiersystem mit den Ziffern 0 und 1 ginge es nicht: Die Folgen $(0,1,1,1,\dots)$ und $(1,0,0,0,\dots)$ haben die Teilsummen $\frac{1}{2} - 2^{-n}$ (für $n \ge 2$) und $\frac{1}{2}$, also denselben Grenzwert $\frac{1}{2}$, aus demselben Grund wie $0{,}999\dots = 1$ in Beispiel 1.

Beweis. Für $\epsilon = (\epsilon_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sei $s_n(\epsilon) = \sum_{k=1}^{n} 2\epsilon_k 3^{-k}$. Nach der geometrischen Summe

(Satz 1.13) ist für $m > n$

$$\sum_{k=n+1}^{m} 2 \cdot 3^{-k} = \frac{2}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - 3^{-(m-n)}}{1 - \frac{1}{3}} = 3^{-n}\big(1 - 3^{-(m-n)}\big) < 3^{-n},$$

also $0 \le s_m(\epsilon) - s_n(\epsilon) < 3^{-n} \le \frac{1}{n}$ (Bernoulli: $3^n \ge 1 + 2n > n$). Nach Satz 2.29 ist damit $(s_n(\epsilon))$ eine Cauchy-Folge und konvergiert nach Satz 2.33 gegen eine Zahl $\Phi(\epsilon) \in \mathbb{R}$.

Φ ist injektiv: Seien $\epsilon \neq \epsilon'$ und j die erste Stelle mit $\epsilon_j \neq \epsilon'_j$. Für $n \ge j$ ist

$$s_n(\epsilon) - s_n(\epsilon') = \pm 2 \cdot 3^{-j} + \sum_{k=j+1}^{n} 2(\epsilon_k - \epsilon'_k) 3^{-k},$$

und der Betrag der Summe ist höchstens $\sum_{k=j+1}^{n} 2 \cdot 3^{-k} < 3^{-j}$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|s_n(\epsilon) - s_n(\epsilon')| \ge 2 \cdot 3^{-j} - 3^{-j} = 3^{-j}$ für alle $n \ge j$. Nach Lemma 2.16 (3) und (5) gilt $|s_n(\epsilon) - s_n(\epsilon')| \to |\Phi(\epsilon) - \Phi(\epsilon')|$, nach Lemma 2.16 (4) also $|\Phi(\epsilon) - \Phi(\epsilon')| \ge 3^{-j} > 0$.

Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so gäbe es eine Injektion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ (Lemma 2.44), und $g \circ \Phi$ wäre eine Injektion $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$, im Widerspruch zu Satz 2.46. □

Folgerung 2.48. Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Angenommen, es gibt Injektionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Dann ist $h(x) = 2f(x)$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $h(x) = 2g(x) - 1$ für $x \notin \mathbb{Q}$ eine Injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$, denn gerade und ungerade Werte können nicht zusammenfallen. Das widerspricht Satz 2.47. Nach Satz 2.45 existiert f; also existiert g nicht. □

Man hätte versuchen können, die Lücken von $\mathbb{Q}$ einzeln zu schließen und nur die fehlenden Wurzeln hinzuzunehmen. Das reicht bei weitem nicht.

Folgerung 2.49. Die Menge $W = \{\sqrt[k]{r} : r \in \mathbb{Q},\ r \ge 0,\ k \in \mathbb{N}\}$ aller Wurzeln nicht negativer rationaler Zahlen ist abzählbar, und $\mathbb{R} \setminus W$ ist überabzählbar.

Beweis. Nach Satz 2.45 und Lemma 2.44 gibt es eine Injektion $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$; sei f die Injektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aus dem Beweis von Satz 2.45. Dann ist $(r,k) \mapsto f(g(r),k)$ eine Injektion der Paarmenge $\Pi = \{(r,k) : r \in \mathbb{Q},\ r \ge 0,\ k \in \mathbb{N}\}$ nach $\mathbb{N}$, denn aus $f(g(r),k) = f(g(r'),k')$ folgt $g(r) = g(r')$ und $k = k'$, also $r = r'$. Die Menge Π ist nicht leer, denn $(0,1) \in \Pi$. Nach Lemma 2.44 gibt es eine Surjektion $\mathbb{N} \to \Pi$, nach Verkettung mit der Abbildung $\Pi \to W$, $(r,k) \mapsto \sqrt[k]{r}$ (Satz 2.39), also eine Surjektion $\mathbb{N} \to W$. Nach Lemma 2.44 ist W abzählbar. Der Beweis von Folgerung 2.48 benutzt von $\mathbb{Q}$ nur eine Injektion nach $\mathbb{N}$; wörtlich wie dort, mit W an Stelle von $\mathbb{Q}$, folgt, dass $\mathbb{R} \setminus W$ überabzählbar ist. □

Die Vollständigkeit fügt also weit mehr hinzu als die Lösungen der Gleichungen, an denen die Lücke zuerst sichtbar wurde: Die Wurzeln rationaler Zahlen bilden eine abzählbare Menge, ihr Komplement in $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

2.8 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt

(G1) Cauchy-Folge ohne Grenzwert. In $\mathbb{Q}$ ist die Heron-Folge eine Cauchy-Folge ohne Grenzwert (Satz 2.18). Die Umkehrung von Lemma 2.15 (1) gilt also nicht in jedem angeordneten Körper; in $\mathbb{R}$ gilt sie (Satz 2.33).

(G2) Beschränkt ohne Supremum. In $\mathbb{Q}$ hat $\{x : x \geq 0,\ x^2 < 2\}$ kein Supremum (Satz 2.11); in $\mathbb{R}$ ist es $\sqrt{2}$.

(G3) Strenge Ungleichungen gehen verloren. Alle Glieder von $(\frac{1}{n})$ sind positiv, aber $[\frac{1}{n}] = 0$. Deshalb verlangt Definition 2.24 einen festen Abstand δ von der Null, und Lemma 2.16 (4) sowie Lemma 2.27 gelten nur mit „$\leq$“. Ohne δ wäre $[\frac{1}{n}]$ zugleich positiv und null, und (Pos1) wäre verletzt.

(G4) Ohne Cauchy-Bedingung kein Körper. Ersetzt man in Definition 2.19 die Cauchy-Folgen durch alle beschränkten rationalen Folgen, so bleiben Satz 2.22 und die Rechengesetze (K1)–(K3), (K5) sowie das additive Inverse erhalten; der Beweis ist derselbe, denn er benutzte nur die Beschränktheit. Aber für $u = (1, 0, 1, 0, \dots)$ und $v = (0, 1, 0, 1, \dots)$ ist $uv = (0, 0, 0, \dots)$, während weder u noch v eine Nullfolge ist. Es gilt also $[u] \cdot [v] = 0$ mit $[u] \neq 0 \neq [v]$, im Widerspruch zu Lemma 2.2 (4). An dieser Stelle versagt das Trennungslemma 2.17: u ist keine Nullfolge, bleibt aber nicht von der Null getrennt.

(G5) Inverse brauchen die Abänderung und die Trennung. Die Folge $(0, 1, 1, 1, \dots)$ ist eine Cauchy-Folge mit der Klasse 1, aber $\frac{1}{a_1}$ existiert nicht. Deshalb ändert der Beweis von Satz 2.23 endlich viele Glieder ab. Dass alle Glieder von null verschieden sind, macht $(\frac{1}{a_n})$ dagegen noch nicht zu einer Cauchy-Folge: $(\frac{1}{n})$ hat nur von null verschiedene Glieder, aber $(\frac{1}{a_n}) = (n)$ ist nicht einmal beschränkt. Hier ist $[\frac{1}{n}] = 0$. Erst aus der Voraussetzung $[a_n] \neq 0$ liefert das Trennungslemma die Schranke $|a_n| \geq \delta$, die $(\frac{1}{a'_n})$ zur Cauchy-Folge macht.

(G6) Ein Körper, der sich nicht anordnen lässt. In $\mathbb{F}_2$ ist $1 + 1 = 0$, in jedem angeordneten Körper aber $1 + 1 > 0$ (Folgerung 2.5). Auch der Körper der komplexen Zahlen lässt sich nicht anordnen (Einheit 3): Dort wäre $-1 = i^2 > 0$ nach (O3).

(G7) Supremum ohne Maximum. $A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hat das Supremum 1, aber $1 \notin A$. Denn 1 ist obere Schranke, und zu $t < 1$ gibt es nach Satz 2.29 ein n mit $\frac{1}{n} < 1 - t$, also $1 - \frac{1}{n} > t$. Die Supremumseigenschaft verspricht eine kleinste obere Schranke, kein größtes Element.

2.9 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 ($0{,}999\ldots = 1$). Sei $a_n = 1-10^{-n}$, also 0,9; 0,99; 0,999; ... Wegen $10^n \geq 1+9n > n$ (Bernoulli) ist $|1-a_n| = 10^{-n} < \frac{1}{n}$. Nach Lemma 2.13 und Lemma 2.16 (2) gilt also $a_n \to 1$ in $\mathbb{Q}$; nach Lemma 2.15 (1) ist (a_n) eine rationale Cauchy-Folge, und $(a_n) \sim (1)$, das heißt $[a_n] = 1$. Verschieden aussehende Folgen vertreten dieselbe reelle Zahl, obwohl jedes einzelne a_n kleiner als 1 ist. Das ist (G3) in vertrauter Form.

Beispiel 2 (Fehlerschranke für die Heron-Folge). Mit Satz 2.39 ist $\sqrt{2}$ vorhanden, und man kann den Abstand zur Heron-Folge abschätzen. Wegen $x_n \geq 1$ und $\sqrt{2} \geq 1$ ist $x_n+\sqrt{2} \geq 2$, also

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n + \sqrt{2}} \leq \frac{e_n}{2} \leq 4^{1-n}.$$

Wegen $4^{1-n} \leq \frac{1}{n}$ (Satz 2.18) und der Bemerkung nach Satz 2.29 folgt $x_n \to \sqrt{2}$. Nach Lemma 2.32 konvergiert (x_n) auch gegen ihre Klasse, und weil ein Grenzwert eindeutig ist (Lemma 2.16 (1)), gilt $[x_n] = \sqrt{2}$. Das ist die Antwort auf die Leitfrage: Die Zahl, der die Heron-Folge zustrebt, ist die Klasse aller rationalen Cauchy-Folgen, deren Abstand zu ihr eine Nullfolge ist, darunter die Folge $(\frac{2}{x_n})$ aus Abschnitt 2.4, und diese Klasse ist die positive Lösung von $y^2 = 2$. Für $n = 4$ ist $e_4 = \frac{577^2-2\cdot 408^2}{408^2} = \frac{332929-332928}{166464} = \frac{1}{166464}$, also $0 \leq \frac{577}{408} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{332928} < \frac{1}{300000}$. Die allgemeine Schranke 4^{-3} ist viel gröber. Schärfer ist die Rekursion $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{8}$ aus dem Beweis von Satz 2.18: Aus $e_4 = \frac{1}{166464}$ folgt $e_5 \leq \frac{1}{8\cdot 166464^2} < 5\cdot 10^{-12}$, also $0 \leq x_5 - \sqrt{2} \leq \frac{e_5}{2} < 3\cdot 10^{-12}$.

Beispiel 3 (Supremum und Infimum). Sei $M = \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Die ersten Elemente sind 0, $\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{4}{5}$. Für gerades n ist das Element $1+\frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$, für ungerades $-1+\frac{1}{n} \leq 0$. Also ist $\frac{3}{2}$ obere Schranke und liegt in M ($n = 2$): $\sup M = \max M = \frac{3}{2}$. Jedes Element ist größer als -1, denn $\pm 1 + \frac{1}{n} > -1$. Zu $t > -1$ gibt es n mit $\frac{1}{n} < t + 1$, und für die ungerade Zahl $2n + 1$ ist $-1 + \frac{1}{2n+1} < -1 + \frac{1}{n} < t$. Also ist $\inf M = -1$, und M hat kein Minimum.

Beispiel 4 (Ein Bruch zwischen $\sqrt{2}$ und $\frac{3}{2}$). Wir führen den Beweis von Satz 2.31 für $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{3}{2}$ aus. Nach Beispiel 2 ist $\sqrt{2} \leq \frac{17}{12}$, also $y - x \geq \frac{3}{2} - \frac{17}{12} = \frac{1}{12}$; da $\frac{17}{12}$ rational ist und $\sqrt{2}$ nicht, gilt sogar $>$. Damit leistet $n = 12$ das Verlangte: $12(y - x) > 1$. Weiter ist $\lfloor 12\sqrt{2} \rfloor = 16$, denn $16^2 = 256 \leq 288 = (12\sqrt{2})^2 < 289 = 17^2$ und Lemma 2.38. Also ist $m = 17$ und $r = \frac{17}{12}$, tatsächlich $\sqrt{2} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$. Das Verfahren findet hier gerade ein Glied der Heron-Folge.

2.10 Ausblick

- **Vollständigkeit** unterscheidet von nun an $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$. In dieser Einheit erscheint sie in zwei Gestalten, als Cauchy-Vollständigkeit (Satz 2.33) und als Supremumseigenschaft (Satz 2.34). Einheit 5 vergleicht ihre Formen, darunter Supremumseigenschaft, Cauchy-Kriterium, Intervallschachtelung (vorbereitet in Aufgabe B5 dieser Einheit) und den Satz von Bolzano-Weierstraß, und zeigt, dass die Cauchy-Vollständigkeit nur zusammen mit der archimedischen Eigenschaft gleichwertig zur Supremumseigenschaft ist. Fast jeder spätere Hauptsatz, etwa Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum und Mittelwertsatz, beruht auf ihr; die späteren Einheiten weisen die Stelle aus.
- **Folgen** wurden hier nur so weit behandelt, wie die Konstruktion es verlangte. Einheit 4 nimmt Konvergenz, Rechenregeln und monotone Folgen in $\mathbb{R}$ auf, Einheit 6 die Reihen; dort werden auch Dezimalbrüche und die Ziffernentwicklung aus Satz 2.47 zu konvergenten Reihen.
- **Wurzeln** sind die ersten Umkehrfunktionen. Ihre Existenz folgt in Einheit 7 erneut, dann aus dem Zwischenwertsatz; allgemeine Potenzen x^a mit reellem a kommen mit Exponentialfunktion und Logarithmus in Einheit 9.
- **Komplexe Zahlen** (Einheit 3) bilden einen Körper, der $\mathbb{R}$ enthält, sich aber nicht anordnen lässt (G6).
- **Nicht archimedische Körper.** Es gibt angeordnete Körper, in denen $\mathbb{N}$ beschränkt ist; ein Beispiel gibt Einheit 5, (G2). Nach der Bemerkung im Anschluss an Folgerung 2.35 haben sie nicht die Supremumseigenschaft, und Satz 2.41 ist auf sie nicht anwendbar. Im Kurs dienen sie nur als Gegenbeispiele.
- **Größe.** Die Bildmenge der Abbildung Φ aus Satz 2.47 heißt *Cantor-Menge*. Sie ist nach Satz 2.47 überabzählbar und enthält doch kein Intervall positiver Länge (ohne Beweis). In der Maß- und Integrationstheorie, jenseits dieses Kurses, sind abzählbare Mengen die einfachsten Beispiele von Nullmengen.
- **Mächtigkeit.** Zwei Mengen heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion zwischen ihnen gibt. $\mathbb{R}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sind gleichmächtig; bewiesen sind hier nur Injektionen in beide Richtungen. Die erste ist $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, zusammengesetzt aus der Indikatorfolge (Aufgabe V2) und Φ. Die zweite ist $\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$; sie ist injektiv, denn zu $x < y$ gibt es nach Satz 2.31 ein rationales r mit $x < r < y$, das in der Menge zu y liegt und nicht in der zu x. Eine Bijektion $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ (Satz 2.45) liefert schließlich die Bijektion $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $T \mapsto g(T)$. Dass aus Injektionen in beide Richtungen eine Bijektion folgt, ist der Satz von Cantor-Bernstein-Schröder (ohne Beweis; er braucht kein Auswahlaxiom). Ob jede überabzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist, ist die Kontinuumshypothese. Sie lässt sich mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre, sofern diese widerspruchsfrei sind, weder beweisen noch widerlegen (ohne Beweis).

- **Vervollständigung.** Dasselbe Verfahren, Cauchy-Folgen modulo Nullfolgen, macht später jeden metrischen Raum vollständig. Dort hat der Abstand Werte in $\mathbb{R}$. Bei der Konstruktion von $\mathbb{R}$ selbst durfte er nur Werte in $\mathbb{Q}$ haben (Definition 2.6), und deshalb sind ε, δ und alle Schranken in Abschnitt 2.4 rational. Mit einem anderen Betrag auf $\mathbb{Q}$, dem p-adischen, entstehen so die p-adischen Zahlen. Sie bilden einen Körper, der sich nicht anordnen lässt (ohne Beweis).

Zum Vergleich.[1] Parallel lesen kann man etwa O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, Springer Spektrum 2016, § 2 bis § 6 und § 9. Dort werden die reellen Zahlen durch Axiome eingeführt, archimedische Eigenschaft und Vollständigkeit eingeschlossen (§ 3 und § 5); hier werden beide aus der Konstruktion von $\mathbb{R}$ bewiesen, und die Wurzeln ergeben sich über das Supremum statt, wie in § 6, über die Konvergenz eines Iterationsverfahrens. In eigener Formulierung folgt die Einheit dieser Darstellung an folgenden Stellen: Die Anordnung über eine Menge positiver Elemente in Definition 2.3 entspricht den Anordnungs-Axiomen in § 3 (S. 25). Die Beispiele $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_2$ nach Definition 2.1 und die Bemerkung, dass sich $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{C}$ nicht anordnen lassen (nach Folgerung 2.5 und in (G6)), folgen den Beispielen in § 2 (S. 23) und der Bemerkung in § 3 (S. 28). Die Heron-Folge mit dem Startwert 2, die Identitäten für $x_{n+1}^2 - 2$ und $x_{n+1} - x_n$ in Satz 2.18, die entsprechende Identität für $x_{n+1}^2 - 3$ in Aufgabe R1 sowie die Begleitfolge $\frac{2}{x_n}$ in Abschnitt 2.4 und Aufgabe B5 folgen § 6, Satz 1, und dem Numerischen Beispiel (S. 62–64); Fehlerschranken, Cauchy-Nachweis und die Rolle der Folge in der Konstruktion sind eigenständig. Die Aussagen von Aufgabe B4 sind die von § 3, Satz 3 (S. 32–33); die Lösung geht über das Infimum einen anderen Weg. Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ behandelt § 9 mit anderen Beweisen (Diagonalschema und Dezimalziffern dort, Injektionen nach $\mathbb{N}$ und 0-1-Folgen mit Dreierziffern hier); die Existenz des Supremums beweist § 9, Satz 3 ebenfalls durch fortgesetzte Halbierung, mit anderen Invarianten und über monotone Folgen. Im *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage, Vieweg+Teubner 2011, behandeln Aufgabe 2 E und Aufgabe 9 A (b) allgemeiner beziehungsweise im Sonderfall denselben Gegenstand wie hier Aufgabe B3 (a) und Aufgabe V2.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 2

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Sei $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{3}{2x_n}$.

(a) Berechnen Sie x_2, x_3 sowie $x_2^2 - 3$ und $x_3^2 - 3$.

(b) Zeigen Sie durch Induktion, dass alle x_n rational und positiv sind, die Folge also wohldefiniert ist, und dass $x_{n+1}^2 - 3 = \frac{(x_n^2 - 3)^2}{4x_n^2}$ für alle n gilt. Folgern Sie $x_n^2 \geq 3$ für alle n.

(c) Folgern Sie mit Satz 2.39: $0 \leq x_3 - \sqrt{3} \leq \frac{1}{6272}$.

R2. Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob sie Maximum oder Minimum besitzen:

(a) $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(b) $B = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 2x < 2\}$.

R3. Gegeben sind die rationalen Folgen $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$, $c_n = (-1)^n$, $d_n = 1 + 10^{-n}$. Welche sind Cauchy-Folgen? Welche sind zueinander äquivalent, und welche reelle Zahl stellen sie dar? Ist $[a_n] > 1$, weil alle $a_n > 1$ sind?

R4. Führen Sie das Verfahren aus dem Beweis von Satz 2.31 für $x = \sqrt{3}$ und $y = \frac{7}{4}$ aus. Benutzen Sie dabei das Ergebnis von R1 und bestimmen Sie $\lfloor 56\sqrt{3} \rfloor$ ohne Dezimalnäherung.

R5. Zum ganzen Teil (Lemma 2.30):

(a) Bestimmen Sie $\lfloor -\frac{7}{2} \rfloor$ und $\lfloor \sqrt{50} \rfloor$.

(b) Zeigen Sie $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

R6. Sei $a_n = \frac{n-2}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) eine rationale Cauchy-Folge ist, und bestimmen Sie die reelle Zahl $[a_n]$.

(b) Geben Sie ein rationales $\delta > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \delta$ für alle $n \geq N$ an. Was folgt nach Definition 2.24? Wäre die Beobachtung „$a_n > 0$ für alle $n \geq 3$“ allein ein Nachweis von $[a_n] > 0$?

(c) Führen Sie mit Ihren δ und N die Konstruktion des Inversen aus dem Beweis von Satz 2.23 aus: Geben Sie (a'_n) und $b_n = \frac{1}{a'_n}$ explizit an, zeigen Sie direkt, dass (b_n) eine Cauchy-Folge ist, und bestimmen Sie $[b_n]$. Warum kann man nicht einfach $b_n = \frac{1}{a_n}$ für alle n setzen?

Stufe B – Beweisen

B1. Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie:

(a) Aus $x < y$ folgt $x < \frac{x+y}{2} < y$.

(b) Für $x, y \geq 0$ gilt $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$.

(c) Zwischen zwei Elementen $x < y$ von K liegen unendlich viele Elemente von K.

B2. Sei $(a_n) \in \mathcal{C}$ und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng wachsend. Zeigen Sie, dass $(a_{\varphi(n)})$ eine Cauchy-Folge ist und dieselbe reelle Zahl darstellt wie (a_n). Folgern Sie, dass $[a_{n+1}] = [a_n]$ gilt.

B3. Rationale und irrationale Zahlen.

(a) Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $r + z \notin \mathbb{Q}$ und, falls $r \neq 0$, $rz \notin \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: Zu reellen Zahlen $x < y$ gibt es ein $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$.

B4. Potenzen.

(a) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$. Zeigen Sie, dass (q^n) eine Nullfolge ist. Hinweis: Vergleichen Sie für $q > 0$ das Infimum s von $\{q^n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\frac{s}{q}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Folgern Sie aus (a), dass es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein n mit $a^n > C$ gibt. Wo geht in Ihrer Lösung die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein?

B5. (Intervallschachtelung) Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n, und $(b_n - a_n)$ sei eine Nullfolge.

(a) Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n gibt.

(b) Sei (x_n) die Heron-Folge aus Satz 2.18. Zeigen Sie, dass $a_n = \frac{2}{x_n}$ und $b_n = x_n$ die Voraussetzungen erfüllen, und bestimmen Sie x.

(c) Folgern Sie, dass die Aussage aus (a) in $\mathbb{Q}$ falsch ist.

B6. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und beschränkt, $\lambda \in \mathbb{R}$, λA wie in Lemma 2.36 und $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.

(a) Folgern Sie aus Lemma 2.36 (3) und Folgerung 2.35: Für $\lambda > 0$ ist $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$, für $\lambda < 0$ ist $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$.

(b) Zeigen Sie: Aus $A \subseteq B$ folgt $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. Ferner ist $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

(c) Seien zusätzlich alle Elemente von A und B nicht negativ. Zeigen Sie $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

(d) Zeigen Sie an $A = B = \{-2, 1\}$, dass (c) ohne die Vorzeichenbedingung falsch ist, und nennen Sie die Stelle Ihres Beweises, an der sie gebraucht wird.

B7. (Wohldefiniertheit) Sei $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\sim$ wie in Definition 2.21.

(a) Zeigen Sie, dass die Vorschrift $[a_n] \mapsto a_1$ keine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ erklärt.

(b) Man könnte versuchen, $[a_n] \lhd [b_n]$ zu erklären durch: Es gibt ein N mit $a_n < b_n$ für alle $n \geq N$. Zeigen Sie, dass diese Vorschrift von der Wahl der Repräsentanten abhängt. Welche Forderung aus Definition 2.24 fehlt?

(c) Zeigen Sie: Mit $(a_n) \in \mathcal{C}$ ist $(|a_n|) \in \mathcal{C}$, die Vorschrift $[a_n] \mapsto [|a_n|]$ ist wohldefiniert, und es gilt $[|a_n|] = |[a_n]|$, rechts der Betrag im angeordneten Körper $\mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie für $(a_n), (b_n) \in \mathcal{C}$: Es gilt $[a_n] \leq [b_n]$ genau dann, wenn es zu jedem rationalen $\varepsilon > 0$ ein N mit $a_n \leq b_n + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gibt.

B8. (Abzählbare Vereinigungen) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen, und für jedes n sei eine surjektive Abbildung $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ gegeben; die Familie (f_n) gehört zur Voraussetzung.

(a) Zeigen Sie, dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ abzählbar ist.

(b) Sei $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie mit (a), dass A abzählbar ist, und folgern Sie, dass es überabzählbar viele reelle Zahlen x gibt, für die x^2 irrational ist. Geben Sie eine solche Zahl explizit an.

(c) An welcher Stelle bräuchte man eine Auswahl, wenn nur bekannt wäre, dass jedes X_n abzählbar und nicht leer ist?

Stufe V – Vertiefen

V1. Suprema in angeordneten Körpern.

(a) Sei K ein archimedisch angeordneter Körper, $A \subseteq K$ nicht leer und s eine obere Schranke von A. Zeigen Sie: Genau dann ist $s = \sup A$, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a \in A$ mit $a > s - \frac{1}{n}$ gibt.

(b) Sei K ein angeordneter Körper, in dem es ein t mit $0 < t < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt (vergleiche den Absatz nach Definition 2.14; ein solcher Körper kommt in Einheit 5 vor). Zeigen Sie mit $A = \{x \in K : x \leq -t\}$ und $s = 0$, dass die Aussage aus (a) in K falsch ist.

(c) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt, $A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}$. Zeigen Sie $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

V2. Der Satz von Cantor.

(a) Sei X eine Menge und $f : X \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $D = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ nicht im Bild von f liegt. Es gibt also keine surjektive Abbildung $X \to \mathcal{P}(X)$.

(b) Geben Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ an und vergleichen Sie die Menge D für $X = \mathbb{N}$ mit der Folge (d_k) aus dem Beweis von Satz 2.46.

V3. Sei $\Phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ die Abbildung aus dem Beweis von Satz 2.47.

(a) Zeigen Sie $0 \le \Phi(\epsilon) \le 1$ für alle ϵ.

(b) Seien $a < b$ reell. Zeigen Sie, dass das Intervall (a, b) überabzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$ überabzählbar ist.

V4. Man wiederhole die Konstruktion mit $\mathbb{R}$ an Stelle von $\mathbb{Q}$: Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$, $(x_n) \sim (y_n)$, wenn $(x_n - y_n)$ eine Nullfolge ist, und $\varkappa : \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})/\!\sim$, $\varkappa(x) = [x]$ die Klasse der konstanten Folge. Zeigen Sie, dass $\varkappa$ bijektiv ist und mit den gliedweise erklärten Verknüpfungen verträglich ist. Warum ist die entsprechende Abbildung $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv?

V5. Sei $\mathcal{J}$ eine Menge offener Intervalle (a, b) mit $a < b$, die paarweise disjunkt sind: Für $I, J \in \mathcal{J}$ mit $I \neq J$ ist $I \cap J = \emptyset$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{J}$ abzählbar ist. Hinweis: Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ die Injektion aus dem Beweis von Satz 2.45; ordnen Sie $I \in \mathcal{J}$ das kleinste Element von $f(I \cap \mathbb{Q})$ zu.

(b) Wo geht $a < b$ ein? Zeigen Sie, dass die Intervalle $[x, x]$, $x \in \mathbb{R}$, paarweise disjunkt sind und eine überabzählbare Menge bilden.

(c) Wird in (a) das Auswahlaxiom benutzt?

V6. (Dezimalnäherungen) Sei $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $m_n = \lfloor 10^n x \rfloor$ und $x_n = \frac{m_n}{10^n}$.

(a) Zeigen Sie $x_n \le x < x_n + 10^{-n}$ sowie $10m_n \le m_{n+1} \le 10m_n + 9$, und folgern Sie $x_n \le x_{n+1}$ und $x_{n+1} + 10^{-(n+1)} \le x_n + 10^{-n}$.

(b) Zeigen Sie mit Aufgabe B5, dass x die einzige reelle Zahl ist, die in allen Intervallen $[x_n, x_n + 10^{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, liegt. Zeigen Sie ferner, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Cauchy-Folge mit $[x_n] = x$ ist.

(c) Bestimmen Sie (x_n) für $x = 1$. Zeigen Sie: Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n = 1 - 10^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Vergleichen Sie mit Beispiel 1 des Kapitels.

(d) Sei $z_k = m_k - 10m_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $z_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ und $x_n = m_0 + \sum_{k=1}^{n} z_k 10^{-k}$.

Lösungen

Lösung R1. (a) $x_2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ und $x_3 = \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7}{8} + \frac{6}{7} = \frac{97}{56}$. Ferner $x_2^2 - 3 = \frac{49}{16} - \frac{48}{16} = \frac{1}{16}$ und $x_3^2 - 3 = \frac{9409}{3136} - \frac{9408}{3136} = \frac{1}{3136}$.

(b) Mit $x = x_n$ ist $x_{n+1} = \frac{x^2+3}{2x}$, also

$$x_{n+1}^2 - 3 = \frac{x^4 + 6x^2 + 9 - 12x^2}{4x^2} = \frac{(x^2-3)^2}{4x^2}.$$

Kontrolle: $\frac{(1/16)^2}{4 \cdot 49/16} = \frac{1}{256} \cdot \frac{4}{49} = \frac{1}{3136}$. Die Rechnung setzt $x_n \neq 0$ voraus. Durch Induktion: $x_1 = 2$ ist rational und positiv; ist x_n rational und positiv, so auch $x_{n+1} = \frac{x_n^2+3}{2x_n}$. Damit ist die Folge nach dem Rekursionssatz auf $\{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0\}$ erklärt, wie in Satz 2.18, und die Identität gilt für jedes n. Ihre rechte Seite ist nicht negativ, also $x_{n+1}^2 \geq 3$ für alle n; zusammen mit $x_1^2 = 4 \geq 3$ folgt $x_n^2 \geq 3$ für alle n.

(c) Nach Satz 2.39 existiert $\sqrt{3} \geq 0$. Aus $x_3^2 \geq 3$ folgt $x_3 \geq \sqrt{3} \geq 1$ (Lemma 2.38), also $x_3 + \sqrt{3} \geq 2$ und

$$0 \leq x_3 - \sqrt{3} = \frac{x_3^2 - 3}{x_3 + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{2 \cdot 3136} = \frac{1}{6272}.$$

Lösung R2. (a) Es ist $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Wegen $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ wächst die Folge streng; das kleinste Element ist $\frac{1}{2}$ $(n = 1)$, also $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$. Die Zahl 1 ist obere Schranke. Zu $t < 1$ gibt es nach Satz 2.29 ein n mit $\frac{1}{n} < 1 - t$, dann ist $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < 1 - t$, also $\frac{n}{n+1} > t$. Somit $\sup A = 1$; ein Maximum gibt es nicht, weil alle Elemente kleiner als 1 sind.

(b) Es ist $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$ mit Gleichheit für $m = n = 1$, also $\sup B = \max B = 2$. Alle Elemente sind positiv, 0 ist untere Schranke. Zu $t > 0$ gibt es nach Satz 2.29 ein n mit $\frac{1}{n} < \frac{t}{2}$, also $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} < t$; damit ist $\inf B = 0$. Ein Minimum gibt es nicht, weil $0 \notin B$.

(c) Wegen $0^2 + 2 \cdot 0 = 0 < 2$ ist $0 \in C$, also C nicht leer. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $x^2 + 2x < 2$ nach (O1) genau dann, wenn $(x+1)^2 < 3$. Wegen $(x+1)^2 = |x+1|^2$ und $3 = (\sqrt{3})^2$ (Satz 2.39) ist das nach der Hilfsaussage in Abschnitt 2.2, angewandt auf $|x+1| \geq 0$ und $\sqrt{3} \geq 0$, gleichwertig mit $|x+1| < \sqrt{3}$, das heißt mit $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$. Insbesondere ist $-1 + \sqrt{3}$ obere Schranke von C. Sei $t < -1 + \sqrt{3}$. Wegen $-1 - \sqrt{3} < -1 + \sqrt{3}$ gibt es nach Satz 2.31 ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $\max\{t, -1 - \sqrt{3}\} < r < -1 + \sqrt{3}$; dann ist $r \in C$ und $r > t$. Also ist $\sup C = -1 + \sqrt{3}$. Ebenso ist $-1 - \sqrt{3}$ untere Schranke, und zu $t > -1 - \sqrt{3}$ gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $-1 - \sqrt{3} < r < \min\{t, -1 + \sqrt{3}\}$, also $r \in C$ und $r < t$; somit ist $\inf C = -1 - \sqrt{3}$. Für $x = -1 \pm \sqrt{3}$ ist $(x+1)^2 = 3$, also $x^2 + 2x = 2$; Supremum

und Infimum liegen nicht in C, und es gibt weder Maximum noch Minimum. Ob $\sqrt{3}$ rational ist, spielt für diese Argumentation keine Rolle.

Lösung R3. Es ist $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, $|b_n - 1| = \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}$ und $|d_n - 1| = 10^{-n} < \frac{1}{n}$ (wegen $10^n \ge 1 + 9n > n$ nach Bernoulli). Nach Lemma 2.13 ist $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge in $\mathbb{Q}$, nach Lemma 2.16 (2) sind es auch $(a_n - 1)$, $(b_n - 1)$, $(d_n - 1)$. Also konvergieren (a_n), (b_n), (d_n) in $\mathbb{Q}$ gegen 1, sind nach Lemma 2.15 (1) Cauchy-Folgen und sind äquivalent zur konstanten Folge (1), nach Lemma 2.20 also auch untereinander. Alle drei stellen die Zahl 1 dar.

(c_n) ist keine Cauchy-Folge: Es ist $|c_{n+1} - c_n| = 2$ für jedes n; zu $\varepsilon = 1$ gibt es also kein passendes N.

$[a_n] > 1$ gilt nicht, denn $[a_n] = 1$. Aus $a_n > 1$ für alle n folgt nach Lemma 2.27 nur $[a_n] \ge 1$; das ist (G3).

Lösung R4. Nach R1 ist $x_3 = \frac{97}{56}$ und $\sqrt{3} \le \frac{97}{56}$; Gleichheit ist ausgeschlossen, weil $(\frac{97}{56})^2 \ne 3$. Also ist $y - x > \frac{7}{4} - \frac{97}{56} = \frac{98-97}{56} = \frac{1}{56}$, und $n = 56$ erfüllt $n(y - x) > 1$. Weiter ist $(56\sqrt{3})^2 = 3136 \cdot 3 = 9408$ und

$$96^2 = 9216 \le 9408 < 9409 = 97^2,$$

nach Lemma 2.38 also $96 \le 56\sqrt{3} < 97$ und $\lfloor 56\sqrt{3} \rfloor = 96$. Damit ist $m = 97$ und $r = \frac{97}{56}$. Probe: $\sqrt{3} < \frac{97}{56} < \frac{98}{56} = \frac{7}{4}$. Wie in Beispiel 4 des Kapitels liefert das Verfahren ein Glied der zugehörigen Heron-Folge, hier x_3 aus R1. Das gewählte $n = 56$ ist übrigens das kleinste mögliche: Wegen $\left(\frac{381}{220}\right)^2 = \frac{145161}{48400} < \frac{145200}{48400} = 3$ ist $\frac{381}{220} < \sqrt{3}$ (Lemma 2.38), also $55\left(\frac{7}{4} - \sqrt{3}\right) < 55\left(\frac{7}{4} - \frac{381}{220}\right) = 55 \cdot \frac{4}{220} = 1$, und für $n < 55$ ist $n\left(\frac{7}{4} - \sqrt{3}\right)$ noch kleiner.

Lösung R5. (a) $-4 \le -\frac{7}{2} < -3$, also $\lfloor -\frac{7}{2} \rfloor = -4$ (nicht -3: der ganze Teil rundet nach unten, nicht zur Null hin). Aus $7^2 = 49 \le 50 < 64 = 8^2$ folgt mit Lemma 2.38 $7 \le \sqrt{50} < 8$, also $\lfloor \sqrt{50} \rfloor = 7$.

(b) Sei $m = \lfloor x \rfloor$, also $m \le x < m+1$. Nach (O1) und (O5) ist $m+k \le x+k < (m+k)+1$, und $m + k \in \mathbb{Z}$. Wegen der Eindeutigkeit in Lemma 2.30 ist $\lfloor x + k \rfloor = m + k$.

Lösung R6. (a) Es ist $a_n = 1 - \frac{3}{n+1}$, also $|a_n - 1| = \frac{3}{n+1} \le \frac{3}{n}$. Nach Lemma 2.13 und (O6) ist $(\frac{1}{n})$ eine Nullfolge in $\mathbb{Q}$: Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$, dann ist $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$ für $n \ge N$. Nach Lemma 2.16 (2) sind dann $(\frac{3}{n})$ (Produkt mit der beschränkten konstanten

Folge (3)) und $(a_n - 1)$ Nullfolgen. Also gilt $a_n \to 1$ in $\mathbb{Q}$, (a_n) ist nach Lemma 2.15 (1) eine Cauchy-Folge, und wegen $(a_n - 1) \in \mathcal{N}$ ist $(a_n) \sim (1)$, das heißt $[a_n] = \iota(1) = 1$.

(b) Für $n \geq 5$ ist $n + 1 \geq 6$, nach (O6) also $\frac{3}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ und $a_n \geq \frac{1}{2}$. Mit $\delta = \frac{1}{2}$ und $N = 5$ ist $[a_n] \in P_{\mathbb{R}}$, also $[a_n] > 0$, in Einklang mit $[a_n] = 1$. Für dieses δ ist $N = 5$ das kleinste mögliche, denn $a_4 = \frac{2}{5}$. Die Beobachtung „$a_n > 0$ für $n \geq 3$“ genügt nicht: Definition 2.24 verlangt eine feste Schranke $\delta > 0$, und $(\frac{1}{n})$ hat nur positive Glieder, vertritt aber die Null (G3). Erst die Schranke $\frac{1}{2}$ trägt den Schluss.

(c) Es ist $a'_n = 1$ für $n \leq 4$ und $a'_n = a_n$ für $n \geq 5$, also $(a'_n) = (1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \dots)$, und $b_n = 1$ für $n \leq 4$, $b_n = \frac{n+1}{n-2}$ für $n \geq 5$. Die Abschätzung im Beweis von Satz 2.23 lautet hier $|b_n - b_m| \leq \frac{|a_m - a_n|}{\delta^2} = 4|a_m - a_n|$ für $m, n \geq 5$. Direkt: $b_n = 1 + \frac{3}{n-2}$, und wegen $n - 2 \geq \frac{n}{2}$ für $n \geq 4$ ist $|b_n - 1| \leq \frac{6}{n}$ für $n \geq 5$. Also gilt $b_n \to 1$, (b_n) ist eine Cauchy-Folge (Lemma 2.15 (1)), und $[b_n] = 1$. Probe: $a'_n b_n = 1$ für alle n, also $[a_n] \cdot [b_n] = [a'_n] \cdot [b_n] = [1]$; dabei ist $[a'_n] = [a_n]$, weil $(a'_n - a_n)$ ab $n = 5$ null ist.
Die Vorschrift $b_n = \frac{1}{a_n}$ ist für $n = 2$ nicht erklärt, weil $a_2 = 0$ ist, obwohl $[a_n] = 1$. Das ist (G5): Erst die Abänderung endlich vieler Glieder, die die Klasse nicht ändert, macht die Kehrwerte bildbar, und erst die Schranke $|a_n| \geq \delta$ macht sie zu einer Cauchy-Folge.

Lösung B1. (a) Nach (O5) ist $x + x < x + y < y + y$, also $2x < x + y < 2y$. Wegen $2 > 0$ (Folgerung 2.5) ist $\frac{1}{2} > 0$ nach (O6), und Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ (O5) ergibt die Behauptung.

(b) „$\Rightarrow$“ ist Lemma 2.38 (1) mit $k = 2$. „$\Leftarrow$“: Wäre $x > y$, so wäre nach Lemma 2.38 (1) $x^2 > y^2$, im Widerspruch zu $x^2 \leq y^2$.

(c) Setze $z_1 = \frac{x+y}{2}$ und $z_{n+1} = \frac{x+z_n}{2}$. Nach (a) gilt durch Induktion $x < z_{n+1} < z_n < y$. Die Abbildung $n \mapsto z_n$ ist streng fallend, also injektiv, und bildet $\mathbb{N}$ in $\{z \in K : x < z < y\}$ ab. Eine Menge, in die sich $\mathbb{N}$ injektiv abbilden lässt, ist nicht endlich (Folgerung 2.5, Beweis).

Lösung B2. Zunächst ist $\varphi(n) \geq n$ für alle n, durch Induktion: $\varphi(1) \geq 1$, und aus $\varphi(n) \geq n$ folgt $\varphi(n + 1) > \varphi(n) \geq n$, also $\varphi(n + 1) \geq n + 1$.

Sei $\varepsilon > 0$ rational und N so, dass $|a_k - a_l| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq N$. Für $m, n \geq N$ sind auch $\varphi(m), \varphi(n) \geq N$, also

$$|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(m)}| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad |a_{\varphi(n)} - a_n| < \varepsilon.$$

Die erste Ungleichung zeigt, dass $(a_{\varphi(n)})$ eine Cauchy-Folge ist, die zweite, dass $(a_{\varphi(n)} - a_n)$ eine Nullfolge ist, also $[a_{\varphi(n)}] = [a_n]$. Mit $\varphi(n) = n + 1$ folgt $[a_{n+1}] = [a_n]$: Das Weglassen endlich vieler Anfangsglieder ändert die reelle Zahl nicht.

Lösung B3. (a) Wäre $r+z=s\in\mathbb{Q}$, so wäre $z=s-r\in\mathbb{Q}$, weil $\mathbb{Q}$ unter Subtraktion abgeschlossen ist. Wäre $rz=s\in\mathbb{Q}$ mit $r\neq 0$, so wäre $z=s\cdot r^{-1}\in\mathbb{Q}$. Beides widerspricht $z\notin\mathbb{Q}$.

(b) Nach Satz 2.31, angewandt auf $x-\sqrt{2}<y-\sqrt{2}$ (O5), gibt es $r\in\mathbb{Q}$ mit $x-\sqrt{2}<r<y-\sqrt{2}$. Dann ist $z=r+\sqrt{2}$ zwischen x und y (O1), und nach (a) und Satz 2.39 ist z irrational. Die irrationalen Zahlen liegen also ebenso dicht wie die rationalen; nach Folgerung 2.48 gibt es aber viel mehr von ihnen.

Lösung B4. (a) Für $q=0$ ist $q^n=0$ für alle n. Sei $0<q<1$ und $M=\{q^n\,:\,n\in\mathbb{N}\}$. Alle q^n sind positiv (Pos2); M ist also nicht leer und hat die untere Schranke 0. Nach Folgerung 2.35 existiert $s=\inf M$, und $s\geq 0$. Für jedes n ist $q\cdot q^n=q^{n+1}\geq s$, nach Multiplikation mit $\frac{1}{q}>0$ also $q^n\geq\frac{s}{q}$ ((O2), (O6)). Damit ist $\frac{s}{q}$ eine untere Schranke von M, also $\frac{s}{q}\leq s$. Andererseits ist $\frac{1}{q}>1$ nach (O6), also $\frac{s}{q}-s=s\big(\frac{1}{q}-1\big)\geq 0$ nach (O2). Es folgt $s\big(\frac{1}{q}-1\big)=0$ und wegen $\frac{1}{q}-1\neq 0$ nach Lemma 2.2 (4) $s=0$.

Sei $\varepsilon>0$. Wegen $\varepsilon>0=\inf M$ ist ε keine untere Schranke von M; es gibt also N mit $q^N<\varepsilon$. Für $n>N$ ist $q^{n-N}\leq 1$ nach Lemma 2.38 (1), für $n=N$ ist $q^0=1$; also gilt $0<q^n=q^Nq^{n-N}\leq q^N<\varepsilon$ für alle $n\geq N$ (O2). Somit ist (q^n) eine Nullfolge.

(b) Für $C\leq 0$ leistet jedes n das Verlangte, denn $a^n>0$. Sei $C>0$ und $q=\frac{1}{a}$; nach (O6) ist $0<q<1$. Nach (a) gibt es n mit $q^n<\frac{1}{C}$. Wegen $q^n=\frac{1}{a^n}$ (Absatz nach Lemma 2.2) folgt mit (O6) $a^n>C$.

Die Vollständigkeit geht in (a) über Folgerung 2.35 ein; die Bernoullische Ungleichung und Satz 2.29 werden nicht gebraucht. Das ist kein Zufall: Nach der Bemerkung im Anschluss an Folgerung 2.35 erzwingt die Supremumseigenschaft die archimedische Eigenschaft. Der Weg über die lineare Schranke $a^n\geq 1+n(a-1)$ aus der Bernoullischen Ungleichung und Satz 2.29 braucht von der Vollständigkeit nur die archimedische Eigenschaft.

Lösung B5. (a) *Existenz.* Durch Induktion ist $a_n\leq a_m\leq b_m\leq b_n$ für $m\geq n$. Also ist $|a_m-a_n|\leq b_n-a_n$ für $m\geq n$. Zu $\varepsilon>0$ gibt es N mit $b_n-a_n<\varepsilon$ für $n\geq N$; für $m,n\geq N$, etwa $m\geq n$, folgt $|a_m-a_n|<\varepsilon$. Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge und konvergiert nach Satz 2.33 gegen ein x. Für festes n und alle $m\geq n$ gilt $a_n\leq a_m\leq b_n$; Lemma 2.16 (4), angewandt auf die Folge $(a_m)_m$, ergibt $a_n\leq x\leq b_n$.

Eindeutigkeit. Liegen x und x' in allen Intervallen, so ist $|x-x'|\leq b_n-a_n$ für alle n. Nach Lemma 2.16 (4), angewandt auf die Nullfolge (b_n-a_n), ist $|x-x'|\leq 0$, also $x=x'$.

(b) Nach Satz 2.18 ist $x_n>0$, $x_n^2\geq 2$ und (x_n) fallend. Aus $x_{n+1}\leq x_n$ folgt mit (O6) $\frac{2}{x_n}\leq\frac{2}{x_{n+1}}$, also wächst (a_n). Aus $x_n^2\geq 2$ folgt $\frac{2}{x_n}\leq x_n$. Also $a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$.

Ferner ist

$$b_n - a_n = x_n - \frac{2}{x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{x_n} = \frac{e_n}{x_n} \le e_n \le \frac{2}{n},$$

eine Nullfolge. Wegen $x_n^2 \ge 2 = (\sqrt{2})^2$ und $x_n > 0$ ist $x_n \ge \sqrt{2}$ (Lemma 2.38), nach (O6) also $\frac{2}{x_n} \le \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Damit liegt $\sqrt{2}$ in allen Intervallen; nach (a) ist $x = \sqrt{2}$.

(c) Alle a_n, b_n sind rational. Gäbe es ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $a_n \le x \le b_n$ für alle n, so wäre es nach der Eindeutigkeit in (a), angewandt in $\mathbb{R}$, gleich $\sqrt{2}$, das nicht rational ist. In $\mathbb{Q}$ ist der Durchschnitt der Intervalle also leer.

Lösung B6. (a) Sei $\lambda > 0$. Die Menge $-A$ ist nicht leer und nach oben beschränkt, und $-(\lambda A) = \lambda(-A)$. Mit Folgerung 2.35 und Lemma 2.36 (3) ist

$$\inf(\lambda A) = -\sup\big(\lambda(-A)\big) = -\lambda \sup(-A) = \lambda \inf A.$$

Sei $\lambda < 0$. Dann ist $-(\lambda A) = (-\lambda)A$ mit $-\lambda > 0$, also $\inf(\lambda A) = -\sup\big((-\lambda)A\big) = -(-\lambda)\sup A = \lambda \sup A$.

(b) Ist $A \subseteq B$, so ist $\sup A \le \sup B$ nach Lemma 2.36 (2). Ebenso ist $\inf B$ untere Schranke von A; weil $\inf A$ die größte ist, folgt $\inf B \le \inf A$. Für ein $a \in A$ ist $\inf A \le a \le \sup A$. Sei $m = \max\{\sup A, \sup B\}$. Jedes Element von $A \cup B$ ist höchstens $\sup A$ oder höchstens $\sup B$, also höchstens m; m ist obere Schranke. Ist t obere Schranke von $A \cup B$, so auch von A und von B, also $t \ge \sup A$ und $t \ge \sup B$, das heißt $t \ge m$.

(c) Seien $s = \sup A$ und $t = \sup B$; da die Mengen nicht leer sind und nur nicht negative Elemente haben, ist $s, t \ge 0$. Für $a \in A$, $b \in B$ ist $0 \le a \le s$ und $0 \le b \le t$, nach (O2) also $ab \le sb \le st$ (zuerst mit $b \ge 0$, dann mit $s \ge 0$). Somit ist st obere Schranke von AB. Ist $s = 0$, so ist $A = \{0\}$, also $AB = \{0\}$ und $\sup(AB) = 0 = st$; ebenso für $t = 0$. Seien $s, t > 0$ und $\varepsilon > 0$. Setze $\eta = \min\{s, t, \frac{\varepsilon}{s+t}\} > 0$. Nach Lemma 2.36 (1) gibt es $a \in A$ mit $a > s - \eta \ge 0$ und $b \in B$ mit $b > t - \eta \ge 0$. Wegen $b > 0$ folgt mit (O5) und (O2)

$$ab > (s - \eta)\, b \ge (s - \eta)(t - \eta) = st - \eta(s + t) + \eta^2 \ge st - \varepsilon.$$

Nach Lemma 2.36 (1) ist $\sup(AB) = st$.

(d) Es ist $AB = \{4, -2, 1\}$, also $\sup(AB) = 4$, aber $\sup A \cdot \sup B = 1$. Ebenso ist $\inf(AB) = -2$, aber $\inf A \cdot \inf B = 4$. Im Beweis von (c) bricht der Schritt $ab \le sb$: Nach (O2) darf man $a \le s$ nur mit $b \ge 0$ multiplizieren; für $b = -2$ dreht sich die Ungleichung um.

Bemerkung. Zusammen mit Lemma 2.36 und V1 (c) bilden diese Regeln das Rechnen mit Suprema, das bei Grenzwerten und später bei Ober- und Untersummen gebraucht wird.

Lösung B7. (a) Die Folgen $(1, 1, 1, \dots)$ und $(0, 1, 1, \dots)$ unterscheiden sich nur im ersten Glied; ihre Differenz ist ab $n = 2$ null, also eine Nullfolge. Beide liegen in der Klasse 1, die Vorschrift liefert aber 1 beziehungsweise 0. Nach der Bemerkung zur Wohldefiniertheit in Abschnitt 1.9 ist das keine Abbildung. Allgemeiner ist kein einzelnes Glied durch die Klasse bestimmt: Endlich viele Glieder darf man beliebig abändern (vergleiche B2).

(b) Die Folgen $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$ erfüllen $a_n < b_n$ für alle n. Ersetzt man (a_n) durch den äquivalenten Repräsentanten $a'_n = \frac{2}{n}$, so ist $a'_n > b_n$ für alle n. Für dieselben Klassen träfe die Vorschrift also je nach Repräsentant zu oder nicht; überdies sind beide Klassen gleich 0, und die Vorschrift hätte $0 \lhd 0$ geliefert. Es fehlt der feste Abstand: Definition 2.24 verlangt $b_n - a_n \geq \delta$ mit einem festen rationalen $\delta > 0$. Mit dieser Forderung hängt die Bedingung nach dem Absatz im Anschluss an Definition 2.24 nicht vom Repräsentanten ab, und sie bedeutet genau $[a_n] < [b_n]$.

(c) Satz 1.23 gilt in jedem angeordneten Körper (Absatz nach Definition 2.6), also $||a_n| - |a_m|| \leq |a_n - a_m|$; damit ist $(|a_n|)$ eine Cauchy-Folge. Ist $(a'_n) \sim (a_n)$, so ist $||a'_n| - |a_n|| \leq |a'_n - a_n|$, nach Lemma 2.16 (2) ist $(|a'_n| - |a_n|)$ eine Nullfolge, also $[|a'_n|] = [|a_n|]$.

Sei $x = [a_n]$. Nach (Pos1) gibt es drei Fälle. Ist $x = 0$, so ist (a_n) und damit $(|a_n|)$ eine Nullfolge, also $[|a_n|] = 0 = |x|$. Ist $x > 0$, so gibt es ein rationales $\delta > 0$ und ein N mit $a_n \geq \delta$ für $n \geq N$; dort ist $|a_n| = a_n$, die Folge $(|a_n| - a_n)$ ist ab N null, also $[|a_n|] = [a_n] = x = |x|$. Ist $x < 0$, so ist $-x = [-a_n] > 0$, also $-a_n \geq \delta$ für $n \geq N$; dort ist $|a_n| = -a_n$, und $[|a_n|] = [-a_n] = -x = |x|$.

(d) „⇒“: Sei $[a_n] \leq [b_n]$ und $\varepsilon > 0$ rational. Ist $[a_n] = [b_n]$, so ist $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge, es gibt also N mit $|b_n - a_n| < \varepsilon$ für $n \geq N$, und dort ist $a_n < b_n + \varepsilon$. Ist $[a_n] < [b_n]$, so ist $b_n - a_n \geq \delta > 0$ für alle $n \geq N$, also $a_n \leq b_n \leq b_n + \varepsilon$.

„⇐“: Wäre nicht $[a_n] \leq [b_n]$, so nach (O0) $[a_n] > [b_n]$, also $a_n - b_n \geq \delta$ für alle $n \geq N_1$ mit einem rationalen $\delta > 0$. Zu $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ gibt es nach Voraussetzung ein N_2 mit $a_n - b_n \leq \frac{\delta}{2}$ für $n \geq N_2$. Für $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ folgt $\delta \leq \frac{\delta}{2}$, also $\delta \leq 0$, ein Widerspruch.

Deutung. (b) und (d) zeigen die beiden Auswege aus (G3): Bei „<“ verlangt man einen festen Abstand, bei „≤“ erlaubt man einen beliebig kleinen Fehler. Die Bedingung aus (d) kehrt bei Grenzwerten als Regel „aus $a_n \leq b_n$ folgt $\lim a_n \leq \lim b_n$“ wieder; (c) ist der Kern der Regel $|a_n| \to |a|$ (Lemma 2.16 (5)).

Lösung B8. (a) Wegen $X_1 = f_1(\mathbb{N}) \neq \varnothing$ ist X nicht leer. Die Abbildung $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$, $F(m, n) = f_n(m)$, ist surjektiv: Zu $x \in X$ gibt es ein n mit $x \in X_n$ und, weil f_n surjektiv ist, ein m mit $f_n(m) = x$. Nach Satz 2.45 gibt es eine Bijektion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann ist $F \circ p : \mathbb{N} \to X$ surjektiv, und nach Lemma 2.44 ist X abzählbar.

(b) Nach Satz 2.45 und Lemma 2.44 gibt es eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; wir halten eine solche fest. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $w_n = \sqrt{|g(n)|}$ (Satz 2.39), $X_n = \{w_n, -w_n\}$ und $f_n(m) = (-1)^m w_n$. Jedes $f_n : \mathbb{N} \to X_n$ ist surjektiv, und die ganze Familie (f_n) ist durch

g festgelegt.

Es ist $\bigcup_n X_n = A$. Wegen $(\pm w_n)^2 = |g(n)| \in \mathbb{Q}$ liegt jedes X_n in A. Ist umgekehrt $x \in A$, so ist $q = x^2 \in \mathbb{Q}$ und $q \geq 0$ (O3), also $q = g(n) = |g(n)|$ für ein n. Für $x \geq 0$ folgt $x = w_n$ aus der Eindeutigkeit in Satz 2.39, für $x < 0$ ebenso $-x = w_n$. Nach (a) ist A abzählbar.

Wäre $\mathbb{R}\setminus A$ abzählbar, so wäre $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R}\setminus A)$ mit derselben Konstruktion wie im Beweis von Folgerung 2.48 abzählbar, im Widerspruch zu Satz 2.47. Für jedes $x \notin A$ ist x^2 irrational, und damit ist auch x selbst irrational. Explizit: $x = \sqrt{\sqrt{2}}$ (Satz 2.39, zweimal angewandt) erfüllt $x^2 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Folgerung 2.49 zeigt Ähnliches für alle Wurzeln rationaler Zahlen, dort ohne (a) mit einer einzigen Surjektion.

(c) Weiß man nur, dass jedes X_n abzählbar und nicht leer ist, so gibt es zu jedem n surjektive Abbildungen $\mathbb{N} \to X_n$, im Allgemeinen viele. Der Beweis von (a) braucht aber eine ganze Familie (f_n), also für jedes der unendlich vielen n gleichzeitig eine Wahl; das ist eine Anwendung des Auswahlaxioms (Abschnitt 1.5). In (b) wird sie vermieden, weil die eine Abbildung g alle f_n durch eine Vorschrift bestimmt, wie in der Bemerkung „keine Auswahl“ nach Satz 2.33. Ohne Beweis: Ohne Auswahlaxiom lässt sich nicht beweisen, dass jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.

Lösung V1. (a) „⇒“: Lemma 2.36 (1) mit $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$. „⇐“: Sei $\varepsilon > 0$. Da K archimedisch ist, gibt es n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (Absatz nach Definition 2.12). Nach Voraussetzung gibt es $a \in A$ mit $a > s - \frac{1}{n} > s - \varepsilon$. Nach Lemma 2.36 (1) ist $s = \sup A$.

(b) Die Menge A ist nicht leer, denn $-t \in A$, und $s = 0$ ist obere Schranke, denn $x \leq -t < 0$ für $x \in A$. Zu jedem n liegt $a = -t$ in A, und $-t > -\frac{1}{n}$ wegen $t < \frac{1}{n}$; die Bedingung aus (a) ist also erfüllt. Aber $-t$ ist eine obere Schranke von A mit $-t < 0$, also ist 0 nicht das Supremum; tatsächlich ist $\sup A = \max A = -t$. Die Richtung „⇐“ in (a) braucht also die archimedische Eigenschaft: In K werden die Zahlen $\frac{1}{n}$ nicht beliebig klein, und Lemma 2.36 (1) verlangt die Bedingung für alle $\varepsilon > 0$ aus K.

(c) Seien $s = \sup A$, $t = \sup B$ (Satz 2.34). Für $a \in A$, $b \in B$ ist $a + b \leq s + t$ (O4); $A + B$ ist nicht leer und $s + t$ obere Schranke. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 2.36 (1) $a \in A$ mit $a > s - \frac{\varepsilon}{2}$ und $b \in B$ mit $b > t - \frac{\varepsilon}{2}$, also $a + b > s + t - \varepsilon$. Nach Lemma 2.36 (1) ist $s + t = \sup(A + B)$.

Lösung V2. (a) Angenommen, $D = f(d)$ für ein $d \in X$. Ist $d \in D$, so nach Definition von D auch $d \notin f(d) = D$. Ist $d \notin D = f(d)$, so erfüllt d die Bedingung für D, also $d \in D$. Beides ist widersprüchlich; also liegt D nicht im Bild von f.

(b) Ordne $T \subseteq \mathbb{N}$ die *Indikatorfolge* $\mathbf{1}_T$ zu, $\mathbf{1}_T(k) = 1$ für $k \in T$ und $\mathbf{1}_T(k) = 0$ sonst. Die Umkehrung ist $(\varepsilon_k) \mapsto \{k : \varepsilon_k = 1\}$; nach Satz 1.10 ist $T \mapsto \mathbf{1}_T$ bijektiv. Ist $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

und $\epsilon^{(n)} = \mathbf{1}_{f(n)}$, so gilt

$$k \in D \iff k \notin f(k) \iff \epsilon_k^{(k)} = 0 \iff 1 - \epsilon_k^{(k)} = 1 \iff d_k = 1.$$

Also ist $\mathbf{1}_D = (d_k)$: Die Menge D ist genau die Diagonalfolge aus Satz 2.46. Das allgemeine Argument aus (a) braucht weder Folgen noch eine Anordnung von X.

Lösung V3. (a) Für jedes n ist $0 \le s_n(\epsilon) \le \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{-k} = 1 - 3^{-n} \le 1$ (geometrische Summe wie im Beweis von Satz 2.47). Nach Lemma 2.16 (4) gilt $0 \le \Phi(\epsilon) \le 1$.

(b) Setze $\psi(\epsilon) = a + \frac{b-a}{3}\big(1 + \Phi(\epsilon)\big)$. Wegen $b - a > 0$ und (a) ist

$$a < a + \tfrac{b-a}{3} \le \psi(\epsilon) \le a + \tfrac{2(b-a)}{3} < b,$$

also $\psi(\epsilon) \in (a, b)$. Aus $\psi(\epsilon) = \psi(\epsilon')$ folgt nach Kürzen (Lemma 2.2, wegen $b - a \neq 0$) $\Phi(\epsilon) = \Phi(\epsilon')$, also $\epsilon = \epsilon'$; ψ ist injektiv. Wäre (a, b) abzählbar, so gäbe es eine Injektion $g : (a, b) \to \mathbb{N}$ (Lemma 2.44), und $g \circ \psi$ wäre eine Injektion $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$, im Widerspruch zu Satz 2.46.

(c) $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ abzählbar (Satz 2.45, Bemerkung nach Lemma 2.44). Wäre auch $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar, so wäre (a, b) mit derselben Konstruktion wie im Beweis von Folgerung 2.48 (gerade und ungerade Nummern) abzählbar, im Widerspruch zu (b).

Lösung V4. *Wohldefiniert.* Konstante Folgen sind Cauchy-Folgen, also ist $\kappa(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})/\!\sim$. Dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und gliedweise Summe und Produkt auf den Klassen wohldefiniert sind, zeigen die Beweise von Lemma 2.20 und Satz 2.22 wörtlich, denn sie benutzten nur die Lemmata 2.15 und 2.16, die in jedem angeordneten Körper gelten.

Injektiv. Sei $\kappa(x) = \kappa(y)$. Dann ist die konstante Folge $(x - y)$ eine Nullfolge, also $|x - y| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Wäre $x \neq y$, so ergäbe $\varepsilon = |x - y|$ den Widerspruch $|x - y| < |x - y|$. Also $x = y$.

Surjektiv. Sei $(x_n) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Nach Satz 2.33 gibt es x mit $x_n \to x$, das heißt, $(x_n - x)$ ist eine Nullfolge. Also ist $[(x_n)] = \kappa(x)$.

Verträglich. $\kappa(x + y)$ ist die Klasse der konstanten Folge $(x + y)$, und das ist die gliedweise Summe der konstanten Folgen (x) und (y); also $\kappa(x + y) = \kappa(x) + \kappa(y)$, ebenso $\kappa(xy) = \kappa(x)\,\kappa(y)$.

Die zweite Konstruktion liefert also nichts Neues: Jede Klasse enthält eine konstante Folge, nämlich die ihres Grenzwerts. Für $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ist das anders: Die Klasse der Heron-Folge (x_n) enthält keine konstante rationale Folge. Wäre nämlich $(x_n) \sim (r)$ mit $r \in \mathbb{Q}$, so wäre $(x_n - r)$ eine rationale Nullfolge, also $x_n \to r$ in $\mathbb{Q}$, im Widerspruch zu Satz 2.18. Genau die Cauchy-Vollständigkeit (Satz 2.33) unterscheidet beide Fälle.

Lösung V5. (a) Sei $I = (a, b) \in \mathcal{J}$. Wegen $a < b$ gibt es nach Satz 2.31 ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$. Die Menge $f(I \cap \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{N}$ ist also nicht leer und hat nach Satz 1.16 ein kleinstes Element $\nu(I)$. Die Abbildung $\nu : \mathcal{J} \to \mathbb{N}$ ist injektiv: Aus $\nu(I) = \nu(J)$ folgt $f(r) = f(r')$ für ein $r \in I \cap \mathbb{Q}$ und ein $r' \in J \cap \mathbb{Q}$, wegen der Injektivität von f also $r = r' \in I \cap J$. Damit ist $I \cap J \neq \emptyset$, also $I = J$. Nach Lemma 2.44 ist $\mathcal{J}$ abzählbar.

(b) Die Bedingung $a < b$ wird nur gebraucht, um mit Satz 2.31 eine rationale Zahl in I zu finden. Die Intervalle $[x, x] = \{x\}$ sind paarweise disjunkt, denn $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ für $x \neq y$. Die Abbildung $x \mapsto \{x\}$ von $\mathbb{R}$ auf die Menge $\mathcal{E}$ dieser Intervalle ist bijektiv. Wäre $\mathcal{E}$ abzählbar, so gäbe es eine Injektion $\mathcal{E} \to \mathbb{N}$ (Lemma 2.44), und ihre Verkettung mit $x \mapsto \{x\}$ wäre eine Injektion $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$, im Widerspruch zu Satz 2.47. Es kommt also nicht darauf an, dass die Mengen Intervalle heißen, sondern darauf, dass jede von ihnen eine rationale Zahl enthält.

(c) Nein. Die Zahl $\nu(I)$ ist durch die feste Abbildung f und die Bildung des Minimums eindeutig bestimmt; es wird nicht für jedes I unter vielen rationalen Zahlen eine ausgewählt. Die Abbildung f selbst ist im Beweis von Satz 2.45 durch eine Formel gegeben.

Ausblick. Mit derselben Idee zeigt man, dass eine monoton wachsende Funktion höchstens abzählbar viele Sprungstellen besitzt (Einheit 7).

Lösung V6. *Vorbemerkung.* Für $k \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt: Aus $k \leq y$ folgt $k \leq \lfloor y \rfloor$. Denn wäre $k > \lfloor y \rfloor$, so wäre $k \geq \lfloor y \rfloor + 1$, weil zwischen benachbarten ganzen Zahlen keine weitere liegt (Rechnen in $\mathbb{Z}$, Einheit 1), und $\lfloor y \rfloor + 1 > y$ nach Lemma 2.30, also $k > y$.

(a) Nach Lemma 2.30 ist $m_n \leq 10^n x < m_n + 1$; Multiplikation mit $10^{-n} > 0$ ((O2), (O5)) ergibt $x_n \leq x < x_n + 10^{-n}$. Aus $10m_n \leq 10^{n+1}x$ folgt nach der Vorbemerkung $10m_n \leq m_{n+1}$. Aus $m_{n+1} \leq 10^{n+1}x < 10m_n + 10$ folgt $m_{n+1} < 10m_n + 10$, für ganze Zahlen also $m_{n+1} \leq 10m_n + 9$. Division durch 10^{n+1} ergibt $x_n \leq x_{n+1}$ und

$$x_{n+1} + 10^{-(n+1)} = \frac{m_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \leq \frac{10m_n + 10}{10^{n+1}} = x_n + 10^{-n}.$$

(b) Mit $a_n = x_n$ und $b_n = x_n + 10^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt nach (a) $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, und $b_n - a_n = 10^{-n} < \frac{1}{n}$ wegen $10^n \geq 1 + 9n > n$ (Bernoulli); also ist $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge (Lemma 2.16 (2)). Nach B5 (a) liegt genau eine reelle Zahl in allen Intervallen $[a_n, b_n]$, und nach (a) ist x eine solche.

Für $m \geq n$ liegen x_m und x_n in $[x_n, x_n + 10^{-n}]$, also $|x_m - x_n| \leq 10^{-n} < \frac{1}{n}$. Zu rationalem $\varepsilon > 0$ wählt man N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$ (Lemma 2.13); dann ist $|x_m - x_n| < \varepsilon$ für $m, n \geq N$. Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Nach Lemma 2.32 gilt $x_n \to [x_n]$, nach (a) ist $|x - x_n| < \frac{1}{n}$, also $x_n \to x$; nach Lemma 2.16 (1) ist $[x_n] = x$. Jede reelle Zahl hat damit einen Repräsentanten, der durch eine Vorschrift bestimmt ist, ohne Auswahl.

(c) Für $x = 1$ ist $10^n x = 10^n \in \mathbb{Z}$, also $m_n = 10^n$ und $x_n = 1$ für alle n: Der Repräsentant aus (b) ist die konstante Folge. Angenommen, für ein x wäre $x_n = 1 - 10^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach (a) wäre dann $x < x_1 + 10^{-1} = 1$ und $1 - 10^{-n} \leq x$ für alle n. Wegen $1 - 10^{-n} \to 1$ folgt mit Lemma 2.16 (4) $1 \leq x$, ein Widerspruch. Die Folge 0,9; 0,99; … aus Beispiel 1 vertritt also zwar die Zahl 1, ist aber für keine Zahl der Repräsentant aus (b). Dasselbe Argument zeigt allgemein, dass die Ziffern z_k aus (d) nie ab einer Stelle K sämtlich gleich 9 sind: Sonst wäre nach (d) und der geometrischen Summe $x_n = x_K + 10^{-K} - 10^{-n}$ für $n \geq K$, und (a) ergäbe $x < x_K + 10^{-K} \leq x$.

(d) Nach (a) ist $0 \leq m_k - 10m_{k-1} \leq 9$, und z_k ist ganz; also $z_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Ferner ist $z_k 10^{-k} = \frac{m_k}{10^k} - \frac{m_{k-1}}{10^{k-1}} = x_k - x_{k-1}$. Summiert man über $k = 1, \dots, n$, so heben sich die Zwischenglieder weg, und es bleibt $x_n - x_0 = x_n - m_0$.

Ausblick. Später wird $m_0 + \sum_k z_k 10^{-k}$ als Reihe gelesen (Einheit 6). Nach (c) enden die Ziffern aus dem Abrunden nie auf lauter Neunen: Von den beiden Schreibweisen 0,999 … und 1,000 … derselben Zahl liefert das Verfahren stets die zweite.

EINHEIT 3

Komplexe Zahlen

Leitfrage

Die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ hat die Lösung $x = 4$, wie man durch Einsetzen sieht: $64 = 60 + 4$. Für Gleichungen der Form $x^3 = px + q$ gibt es eine Lösungsformel, die Gerolamo Cardano veröffentlicht hat. In heutiger Schreibweise lautet sie

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Für $p = 15$, $q = 4$ steht unter der inneren Wurzel $4 - 125 = -121$. Die Formel verlangt also die Wurzel aus einer negativen Zahl, obwohl die Gleichung eine reelle Lösung hat. Rafael Bombelli nahm solche Ausdrücke ernst: Er rechnete mit Wurzeln aus negativen Zahlen nach den gewohnten Regeln, ergänzt um die Regel, dass ihr Quadrat wieder die negative Zahl ergibt. In heutiger Schreibweise mit einem Zeichen i, für das $i^2 = -1$ gelten soll, ist $\sqrt{-121} = 11i$, und man prüft durch Ausmultiplizieren

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i, \qquad (2 - i)^3 = 2 - 11i.$$

Die Formel liefert dann $x = (2+i)+(2-i) = 4$, die richtige Lösung. Warum gerade diese beiden dritten Wurzeln zu wählen sind und woher die Formel stammt, zeigt Beispiel 7 in Abschnitt 3.8. Der Umweg über ein Zeichen ohne Bedeutung führt zu einem richtigen Ergebnis. **Gibt es einen Zahlbereich, der $\mathbb{R}$ enthält, in dem -1 ein Quadrat ist und in dem alle Körperregeln gelten? Ist er eindeutig bestimmt, und was geht beim Übergang verloren?** Diese Einheit konstruiert den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, zeigt, dass er als kleinster solcher Körper durch die Forderung $i^2 = -1$ bis auf Isomorphie festgelegt ist, und beweist, dass er sich nicht anordnen lässt.

Voraussetzungen. Aus Einheit 2: Definition 2.1 (Körper) mit (K1)–(K5), Lemma 2.2 (Rechenregeln im Körper) und der Absatz danach (Bruch- und Potenzrechnung, geometrische Summe und Binomialsatz in jedem Körper); Definition 2.3 (angeordneter Körper) mit (Pos1), (Pos2), Satz 2.4 (Anordnungsregeln) und Folgerung 2.5 ($n \cdot 1 \geq 1 > 0$); Definition 2.6 (Betrag in angeordneten Körpern) mit dem Absatz danach; Definition 2.7

(Homomorphismus angeordneter Körper); Satz 2.25 und Folgerung 2.26: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, in dem die Regeln (O0)–(O6) aus Abschnitt 1.8 und die Regeln für den Betrag gelten; Lemma 2.38 (Potenzen); Satz 2.39 (Wurzeln): Zu jedem $x \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \geq 0$ mit $y^k = x$, für $k = 2$ geschrieben $\sqrt{x}$. Für reelles x ist $\sqrt{x^2} = |x|$, denn $|x| \geq 0$ und $|x|^2 = x^2$. In einer Bemerkung wird außerdem Satz 2.41 (Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$) mit $K = \mathbb{R}$ benutzt; seine Voraussetzungen liefern Satz 2.29 und Satz 2.33. Aus Einheit 1: Satz 1.10 (Umkehrabbildung), Satz 1.13 (geometrische Summe), Satz 1.20 (Binomialsatz), Definition 1.22 und Satz 1.23 mit dem Ausblick über den Abstand, die Restklassen modulo m (Abschnitt 1.9, Beispiel (c) und Bemerkung zur Wohldefiniertheit) und Aufgabe B8. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ geht in dieser Einheit nur über Satz 2.39 ein, in der Bemerkung nach Folgerung 3.21 zusätzlich über Satz 2.41. Die Nummern 3.19 bis 3.24 stehen in den Abschnitten 3.1 und 3.2 dort, wo sie gebraucht werden; die Nummern folgen deshalb dort nicht der Reihe nach.

3.1 Konstruktion des Körpers

Die Leitfrage verlangt eine Zahl i mit $i^2 = -1$. In $\mathbb{R}$ gibt es keine: Nach (O3) ist $x^2 \geq 0$ und $1 > 0$, durch Addition von -1 nach (O5) also $0 > -1$; somit ist $x^2 > -1$ für jedes reelle x. Man kann i also nicht unter den reellen Zahlen finden, man muss den Zahlbereich erweitern. Wenn es einen Körper gibt, der $\mathbb{R}$ und ein Element i mit $i^2 = -1$ enthält, so gelten dort für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \qquad (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

allein nach den Körperregeln und $i^2 = -1$. Eine Zahl $a + bi$ ist also durch das Paar (a, b) beschrieben, und die Rechenregeln sind durch die Paare festgelegt. Das legt nahe, die Paare selbst als neue Zahlen zu nehmen und die Regeln als Definition.

Definition 3.1. Auf der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Paare reeller Zahlen erklären wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c,\ b + d), \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc).$$

Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen *komplexe Zahlen*.

Die Addition ist die komponentenweise Addition der Ebene. Die Multiplikation ist nicht komponentenweise; dass die naheliegende komponentenweise Multiplikation keinen Körper ergibt, zeigt (G6).

Satz 3.2. $\mathbb{C}$ ist mit diesen Verknüpfungen ein Körper. Das Nullelement ist $(0, 0)$, das Einselement $(1, 0)$, das Negative von (a, b) ist $(-a, -b)$, und für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$(a, b)^{-1} = \Big(\frac{a}{a^2 + b^2},\ \frac{-b}{a^2 + b^2}\Big).$$

Beweisidee. Die Axiome der Addition übertragen sich komponentenweise aus $\mathbb{R}$. Für die Multiplikation muss man rechnen; die einzige nicht offensichtliche Stelle ist das Inverse, und dort geht ein, dass $a^2 + b^2 > 0$ ist, sobald $(a,b) \neq (0,0)$. Das ist eine Anordnungseigenschaft von $\mathbb{R}$.

Beweis. Seien $z = (a,b)$, $w = (c,d)$, $v = (e,f)$.

Addition. Assoziativität, Kommutativität, das neutrale Element $(0,0)$ und das Negative $(-a,-b)$ ergeben sich, indem man die entsprechenden Regeln in $\mathbb{R}$ in jeder Komponente anwendet.

Kommutativität der Multiplikation. $wz = (ca - db,\ cb + da) = (ac - bd,\ ad + bc) = zw$, mit der Kommutativität in $\mathbb{R}$.

Assoziativität der Multiplikation. Es ist $zw = (ac - bd,\ ad + bc)$ und $wv = (ce - df,\ cf + de)$, also

$$\begin{aligned}(zw)v &= \big((ac-bd)e - (ad+bc)f,\ (ac-bd)f + (ad+bc)e\big)\\ &= (ace - bde - adf - bcf,\ acf - bdf + ade + bce),\\ z(wv) &= \big(a(ce-df) - b(cf+de),\ a(cf+de) + b(ce-df)\big)\\ &= (ace - adf - bcf - bde,\ acf + ade + bce - bdf).\end{aligned}$$

Beide Paare stimmen in jeder Komponente überein.

Distributivgesetz. $z(w+v) = \big(a(c+e) - b(d+f),\ a(d+f) + b(c+e)\big) = (ac - bd,\ ad + bc) + (ae - bf,\ af + be) = zw + zv$.

Einselement. $(a,b)(1,0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0,\ a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a,b)$, und $(1,0) \neq (0,0)$.

Inverses. Sei $(a,b) \neq (0,0)$, also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$. Nach (O3) sind $a^2 \geq 0$ und $b^2 \geq 0$, und mindestens einer der beiden Summanden ist > 0; nach (O4) und (O0) ist $r = a^2 + b^2 > 0$, insbesondere $r \neq 0$. Dann ist

$$(a,b)\Big(\frac{a}{r}, \frac{-b}{r}\Big) = \Big(\frac{a^2+b^2}{r},\ \frac{-ab+ba}{r}\Big) = (1,0). \qquad \square$$

Damit gilt in $\mathbb{C}$ alles, was Einheit 2 für beliebige Körper bewiesen oder festgehalten hat: Lemma 2.2 (Eindeutigkeit von 0, 1 und der Inversen, $0 \cdot z = 0$, Vorzeichenregeln, Nullteilerfreiheit) und nach dem Absatz danach die Bruchrechnung, die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten, die geometrische Summe (Satz 1.13) für komplexes $q \neq 1$ und der Binomialsatz (Satz 1.20) für komplexe a, b. Nicht übertragen werden alle Aussagen, die die Anordnung benutzen, etwa die Bernoullische Ungleichung; für sie gibt es in $\mathbb{C}$ nicht einmal eine Formulierung (Abschnitt 3.5).

Um zu sagen, in welchem Sinn $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ liegt und in welchem Sinn $\mathbb{C}$ eindeutig ist, braucht man Abbildungen, die die Rechenoperationen erhalten. Definition 2.7 verlangt zusätzlich, dass die Anordnung erhalten bleibt; auf $\mathbb{C}$ gibt es aber keine Anordnung (Satz 3.16). Wir brauchen deshalb den Begriff ohne Anordnung.

Definition 3.19. Seien K und L Körper. Eine Abbildung $\varphi\colon K \to L$ heißt *Körperhomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in K$ gilt: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ und $\varphi(1) = 1$. Ein bijektiver Körperhomomorphismus heißt *Isomorphismus* (von Körpern); K und L heißen dann *isomorph*. Eine Teilmenge $T \subseteq L$ heißt *Teilkörper* von L, wenn $0, 1 \in T$ ist und mit $x, y \in T$ auch $x+y$, xy, $-x$ und, für $x \neq 0$, x^{-1} in T liegen.

Ein Teilkörper ist mit den eingeschränkten Verknüpfungen selbst ein Körper, denn die Axiome (K1)–(K5) gelten für seine Elemente, weil sie in L gelten. Sind K und L angeordnet, so ist ein Homomorphismus angeordneter Körper im Sinn von Definition 2.7 genau ein Körperhomomorphismus, der zusätzlich aus $x < y$ auf $\varphi(x) < \varphi(y)$ schließen lässt. Sagt man, ein Körper K *enthalte* $\mathbb{R}$ *als Teilkörper*, so ist gemeint: $\mathbb{R} \subseteq K$, und Summe und Produkt reeller Zahlen in K sind ihre Summe und ihr Produkt in $\mathbb{R}$; gleichwertig ist die Inklusion $\mathbb{R} \to K$ ein Körperhomomorphismus. Für $K = \mathbb{C}$ gilt das nach der Identifizierung aus Satz 3.3.

Lemma 3.20. Sei $\varphi\colon K \to L$ ein Körperhomomorphismus. Dann ist $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, und für $x \neq 0$ ist $\varphi(x) \neq 0$ und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Insbesondere ist φ injektiv. Das Bild $\varphi(K)$ ist ein Teilkörper von L, und $\varphi\colon K \to \varphi(K)$ ist ein Isomorphismus, dessen Umkehrabbildung wieder ein Körperhomomorphismus ist.

Beweis. Aus $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ folgt $\varphi(0) = 0$. Aus $\varphi(x) + \varphi(-x) = \varphi(0) = 0$ folgt $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Für $x \neq 0$ ist $\varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(1) = 1$; also ist $\varphi(x) \neq 0$, denn $0 \cdot \varphi(x^{-1}) = 0 \neq 1$, und $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$. Ist $\varphi(x) = \varphi(y)$, so ist $\varphi(x-y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0$, nach dem eben Gezeigten also $x - y = 0$. Das Bild enthält $0 = \varphi(0)$ und $1 = \varphi(1)$, mit $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ auch $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$, $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ und $-\varphi(x) = \varphi(-x)$, und für $\varphi(x) \neq 0$, also $x \neq 0$, auch $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$. Als Abbildung auf sein Bild ist φ injektiv und surjektiv. Sei $\psi\colon \varphi(K) \to K$ die Umkehrabbildung. Für $u = \varphi(x)$ und $v = \varphi(y)$ ist $\psi(u+v) = \psi(\varphi(x+y)) = x + y = \psi(u) + \psi(v)$, ebenso $\psi(uv) = \psi(u)\psi(v)$, und $\psi(1) = 1$. □

Die Injektivität eines Körperhomomorphismus muss man also nie eigens nachweisen. Für Homomorphismen angeordneter Körper folgt sie in Einheit 2 aus der Anordnung (nach Definition 2.7); nötig ist die Anordnung dafür nicht.

Satz 3.3 (Die reellen Zahlen in $\mathbb{C}$). Die Abbildung $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\eta(a) = (a, 0)$, ist ein Körperhomomorphismus, also injektiv (Lemma 3.20), und ihr Bild $\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. Für $a \in \mathbb{R}$ und $(c,d) \in \mathbb{C}$ ist $\eta(a)\,(c,d) = (ac, ad)$. Für $i = (0,1)$ gilt $i^2 = \eta(-1)$, und jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt genau eine Darstellung $z = \eta(a) + \eta(b)\,i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, nämlich für $z = (a,b)$.

Beweis. Die Verträglichkeit mit der Addition ist klar, und $\eta(1) = (1,0)$ ist das Einselement. Für die Multiplikation: $(a,0)(c,d) = (ac - 0\cdot d,\ ad + 0\cdot c) = (ac, ad)$, insbesondere

$(a,0)(b,0) = (ab,0)$. Der Rest der ersten beiden Aussagen ist Lemma 3.20. Weiter ist $i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1,\ 0+0) = (-1,0)$. Für $z = (a,b)$ ist $\eta(b)\,i = (b,0)(0,1) = (0,b)$, also $\eta(a) + \eta(b)i = (a,b) = z$. Die Darstellung ist eindeutig, weil $\eta(a) + \eta(b)i = (a,b)$ die Zahlen a und b als Komponenten zurückgibt. □

Man identifiziert deshalb $a \in \mathbb{R}$ mit $(a,0) \in \mathbb{C}$, fasst $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf und schreibt jede komplexe Zahl als

$$z = a + bi \qquad (a,b \in \mathbb{R}).$$

Mit dieser Schreibweise braucht man sich die Multiplikationsregel nicht zu merken: Man multipliziert aus und ersetzt i^2 durch -1. Die Identifizierung ist gerechtfertigt, weil η Addition und Multiplikation erhält; jede Rechnung mit reellen Zahlen liefert dasselbe, ob man sie in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ ausführt. Komplexe Zahlen der Form bi mit $b \in \mathbb{R}$ heißen *rein imaginär*. Das Zeichen η wird nach dieser Identifizierung nicht mehr gebraucht; es ist bewusst nicht ι gewählt, das in Einheit 2 die Einbettung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Ebenso bezeichnet j in dieser Einheit ein Element mit $j^2 = -1$, nicht die Einbettung $\mathbb{Q} \to K$ aus Lemma 2.8.

Die Konstruktion ist dieselbe Denkfigur wie in Abschnitt 2.4: Man schreibt auf, wie die gesuchten Zahlen sich verhalten müssten, und nimmt die beschreibenden Daten – dort Klassen von Cauchy-Folgen, hier Paare – als Definition. Der Unterschied: Hier genügen zwei reelle Zahlen, und es gibt keine Äquivalenzklassen.

Ist $\mathbb{C}$ die einzige Lösung der Leitfrage? Jeder Körper, der $\mathbb{R}$ und eine Wurzel aus -1 enthält, enthält eine Kopie von $\mathbb{C}$:

Satz 3.4 (Minimalität). Sei K ein Körper, der $\mathbb{R}$ als Teilkörper enthält, und sei $j \in K$ mit $j^2 = -1$. Dann ist

$$\varphi_j : \mathbb{C} \to K, \qquad \varphi_j(a+bi) = a + bj \quad (a,b \in \mathbb{R}),$$

ein Körperhomomorphismus mit $\varphi_j(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $\varphi_j(i) = j$, und er ist der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{C} \to K$ mit diesen beiden Eigenschaften. Sein Bild $\{a+bj\ :\ a,b \in \mathbb{R}\}$ ist ein Teilkörper von K, und φ_j ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$ auf dieses Bild.

Beweisidee. Die Verträglichkeit ist die Rechnung vom Beginn des Abschnitts, diesmal in K. Alles Weitere liefert Lemma 3.20.

Beweis. Nach Satz 3.3 sind a und b durch $z = a + bi$ eindeutig bestimmt; φ_j ist also wohldefiniert. Die Additivität ist klar, und $\varphi_j(1) = 1$. In K gelten die Körperregeln, also

$$(a+bj)(c+dj) = ac + (ad+bc)j + bd\,j^2 = (ac-bd) + (ad+bc)j = \varphi_j\big((a+bi)(c+di)\big).$$

Ist $\psi : \mathbb{C} \to K$ ein Körperhomomorphismus mit $\psi(a) = a$ für reelle a und $\psi(i) = j$, so ist $\psi(a+bi) = \psi(a) + \psi(b)\psi(i) = a + bj$, also $\psi = \varphi_j$. Der Rest ist Lemma 3.20. □

Insbesondere ist j nicht reell: Wäre $j = c \in \mathbb{R}$, so wäre $\varphi_j(c - i) = c - j = 0$, obwohl $c - i \neq 0$, im Widerspruch zur Injektivität. Die Darstellung der Elemente des Bildes als $a + bj$ mit reellen a, b ist daher eindeutig. Die Anordnung von $\mathbb{R}$ tritt in diesem Schluss nicht auf; sie steckt in Satz 3.2, beim Inversen. Ist $K = \mathbb{C}$, so ist $\mathbb{R}$ vermöge der Identifizierung aus Satz 3.3 ein Teilkörper, und der Satz ist anwendbar.

Folgerung 3.21 (Eindeutigkeit von $\mathbb{C}$). Sei L ein Körper, der $\mathbb{R}$ als Teilkörper enthält, und $j \in L$ mit $j^2 = -1$, so dass jedes Element von L die Form $a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat. Dann ist L zu $\mathbb{C}$ isomorph. Es gibt genau zwei Isomorphismen $\mathbb{C} \to L$, die jede reelle Zahl festlassen, nämlich φ_j und φ_{-j}, also $a+bi \mapsto a+bj$ und $a+bi \mapsto a-bj$.

Beweis. Nach Satz 3.4 ist φ_j ein injektiver Körperhomomorphismus, nach Voraussetzung ist er surjektiv, also ein Isomorphismus. Wegen $(-j)^2 = j^2 = -1$ und $a + b(-j) = a + (-b)j$ gilt dasselbe für φ_{-j}. Die beiden sind verschieden, denn $j \neq -j$: Aus $j = -j$ folgte $2j = 0$, und wegen $2 \neq 0$ in $\mathbb{R}$ (Folgerung 2.5) wäre $j = 0$, im Widerspruch zu $j^2 = -1 \neq 0$. Sei nun $\psi : \mathbb{C} \to L$ ein Isomorphismus mit $\psi(a) = a$ für reelle a, und sei $x = \psi(i)$. Dann ist $x^2 = \psi(i^2) = \psi(-1) = -1 = j^2$, also $(x - j)(x + j) = x^2 - j^2 = 0$. Weil L nullteilerfrei ist, folgt $x = j$ oder $x = -j$, und nach dem Eindeutigkeitsteil von Satz 3.4 ist $\psi = \varphi_j$ oder $\psi = \varphi_{-j}$. □

Bemerkung (weitere Isomorphismen). Lässt man die Bedingung $\psi(a) = a$ für reelle a fallen, so gibt es weitere Isomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$; ihre Existenz beweist man mit dem Auswahlaxiom (ohne Beweis). Keiner von ihnen bildet $\mathbb{R}$ in sich ab: Ein Körperhomomorphismus $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\psi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ ist nach Satz 2.41, angewandt mit $K = \mathbb{R}$, auf $\mathbb{R}$ die Identität und deshalb selbst die Identität oder die Konjugation (Aufgabe B5).

Damit ist die Leitfrage in zwei Teilen beantwortet. Jeder Körper, der $\mathbb{R}$ und eine Wurzel aus -1 enthält, enthält eine isomorphe Kopie von $\mathbb{C}$ (Satz 3.4); in diesem Sinn ist $\mathbb{C}$ der kleinste solche Körper. Wird der Körper von $\mathbb{R}$ und dieser Wurzel schon ausgeschöpft, so ist er zu $\mathbb{C}$ isomorph (Folgerung 3.21). Die Eindeutigkeit ist aber schwächer als bei $\mathbb{R}$. Zwischen zwei Modellen von $\mathbb{R}$ gibt es genau einen Isomorphismus (Satz 2.41 und die Bemerkung danach). Zwischen zwei Modellen von $\mathbb{C}$ gibt es genau zwei, die $\mathbb{R}$ festlassen. Der Grund: i und $-i$ lösen beide $z^2 = -1$, und nichts in den Körperaxiomen zeichnet eine der beiden Lösungen aus. Welche man i nennt, ist eine Konvention; in der Zahlenebene entspricht ihr die Wahl, welche Halbebene „oben“ ist. Für $L = \mathbb{C}$ und $j = -i$ liefert Folgerung 3.21 die Abbildung $a+bi \mapsto a-bi$. Sie erhält alle Rechenregeln, heißt Konjugation und ist der Gegenstand des nächsten Abschnitts.

Bemerkung (ein zweites Modell). Wer lineare Algebra kennt, kann statt der Paare die reellen 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ nehmen. Matrizensumme und Matrizenprodukt solcher Matrizen haben wieder diese Form, und $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ überträgt die Verknüpfungen aus Definition 3.1 (Aufgabe V2). Die Assoziativität der Multiplikation

erhält man in diesem Modell ohne Rechnung aus der Assoziativität des Matrizenprodukts.

3.2 Realteil, Imaginärteil, Konjugation und Betrag

Definition 3.5. Für $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $\operatorname{Re} z = a$ der *Realteil*, $\operatorname{Im} z = b$ der *Imaginärteil* und $\bar{z} = a - bi$ die *konjugierte Zahl* von z.

Der Imaginärteil ist eine reelle Zahl: $\operatorname{Im}(3+4i) = 4$, nicht $4i$. Nach Satz 3.3 sind Real- und Imaginärteil eindeutig bestimmt, und zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn Real- und Imaginärteile übereinstimmen. Eine Gleichung in $\mathbb{C}$ ist also gleichwertig mit zwei reellen Gleichungen.

Satz 3.6 (Regeln der Konjugation). Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$, und für $w \neq 0$ ist $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$;
2. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ und $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$;
3. z ist genau dann reell, wenn $z = \bar{z}$;
4. $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$; insbesondere ist $z\bar{z}$ reell und ≥ 0, und $z\bar{z} = 0$ nur für $z = 0$.

Beweis. Sei $z = a + bi$, $w = c + di$. (1) Die Additivität ist klar. Für das Produkt ist $\overline{zw} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ und $\bar{z}\bar{w} = (a - bi)(c - di) = \overline{(ac - bd) + (-ad - bc)i}$. $\bar{\bar{z}} = z$ ist klar. Aus $w \cdot (z/w) = z$ folgt mit der Produktregel $\bar{w} \cdot \overline{z/w} = \bar{z}$; wegen $w \neq 0$ ist $\bar{w} \neq 0$, und das ist die Behauptung. (2) $z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2bi$. (3) Nach (2) ist $z = \bar{z}$ gleichwertig mit $2bi = 0$, also mit $b = 0$. (4) $(a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 + (-ab + ba)i = a^2 + b^2$; dieser Wert ist ≥ 0 und nach dem Beweis von Satz 3.2 nur für $a = b = 0$ gleich null. □

Regel (1) besagt, dass die Konjugation alle Rechenoperationen erhält; nach Folgerung 3.21 ist sie neben der Identität der einzige Isomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, der die reellen Zahlen festlässt. Spätere Einheiten brauchen die Regeln für mehr als zwei Summanden oder Faktoren.

Folgerung 3.22 (Konjugation endlicher Summen und Produkte). Für $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \cdots + \bar{z}_n$ und $\overline{z_1 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_n$. Insbesondere ist $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, für $z \neq 0$ auch für $n \in \mathbb{Z}$, und für jedes Polynom $p(z) = c_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0$ mit reellen Koeffizienten ist $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$.

Beweis. Induktion über n mit Satz 3.6 (1): $\overline{z_1 + \cdots + z_{n+1}} = \overline{z_1 + \cdots + z_n} + \bar{z}_{n+1}$, ebenso für Produkte. Für $z_1 = \cdots = z_n = z$ folgt $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, und für $n = 0$ ist $\bar{1} = 1$. Für $z \neq 0$ ist $\overline{z^{-1}} = 1/\bar{z}$ nach Satz 3.6 (1), also $\overline{z^{-n}} = \overline{(z^{-1})^n} = (\bar{z}^{-1})^n = \bar{z}^{-n}$. Für das Polynom ist $\overline{c_k z^k} = \bar{c}_k \bar{z}^k = c_k \bar{z}^k$, weil c_k reell ist (Satz 3.6 (3)), und man summiert. □

Daraus folgt eine oft gebrauchte Tatsache: Ist p ein Polynom mit *reellen* Koeffizienten und $p(z_0) = 0$, so ist auch $p(\bar{z}_0) = \overline{p(z_0)} = 0$. Nichtreelle Nullstellen reeller Polynome treten also paarweise auf. Die Rechnung in der Leitfrage benutzt die Regel $\overline{z^n} = \bar{z}^n$: $(2-i)^3$ ist die Konjugierte von $(2+i)^3$.

Regel (4) liefert eine Rechenvorschrift für Quotienten: Man erweitert mit der Konjugierten des Nenners, dann wird der Nenner reell.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} \qquad (w \neq 0).$$

Beispiel. $\dfrac{3+4i}{1-2i} = \dfrac{(3+4i)(1+2i)}{1+4} = \dfrac{3+6i+4i-8}{5} = -1+2i$. Probe: $(-1+2i)(1-2i) = -1+2i+2i+4 = 3+4i$.

Definition 3.7. Der *Betrag* von $z \in \mathbb{C}$ ist die reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Die Wurzel existiert nach Satz 3.6 (4) und Satz 2.39 (Wurzeln). Für reelles $z = a$ ist $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, und das ist der Betrag aus Definition 1.22, also aus Definition 2.6 für $K = \mathbb{R}$. Die Schreibweise ist also verträglich. Geometrisch ist $|z|$ nach dem Satz des Pythagoras die Länge der Strecke vom Nullpunkt zum Punkt (a, b) der Ebene; das ist eine Deutung, kein Beweisschritt.

Für Abschätzungen mit Beträgen braucht man, dass man Ungleichungen zwischen nichtnegativen Zahlen quadrieren und die Wurzel ziehen darf.

Lemma 3.8. Für reelle $u, v \geq 0$ gilt $u \leq v \iff u^2 \leq v^2$, und ebenso $u < v \iff u^2 < v^2$. Insbesondere ist $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

Beweis. Die Hinrichtungen sind Lemma 2.38 (Potenzen), Teil (1), mit $k = 2$. Die Rückrichtungen folgen durch Kontraposition aus den Hinrichtungen mit vertauschten Rollen: Aus $u > v$ folgt $u^2 > v^2$, aus $u \geq v$ folgt $u^2 \geq v^2$, und nach (O0) ist das jeweils die Verneinung der Voraussetzung $u^2 \leq v^2$ beziehungsweise $u^2 < v^2$. Für die Wurzel setze man $u = \sqrt{x}$ und $v = \sqrt{y}$. □

Satz 3.9 (Eigenschaften des Betrags). Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $|z| \geq 0$, und $|z| = 0$ genau für $z = 0$;
2. $|zw| = |z|\,|w|$ und $|\bar{z}| = |z|$; für $w \neq 0$ ist $|z/w| = |z|/|w|$;
3. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
4. $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
5. für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

Beweis. (1) folgt aus Satz 3.6 (4). (2) $|zw|^2 = zw\,\overline{zw} = z\bar{z}\,w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z|\,|w|)^2$, und Lemma 3.8 erlaubt, die Wurzel zu ziehen: Zwei nichtnegative Zahlen mit gleichem Quadrat sind gleich. $|\bar{z}| = |z|$ ist klar, weil $\bar{z}$ dieselben Quadrate von Real- und Imaginärteil hat. Aus $w \cdot (z/w) = z$ folgt $|w|\,|z/w| = |z|$. (3) Für $z = a + bi$ ist $a^2 \le a^2 + b^2$, nach Lemma 3.8 also $|a| = \sqrt{a^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$; ebenso für b. (4) $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a||b| \ge a^2 + b^2 = |z|^2$, und Lemma 3.8. (5) ist Satz 3.6 (4), geteilt durch $|z|^2 \neq 0$. □

Folgerung 3.23 (Potenzen und Betrag). Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $|z^n| = |z|^n$; für $z \neq 0$ gilt das für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. $|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$, und aus $|z^n| = |z|^n$ folgt mit Satz 3.9 (2) $|z^{n+1}| = |z^n|\,|z| = |z|^{n+1}$. Für $z \neq 0$ ist $|z^{-1}| = 1/|z|$ nach Satz 3.9 (2), also $|z^{-n}| = |(z^{-1})^n| = |z^{-1}|^n = |z|^{-n}$. □

Die Multiplikativität (2) ist bemerkenswert: Für die Paare (a, b), (c, d) besagt sie

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Das Produkt zweier Summen von zwei Quadraten ist wieder eine Summe von zwei Quadraten. Für ganze Zahlen hat das zahlentheoretische Folgen (Aufgabe V3).

Satz 3.10 (Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$). Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z + w| \le |z| + |w| \qquad \text{und} \qquad \big|\,|z| - |w|\,\big| \le |z - w|.$$

Ist $w \neq 0$, so gilt in der ersten Ungleichung Gleichheit genau dann, wenn $z = tw$ mit einer reellen Zahl $t \ge 0$ ist.

Beweisidee. Der reelle Beweis aus Satz 1.23 benutzte $-|x| \le x \le |x|$ und die Anordnung; in $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung. Man quadriert stattdessen: Das Quadrat des Betrags ist ein Produkt mit der Konjugierten, und der gemischte Term ist ein Realteil, den Satz 3.9 (3) abschätzt.

Beweis. Mit Satz 3.6 ist

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2,$$

denn $\bar{z}w = \overline{z\bar{w}}$, und eine Zahl plus ihre Konjugierte ist das Doppelte ihres Realteils. Nach der reellen Regel $x \le |x|$ und Satz 3.9 (3) und (2) ist $\mathrm{Re}(z\bar{w}) \le |\,\mathrm{Re}(z\bar{w})| \le |z\bar{w}| = |z|\,|w|$. Also

$$|z + w|^2 \le |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

und Lemma 3.8 gibt die erste Ungleichung. Die zweite folgt wie in Satz 1.23 durch Einschieben der Null: $|z| = |(z - w) + w| \le |z - w| + |w|$, und mit vertauschten Rollen $|w| \le |w - z| + |z| = |z - w| + |z|$.

Gleichheitsfall: Nach der Rechnung gilt Gleichheit genau dann, wenn $\operatorname{Re}(u) = |u|$ für $u = z\bar{w}$ ist. Für $u = x + yi$ bedeutet $x = |u|$, dass $x \geq 0$ und $x^2 = x^2 + y^2$, also $y = 0$; umgekehrt ist für reelles $u \geq 0$ offenbar $\operatorname{Re} u = u = |u|$. Gleichheit gilt also genau dann, wenn $z\bar{w} = s$ mit reellem $s \geq 0$. Multiplikation mit w ergibt $z|w|^2 = sw$, also $z = tw$ mit $t = s/|w|^2 \geq 0$. Ist umgekehrt $z = tw$ mit $t \geq 0$, so ist $z\bar{w} = t|w|^2 \geq 0$. □

Geometrisch: In einem Dreieck ist jede Seite höchstens so lang wie die beiden anderen zusammen, und Gleichheit gilt nur, wenn das Dreieck zu einer Strecke entartet, auf der z und w in dieselbe Richtung zeigen.

Folgerung 3.24 (Dreiecksungleichung für endliche Summen). Für $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ gilt $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Beweis. Induktion über n wie in Aufgabe B8 (a) der Einheit 1. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, und der Schritt ist nach Satz 3.10 $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. □

3.3 Die Zahlenebene

Man stellt $z = a + bi$ als Punkt (a, b) der Ebene dar; die waagrechte Achse heißt *reelle Achse*, die senkrechte *imaginäre Achse*. Die Addition ist die Addition von Pfeilen nach der Parallelogrammregel, die Konjugation die Spiegelung an der reellen Achse.

Der *Abstand* zweier komplexer Zahlen ist $d(z, w) = |z - w|$. Nach Satz 3.9 und 3.10 gelten $d(z, w) \geq 0$ mit Gleichheit nur für $z = w$, $d(z, w) = d(w, z)$ und $d(z, v) \leq d(z, w) + d(w, v)$; d ist also eine Metrik im Sinn des Ausblicks nach Satz 1.23. Wie in den späteren Einheiten steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für $a \in \mathbb{K}$ und $r > 0$ heißt

$$B_r(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z - a| < r\}$$

die *offene Kreisscheibe* um a mit Radius r; für $r \geq 0$ heißt $\overline{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z - a| \leq r\}$ die *abgeschlossene Kreisscheibe*. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind das die Intervalle $(a - r, a + r)$ und $[a - r, a + r]$, nach den Regeln $|x| < c \iff -c < x < c$ und $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$ aus Abschnitt 1.8. Für reelles a ist die komplexe Kreisscheibe $B_r(a)$ geschnitten mit $\mathbb{R}$ genau das Intervall $(a - r, a + r)$ (Aufgabe B6). Die Begriffe der Einheit 4, die nur den Abstand benutzen – Konvergenz, Nullfolge, Cauchy-Folge, Beschränktheit –, lassen sich deshalb für $\mathbb{C}$ wörtlich wie für $\mathbb{R}$ formulieren. Die übrigen, etwa monotone Folge und Limes superior, brauchen die Anordnung (Abschnitt 3.5).

Bemerkung (Betrag, Norm und Abstand). Der Betrag auf $\mathbb{C}$ leistet dreierlei.

- Er ist ein *Betrag des Körpers* $\mathbb{C}$: $|z| = 0$ nur für $z = 0$, $|zw| = |z|\,|w|$ und $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Satz 3.9, Satz 3.10).
- Fasst man $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Ebene auf, mit komponentenweiser Addition und, nach Satz 3.3, komponentenweiser Multiplikation mit reellen Zahlen $t(a + bi) = ta + tbi$,

so ist $|tz| = |t|\,|z|$ für $t \in \mathbb{R}$, und $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die euklidische Länge des Vektors (a, b). Eine Abbildung mit $|z| = 0$ nur für $z = 0$, $|tz| = |t|\,|z|$ und der Dreiecksungleichung heißt in späteren Vorlesungen eine *Norm*.

- Aus ihm entsteht die Metrik $d(z, w) = |z - w|$.

Zwei Punkte unterscheiden den komplexen Betrag vom Betrag eines angeordneten Körpers (Definition 2.6). Erstens hat er Werte in $\mathbb{R}$, nicht im Körper $\mathbb{C}$ selbst; die Toleranzen ε in allen Konvergenzbegriffen für komplexe Zahlen sind daher positive *reelle* Zahlen. Die Konvergenztheorie in $\mathbb{C}$ benutzt also die Anordnung von $\mathbb{R}$, obwohl $\mathbb{C}$ keine Anordnung trägt. Zweitens ist seine Dreiecksungleichung nicht aus einer Anordnung von $\mathbb{C}$ gewonnen, sondern aus Satz 3.9 (3) (Beweis von Satz 3.10).

Für reelle x, y ist $|x - y|$ im Sinn von Definition 3.7 der reelle Betrag aus Definition 1.22. Der Abstand auf $\mathbb{C}$ setzt also den Abstand auf $\mathbb{R}$ fort, und eine reelle Folge ist im Sinn von $\mathbb{R}$ genau dann eine Nullfolge oder Cauchy-Folge, wenn sie es im Sinn von $\mathbb{C}$ ist. Schließlich schätzen sich nach Satz 3.9 (3), (4) der Abstand d und die Größe $d_1(z, w) = |\operatorname{Re}(z - w)| + |\operatorname{Im}(z - w)|$ gegenseitig mit festen Faktoren ab: $d \le d_1 \le 2d$, nach Aufgabe B2 sogar $d_1 \le \sqrt{2}\,d$. Deshalb ist Konvergenz in $\mathbb{C}$ dasselbe wie Konvergenz von Real- und Imaginärteil (Satz 4.5).

Die Multiplikation hat ebenfalls eine geometrische Bedeutung. Die Multiplikation mit einer reellen Zahl $r > 0$ streckt jeden Pfeil um den Faktor r. Die Multiplikation mit i bildet (a, b) auf $(-b, a)$ ab, also den Pfeil auf einen gleich langen Pfeil, der auf ihm senkrecht steht: $a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$.

> **Satz 3.11.** Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$. Dann erhält die Abbildung $z \mapsto wz$ Abstände: $|wz - wz'| = |z - z'|$ für alle z, z'. Sie lässt 0 fest und ist bijektiv mit Umkehrung $z \mapsto \bar{w}z$.

Beweis. $|wz - wz'| = |w|\,|z - z'| = |z - z'|$ nach Satz 3.9 (2). Wegen $w\bar{w} = |w|^2 = 1$ ist $\bar{w}(wz) = z$ und $w(\bar{w}z) = z$; nach Satz 1.10 ist die Abbildung bijektiv. □

Abstandserhaltende Abbildungen der Ebene mit Fixpunkt 0 sind Drehungen und Spiegelungen; das ist ein Satz der Geometrie, den wir nicht benutzen. Dass die Multiplikation mit w eine Drehung um einen bestimmten Winkel ist, wird erst mit der Polardarstellung genau (Vorgriff in Abschnitt 3.6, bewiesen in Satz 9.32 und Folgerung 9.33 (2)). Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ ist das Produkt $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|}$ einer positiven reellen Zahl und einer Zahl vom Betrag 1; die Multiplikation mit z ist also eine Streckung um $|z|$, verkettet mit einer abstandserhaltenden Abbildung.

3.4 Quadratwurzeln und quadratische Gleichungen

Die Leitfrage verlangte nur eine Wurzel aus -1. Man bekommt mehr: Jede komplexe Zahl hat eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$, und man kann sie mit reellen Wurzeln ausrechnen.

Satz 3.12 (Quadratwurzeln). Sei $w = a + bi \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind $|w| + a$ und $|w| - a$ nicht negativ, und für die reellen Zahlen

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + a)} \geq 0, \qquad y = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - a)} \geq 0$$

gilt $(x + yi)^2 = w$, falls $b \geq 0$, und $(x - yi)^2 = w$, falls $b < 0$. Ist $w \neq 0$ und z_0 die so angegebene Zahl, so hat die Gleichung $z^2 = w$ genau die beiden Lösungen z_0 und $-z_0$; für $w = 0$ ist 0 die einzige Lösung.

Beweisidee. Eine Lösung $z = x + yi$ muss drei reelle Gleichungen erfüllen: $x^2 - y^2 = a$ und $2xy = b$, das sind Real- und Imaginärteil von $z^2 = w$, und $x^2 + y^2 = |z|^2 = |w|$. Summe und Differenz der ersten und der dritten bestimmen x^2 und y^2, also $|x|$ und $|y|$. Ob x und y gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, entscheidet die zweite Gleichung, also das Vorzeichen von b. Den Fall $b < 0$ führt man mit der Konjugation auf den Fall $b > 0$ zurück.

Beweis. Nach Satz 3.9 (3) ist $|a| \leq |w|$, also $-|w| \leq a \leq |w|$ (Abschnitt 1.8), und beide Radikanden sind ≥ 0; x und y existieren nach Satz 2.39. Es ist

$$x^2 - y^2 = \tfrac{1}{2}(|w| + a) - \tfrac{1}{2}(|w| - a) = a, \qquad (2xy)^2 = 4x^2y^2 = |w|^2 - a^2 = b^2.$$

Weil $2xy \geq 0$ ist und $|b|$ die einzige nichtnegative Zahl mit Quadrat b^2 (Satz 2.39), folgt $2xy = |b|$.

Fall $b \geq 0$. Dann ist $2xy = b$, also $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi = w$.

Fall $b < 0$. Die Zahl $\bar{w} = a + (-b)i$ hat denselben Realteil a und denselben Betrag wie w (Satz 3.9 (2)); zu ihr gehören also dieselben Zahlen x und y, und ihr Imaginärteil $-b$ ist positiv. Nach dem ersten Fall ist $(x + yi)^2 = \bar{w}$, nach Satz 3.6 (1) also $(x - yi)^2 = \overline{(x + yi)^2} = \bar{\bar{w}} = w$.

Ist $z^2 = w = z_0^2$, so ist $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0) = 0$, und wegen der Nullteilerfreiheit ist $z = z_0$ oder $z = -z_0$. Für $w \neq 0$ ist $z_0 \neq 0$. Dann ist auch $z_0 \neq -z_0$, denn aus $z_0 = -z_0$ folgte $2z_0 = 0$ und wegen $2 \neq 0$ (Folgerung 2.5) auch $z_0 = 0$. Es gibt also genau zwei Lösungen. Für $w = 0$ folgt aus $z^2 = 0$ nach der Nullteilerfreiheit $z = 0$. □

Bemerkung (keine Vorzeichenwahl wie in $\mathbb{R}$). In $\mathbb{R}$ wählt man unter den beiden Wurzeln einer positiven Zahl die positive. In $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung, also keine positive Wurzel. Satz 3.12 trifft eine Wahl, aber diese Wahl ist mit dem Rechnen nicht verträglich: $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ ist mit jeder festen Wahl falsch (G3). Man vermeidet deshalb das Zeichen $\sqrt{w}$ für komplexe w oder benutzt es nur als „eine der beiden Wurzeln“. Die Wahl

aus Satz 3.12 hat einen zweiten Mangel: Sie springt. Für $w = -1 + bi$ mit kleinem $b > 0$ liegt die gewählte Wurzel nahe bei i, für kleines $b < 0$ nahe bei $-i$. Dass sich keine Wahl der Wurzel auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ohne Sprung treffen lässt, wird hier nicht bewiesen. Dieselbe Erscheinung kehrt beim Hauptwert des Arguments und beim komplexen Logarithmus wieder (Satz 9.34 (3), Satz 9.35 (3)).

Folgerung 3.13 (quadratische Gleichungen). Seien $p, q \in \mathbb{C}$, und sei $r \in \mathbb{C}$ eine Lösung von $r^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Dann sind die Lösungen von $z^2 + pz + q = 0$ genau die Zahlen

$$z = -\frac{p}{2} + r \qquad \text{und} \qquad z = -\frac{p}{2} - r.$$

Jede quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten hat also in $\mathbb{C}$ eine Lösung.

Beweis. Ein r existiert nach Satz 3.12. Quadratische Ergänzung ergibt $z^2 + pz + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - r^2 = \left(z + \frac{p}{2} - r\right)\left(z + \frac{p}{2} + r\right)$. Nach der Nullteilerfreiheit ist das genau dann null, wenn $z = -\frac{p}{2} + r$ oder $z = -\frac{p}{2} - r$. □

Für reelle p, q mit $\frac{p^2}{4} - q < 0$ erhält man $r = i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ und zwei zueinander konjugierte Lösungen, wie nach Folgerung 3.22 zu erwarten. Was für Gleichungen zweiten Grades gilt, gilt für alle Grade:

Bemerkung (Fundamentalsatz der Algebra, ohne Beweis). Jedes Polynom $c_n z^n + \cdots + c_0$ mit komplexen Koeffizienten, $n \geq 1$ und $c_n \neq 0$, hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Der Satz wird in diesem Kurs nicht bewiesen. Die üblichen Beweise benutzen eine Eigenschaft, die über die Körperaxiome hinausgeht, nämlich die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ in einer ihrer Formen. Selbst die Beweise, die weitgehend algebraisch vorgehen, brauchen zwei Tatsachen aus der Analysis: dass jede nichtnegative reelle Zahl eine Quadratwurzel hat und dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades eine reelle Nullstelle hat. Die zweite folgt aus dem Zwischenwertsatz (Einheit 7). Ein anderer Beweis benutzt den Satz, dass eine stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossenen Menge der Ebene ein Minimum annimmt, zusammen mit der Existenz k-ter Wurzeln in $\mathbb{C}$ (Folgerung 9.33 (5)). Einheit 8 beweist den Satz vom Minimum für kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$; die Übertragung auf die Ebene gehört in die Analysis mehrerer Veränderlicher. Der Fundamentalsatz besagt, dass die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ nicht weitergetrieben werden muss: Keine Polynomgleichung zwingt zu einem noch größeren Zahlbereich.

3.5 Warum sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt

In $\mathbb{R}$ kann man Zahlen der Größe nach vergleichen, und die Anordnung verträgt sich mit Addition und Multiplikation. Davon hängt die halbe Analysis ab: Abschätzungen, monotone Folgen, Supremum, Zwischenwertsatz. Liegt es nur an einer ungeschickten Wahl, dass auf $\mathbb{C}$ keine solche Anordnung erklärt ist? Der folgende Satz zeigt, dass es keine gibt, gleichgültig wie man sie wählt.

Was „angeordnet“ heißt, legt Definition 2.3 fest: Es gibt eine Menge P positiver Elemente mit (Pos1) und (Pos2), und $x < y$ bedeutet $y - x \in P$. Die Frage dieses Abschnitts ist, ob es auf $\mathbb{C}$ irgendeine Teilmenge P mit diesen Eigenschaften gibt; mit der Anordnung von $\mathbb{R}$ braucht sie nichts zu tun zu haben. Für das Gegenbeispiel (G1) und für den Vergleich mit anderen Darstellungen ist eine zweite, gleichwertige Fassung nützlich, die nur von der Relation $<$ spricht.

Lemma 3.14 (Anordnung durch eine Relation). Sei K ein Körper und $<$ eine Relation auf K, so dass für alle $x, y, z \in K$ gilt:

- (A1) Es gilt genau eine der Beziehungen $x < y$, $x = y$, $y < x$.
- (A2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.
- (A3) Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$.
- (A4) Aus $x < y$ und $0 < z$ folgt $xz < yz$.

Dann erfüllt $P = \{x \in K : 0 < x\}$ die Bedingungen (Pos1) und (Pos2), und es gilt $x < y$ genau dann, wenn $y - x \in P$. Umgekehrt erfüllt in jedem angeordneten Körper die Relation $<$ aus Definition 2.3 die Bedingungen (A1)–(A4), und die zugehörige Menge $\{x : 0 < x\}$ ist wieder P. Die beiden Beschreibungen einer Anordnung entsprechen sich also umkehrbar eindeutig. Ein Körper heißt *anordenbar*, wenn es in ihm eine Teilmenge P mit (Pos1) und (Pos2) gibt; nach dem Gesagten ist das genau dann der Fall, wenn es auf ihm eine Relation mit (A1)–(A4) gibt.

Beweis. Nach (A3) mit $z = -x$ folgt aus $x < y$, dass $0 < y - x$; nach (A3) mit $z = x$ folgt aus $0 < y - x$, dass $x < y$. Also ist $x < y$ gleichwertig mit $y - x \in P$, insbesondere $x < 0$ gleichwertig mit $-x \in P$. (Pos1): Nach (A1) mit $y = 0$ gilt genau eine der Beziehungen $x < 0$, $x = 0$, $0 < x$, also genau eine der Aussagen $-x \in P$, $x = 0$, $x \in P$. (Pos2): Seien $0 < x$ und $0 < y$. Nach (A3) ist $0 + y < x + y$, mit (A2) also $0 < x + y$. Nach (A4) ist $0 \cdot y < x \cdot y$, also $0 < xy$, denn $0 \cdot y = 0$ (Lemma 2.2). Umgekehrt: In einem angeordneten Körper gelten nach Satz 2.4 die Regeln (O0) und (O5). (O0) enthält (A1) und (A2), (O5) enthält (A3) und (A4). Nach Definition 2.3 ist $P = \{x : x > 0\}$. □

Satz 3.15. In jedem angeordneten Körper gilt $x^2 > 0$ für jedes $x \neq 0$. Insbesondere ist $1 > 0$ und $-1 < 0$.

Beweis. Die erste Aussage und $1 > 0$ sind Regel (O3), die nach Satz 2.4 in jedem angeordneten Körper gilt. Addiert man -1 zu beiden Seiten von $0 < 1$, so folgt nach (O5) $-1 < 0$. □

Satz 3.16. Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung. Allgemeiner lässt sich kein Körper anordnen, in dem -1 ein Quadrat ist: Es gibt in ihm keine Menge P mit (Pos1) und (Pos2) und, nach Lemma 3.14 gleichwertig, keine Relation mit (A1)–(A4).

Beweis. Sei K angeordnet und $j \in K$ mit $j^2 = -1$. Dann ist $j \neq 0$, denn $0^2 = 0 \neq -1$. Nach Satz 3.15 ist $j^2 > 0$, also $-1 > 0$, und zugleich $-1 < 0$. Das widerspricht (O0). Für $K = \mathbb{C}$ wähle $j = i$. □

Der Beweis ist kurz, aber er zeigt genau, woran es liegt: Eine Anordnung, die mit der Multiplikation verträglich ist, macht alle Quadrate nichtnegativ, und in $\mathbb{C}$ ist jede Zahl ein Quadrat (Satz 3.12), also auch -1. Verlangt man nur die Verträglichkeit mit der Addition, so gibt es durchaus totale Ordnungen auf $\mathbb{C}$ (G1); sie sind für die Analysis nutzlos.

Was bedeutet das praktisch? Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen haben keinen Sinn. Ein Ausdruck wie $z < w$ oder $|z - a| < \varepsilon$ ist nur dann zulässig, wenn auf beiden Seiten reelle Zahlen stehen. Alle Abschätzungen in $\mathbb{C}$ laufen über reelle Größen: Beträge, Real- und Imaginärteile. Begriffe, die die Anordnung brauchen – monotone Folge, obere Schranke, Supremum, Limes superior –, gibt es nur für reelle Folgen und Mengen. Begriffe, die nur den Abstand brauchen – Konvergenz, Cauchy-Folge, Beschränktheit im Sinn von $|z_n| \leq C$ –, übertragen sich wörtlich, mit reellen Toleranzen und Schranken (Abschnitt 3.3). Diese Trennung zieht sich durch den ganzen Kurs; Einheit 4 weist bei jedem Satz aus, auf welcher Seite er steht.

Bilanz zur Leitfrage. Der gesuchte Zahlbereich existiert: $\mathbb{C}$ ist ein Körper, der $\mathbb{R}$ enthält und in dem -1 ein Quadrat ist (Sätze 3.2 und 3.3). Als kleinster solcher Körper ist er bis auf Isomorphie eindeutig: Jeder Körper mit diesen Eigenschaften enthält eine Kopie von $\mathbb{C}$ (Satz 3.4), und wird er von $\mathbb{R}$ und einer Wurzel aus -1 ausgeschöpft, so ist er zu $\mathbb{C}$ isomorph, mit genau zwei Isomorphismen, die $\mathbb{R}$ festlassen (Folgerung 3.21). Gewonnen hat man mehr als verlangt, denn jede komplexe Zahl hat eine Quadratwurzel und jede quadratische Gleichung eine Lösung (Satz 3.12, Folgerung 3.13). Die Körperregeln bleiben erhalten; verloren geht die Anordnung, und zwar zwangsläufig (Satz 3.16): Wer Wurzeln aus negativen Zahlen will, muss auf das Vergleichen der Größe nach verzichten.

3.6 Der Einheitskreis

Die Menge $S^1 = \{u \in \mathbb{C} : |u| = 1\}$ heißt *Einheitskreis*. Nach Abschnitt 3.3 lässt sich jedes $z \neq 0$ schreiben als

$$z = |z|\, u \qquad \text{mit} \qquad u = \frac{z}{|z|} \in S^1,$$

und diese Zerlegung in einen Betrag $r > 0$ und eine *Richtung* $u \in S^1$ ist eindeutig: Aus $z = ru$ mit $r > 0$, $|u| = 1$ folgt $|z| = r$ und dann $u = z/r$.

Satz 3.17. Der Einheitskreis ist unter Multiplikation abgeschlossen, enthält 1, und mit u liegt auch $u^{-1} = \bar{u}$ in S^1. (In der Sprache der Algebra ist S^1 eine *Gruppe* bezüglich der Multiplikation; der Begriff wird im Kurs nicht weiter gebraucht.)

Beweis. $|uv| = |u|\,|v| = 1$; $|1| = 1$; aus $u\bar{u} = |u|^2 = 1$ folgt $u^{-1} = \bar{u}$, und $|\bar{u}| = |u| = 1$. □

Man kann die Punkte von S^1 beschreiben, ohne Winkelfunktionen zu benutzen.

Satz 3.18 (rationale Parametrisierung). Für jedes $t \in \mathbb{R}$ liegt

$$u(t) = \frac{1+ti}{1-ti} = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\, i$$

auf dem Einheitskreis, und $u(t) \neq -1$. Umgekehrt ist jedes $u \in S^1$ mit $u \neq -1$ von dieser Form, und zwar mit genau einem t, nämlich $t = \dfrac{\operatorname{Im} u}{1 + \operatorname{Re} u}$.

Beweis. $1 - ti \neq 0$, weil der Realteil 1 ist. Die Zahlen $1 + ti$ und $1 - ti$ sind zueinander konjugiert, haben also denselben Betrag; nach Satz 3.9 (2) ist $|u(t)| = 1$. Die zweite Darstellung erhält man durch Erweitern mit $1+ti$: $(1+ti)^2 = 1-t^2+2ti$, $(1-ti)(1+ti) = 1 + t^2$. Wäre $u(t) = -1$, so wäre $\frac{2t}{1+t^2} = 0$, also $t = 0$ und dann $u(0) = 1$ – Widerspruch.

Sei nun $u = x + yi \in S^1$ mit $u \neq -1$. Dann ist $x \neq -1$: Aus $x = -1$ und $x^2 + y^2 = 1$ folgte $y = 0$, also $u = -1$. Setze $t = \frac{y}{1+x}$. Mit $y^2 = 1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ ist

$$1 + t^2 = \frac{(1+x)^2 + y^2}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2 + (1-x)(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{2}{1+x},$$

also $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2} - 1 = (1 + x) - 1 = x$ und $\frac{2t}{1+t^2} = t(1 + x) = y$. Somit $u = u(t)$. Eindeutigkeit: Aus $u(t) = u(s)$ folgt $(1 + ti)(1 - si) = (1 + si)(1 - ti)$, ausmultipliziert $1 + ts + (t - s)i = 1 + ts + (s - t)i$, also $t = s$. □

Ist t rational, so sind Real- und Imaginärteil von $u(t)$ rational; umgekehrt ist $t = \frac{\operatorname{Im} u}{1+\operatorname{Re} u}$ rational, wenn Real- und Imaginärteil von u es sind. Satz 3.18 beschreibt also alle rationalen Punkte des Einheitskreises außer -1, und mit ihnen alle pythagoreischen Tripel

(Aufgabe V1). Geometrisch ist $t = \frac{y}{x+1}$ die Steigung der Geraden durch -1 und u: Die Gerade durch -1 mit Steigung t schneidet den Kreis außer in -1 genau im Punkt $u(t)$.

Polardarstellung im Vorgriff. In Einheit 9 werden Sinus und Kosinus über die komplexe Exponentialfunktion erklärt. Was hier folgt, wird ohne Beweis und nur zur Orientierung mitgeteilt; was davon Einheit 9 ausführt, sagt der dritte Punkt.

- Jedes $u \in S^1$ ist von der Form $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$ mit einem reellen φ, das bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig ist. Jedes $z \neq 0$ ist also $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $r = |z|$ (*Polardarstellung*); φ heißt ein *Argument* von z.
- Es gilt $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$; vergleicht man Real- und Imaginärteile, so sind das die Additionstheoreme von Kosinus und Sinus. Bei der Multiplikation komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge, und die Argumente addieren sich.
- Daraus folgen die Formel von de Moivre $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ und die Lösbarkeit von $z^n = w$ für jedes $w \neq 0$ mit genau n Lösungen. Einheit 9 beweist die Polardarstellung, die Multiplikationsregel und den Fall $w = 1$ (Einheitswurzeln); die Formel von de Moivre und der allgemeine Fall stehen in Folgerung 9.33 (4) und (5).

Mit diesem Vorgriff wird die Leitfrage durchsichtig. Die Zahl $2+11i$ hat drei dritte Wurzeln; die Leitfrage hat eine benutzt, $2+i$. Die anderen zwei liefern, mit den konjugierten Wurzeln von $2-11i$ kombiniert, die beiden weiteren reellen Lösungen von $x^3 = 15x+4$ (Aufgabe V4, die ohne Polardarstellung auskommt). Cardanos Formel führt hier zwingend durch $\mathbb{C}$: Unter der inneren Wurzel steht eine negative Zahl, gleichgültig welche der drei Lösungen man sucht. Auf anderem Weg, durch Abspalten des Faktors $x-4$, erhält man die Lösungen 4 und $-2 \pm \sqrt{3}$ auch rein reell (Aufgabe V4 (c)); die Formel aber, die für alle Gleichungen $x^3 = px + q$ gilt, braucht die komplexen Zahlen, sobald $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$ ist.

Keiner der Sätze dieser Einheit benutzt die Polardarstellung.

3.7 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt

(G1) Ein Positivbereich, der nur mit der Addition verträglich ist. Sei P_{lex} die Menge der $a+bi$ mit $a > 0$ oder mit $a = 0$ und $b > 0$. Für jedes $z = a + bi$ gilt genau eine der Aussagen $z \in P_{\text{lex}}$, $z = 0$, $-z \in P_{\text{lex}}$: Für $a \neq 0$ entscheidet das Vorzeichen von a, für $a = 0$ das von b. Liegen $z = a+bi$ und $w = c+di$ in P_{lex}, so sind $a, c \geq 0$. Ist einer der beiden Realteile positiv, so ist es auch $a + c$. Sind beide null, so sind b und d positiv, also auch $b + d$. In beiden Fällen ist $z + w \in P_{\text{lex}}$. Damit gelten (Pos1) und der additive Teil von (Pos2). Die zugehörige Relation $z \prec w \iff w - z \in P_{\text{lex}}$ ist die *lexikographische Ordnung*: $a < c$, oder $a = c$ und $b < d$. Sie erfüllt (A1), (A2) und (A3), wie man mit den Rechnungen

aus dem Beweis von Satz 2.4 für (O0) und (O1) sieht, die nur (Pos1) und den additiven Teil von (Pos2) benutzen. Der multiplikative Teil von (Pos2) ist dagegen verletzt: Es ist $i \in P_{\text{lex}}$, aber $i \cdot i = -1 \notin P_{\text{lex}}$. In der Relationenform ist (A4) verletzt: $0 \prec i$, aber nicht $0 \cdot i \prec i \cdot i = -1$. Satz 3.16 trifft also genau die Verträglichkeit mit der Multiplikation.

(G2) Auch ohne Wurzel aus -1 ist nicht jeder Körper anordenbar. Auf $\mathbb{Z}$ sei $a \equiv b$, wenn $3 \mid a - b$ (Beispiel (c) in Abschnitt 1.9), und $\mathbb{F}_3$ die Menge der drei Klassen [0], [1], [2]. Addition und Multiplikation $[a]+[b] = [a+b]$, $[a][b] = [ab]$ sind wohldefiniert (für die Summe nach der Bemerkung in Abschnitt 1.9, für das Produkt wegen $ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'$). Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz übertragen sich aus $\mathbb{Z}$, [0] und [1] sind neutral, $[-a]$ ist das Negative von $[a]$, und $[0] \neq [1]$, weil 3 nicht 1 teilt. Wegen $[1][1] = [1]$, $[2][2] = [4] = [1]$ hat jedes Element $\neq [0]$ ein Inverses; $\mathbb{F}_3$ ist also ein Körper. Die Quadrate sind [0], [1], $[4] = [1]$; das Element $-[1] = [2]$ ist *kein* Quadrat, Satz 3.16 greift nicht. Trotzdem ist $\mathbb{F}_3$ nicht anordenbar. In einem angeordneten Körper ist nach Folgerung 2.5 $1 + 1 + 1 \geq 1 > 0$, in $\mathbb{F}_3$ ist aber $[1] + [1] + [1] = [3] = [0]$. Die Anordenbarkeit ist eine echte Zusatzeigenschaft eines Körpers; $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ haben sie, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_3$ nicht.

(G3) Die Wurzelregel versagt. Mit der Wahl aus Satz 3.12 ist $\sqrt{-1} = i$ und $\sqrt{1} = 1$. Dann ist

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1 \neq 1 = \sqrt{(-1)(-1)}.$$

Der bekannte Fehlschluss $-1 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ scheitert an der dritten Gleichung. Die Regel $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$ gilt für reelle $u, v \geq 0$, weil dort beide Seiten nichtnegativ sind und dasselbe Quadrat haben (Lemma 3.8). In $\mathbb{C}$ haben beide Seiten zwar dasselbe Quadrat, können sich aber um das Vorzeichen unterscheiden, und keine Wahl der Wurzeln behebt das für alle u, v zugleich. Denn wählt man $\sqrt{1} = 1$, so ist $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)}$, gleichgültig welche der Zahlen $\pm i$ man als $\sqrt{-1}$ nimmt; wählt man $\sqrt{1} = -1$, so ist $\sqrt{1}\sqrt{1} = 1 \neq \sqrt{1 \cdot 1}$.

(G4) Betragsquadrat und Quadrat. Für reelles x ist $|x|^2 = x^2$. Für komplexes z ist $|z|^2 = z\bar{z}$, und das ist im Allgemeinen nicht z^2: Für $z = i$ ist $|z|^2 = 1$, aber $z^2 = -1$. Wer $|z + w|^2$ wie im Reellen als $(z + w)^2$ ausmultipliziert, macht diesen Fehler.

(G5) Die Dreiecksungleichung ist meist strikt. Für $z = 1$, $w = i$ ist $|z + w| = |1 + i| = \sqrt{2} < 2 = |z| + |w|$. Nach Satz 3.10 gilt Gleichheit nur, wenn z ein nichtnegatives reelles Vielfaches von w ist; im Reellen war das die Bedingung $xy \geq 0$ aus Aufgabe B8 (c) der Einheit 1.

(G6) Komponentenweise Multiplikation ergibt keinen Körper. Erklärt man auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Multiplikation komponentenweise, $(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$, so gelten Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz, und $(1, 1)$ ist neutral. Aber $(1, 0) \odot (0, 1) = (0, 0)$: Zwei Elemente $\neq 0$ haben das Produkt 0. In einem Körper ist das unmöglich, denn aus $zw = 0$ und $z \neq 0$ folgt $w = z^{-1}zw = 0$. Insbesondere hat $(1, 0)$ kein Inverses. Die scheinbar willkürliche Formel in Definition 3.1 ist also nicht durch die naheliegende

komponentenweise ersetzbar. Für Zahlen der Form $a + bi$ ist sie nach der Rechnung zu Beginn von Abschnitt 3.1 durch die Körperregeln und $i^2 = -1$ erzwungen.

(G7) Re und Im sind nicht multiplikativ. $\operatorname{Re}(i \cdot i) = -1$, aber $\operatorname{Re}(i)\operatorname{Re}(i) = 0$. Real- und Imaginärteil sind additiv und mit reellen Faktoren verträglich, $\operatorname{Re}(tz) = t \operatorname{Re} z$ für $t \in \mathbb{R}$, mehr nicht. Multiplikativ ist der Betrag.

3.8 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (Rechnen in Normalform). Zu berechnen ist $\dfrac{(1+i)^5}{2-i}$. Man rechnet zuerst die Potenz über das Quadrat: $(1+i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, also $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$ und $(1+i)^5 = -4(1+i) = -4 - 4i$. Dann

$$\frac{-4-4i}{2-i} = \frac{(-4-4i)(2+i)}{5} = \frac{-8-4i-8i+4}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{12}{5}i.$$

Probe über die Beträge: $|1+i|^5/|2-i| = (\sqrt{2})^5/\sqrt{5} = 4\sqrt{2}/\sqrt{5}$, und $\left|-\frac{4}{5} - \frac{12}{5}i\right| = \frac{1}{5}\sqrt{16+144} = \frac{4\sqrt{10}}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Die Betragsprobe fängt viele Rechenfehler ab, weil sie nach Satz 3.9 (2) und Folgerung 3.23 unabhängig von der Rechnung in Normalform ist.

Beispiel 2 (Quadratwurzel). Gesucht sind die Lösungen von $z^2 = -5 + 12i$. Hier ist $a = -5$, $b = 12 \geq 0$ und $|w| = \sqrt{25+144} = 13$, also

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(13-5)} = 2, \qquad y = \sqrt{\tfrac{1}{2}(13+5)} = 3.$$

Nach Satz 3.12 (Fall $b \geq 0$) sind die Lösungen $\pm(2+3i)$. Probe: $(2+3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

Beispiel 3 (quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten). Zu lösen ist $z^2 - (4+i)z + (5+5i) = 0$. Mit $p = -(4+i)$, $q = 5 + 5i$ ist

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{(4+i)^2}{4} - 5 - 5i = \frac{15+8i}{4} - \frac{20+20i}{4} = \frac{-5-12i}{4}.$$

Für $-5 - 12i$ ist $|w| = 13$ und $b < 0$; Satz 3.12 liefert wie in Beispiel 2 die Zahlen $x = 2$, $y = 3$ und im Fall $b < 0$ die Wurzel $2 - 3i$. Also ist $r = \frac{2-3i}{2}$, und die Lösungen sind

$$z = \frac{4+i}{2} \pm \frac{2-3i}{2}, \qquad \text{also} \qquad z_1 = 3 - i, \quad z_2 = 1 + 2i.$$

Probe über die Koeffizienten: $z_1 + z_2 = 4 + i$ und $z_1 z_2 = 3 + 6i - i + 2 = 5 + 5i$. Die Lösungen sind nicht konjugiert zueinander; das ist kein Widerspruch zu Abschnitt 3.2, denn die Koeffizienten sind nicht reell.

Beispiel 4 (Mengen in der Ebene). Für welche z gilt $|z-1| = |z-i|$? Mit $z = x + yi$ ist $|z-1|^2 - |z-i|^2 = (x-1)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 2y - 2x$. Nach Lemma 3.8 sind zwei Beträge genau dann gleich, wenn ihre Quadrate gleich sind; die Menge ist also $\{z : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}$, die Gerade durch 0 und $1+i$ und zugleich die Mittelsenkrechte der Strecke von 1 nach i. Probe: $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ hat $|z-1| = |z-i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Für welche z gilt $|z-1| = 2|z+1|$? Quadrieren gibt $(x-1)^2 + y^2 = 4(x+1)^2 + 4y^2$, also $3x^2 + 10x + 3 + 3y^2 = 0$, nach Division durch 3 und quadratischer Ergänzung

$$\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Das ist der Kreis um $-\frac{5}{3}$ mit Radius $\frac{4}{3}$. Probe an den Schnittpunkten mit der reellen Achse: Für $z = -\frac{1}{3}$ ist $|z-1| = \frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} = 2|z+1|$, für $z = -3$ ist $|z-1| = 4 = 2 \cdot 2$. Die Menge der Punkte, deren Abstände zu zwei festen Punkten ein festes positives Verhältnis $\neq 1$ haben, ist ein Kreis (*Kreis des Apollonios*).

Beispiel 5 (Die Rechnung der Leitfrage, nachgerechnet). In der Leitfrage wurde $(2+i)^3 = 2 + 11i$ benutzt. Mit dem Binomialsatz, der nach Abschnitt 3.1 in $\mathbb{C}$ gilt: $(2+i)^3 = 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$. Nach Folgerung 3.22 ist $(2-i)^3 = \overline{(2+i)^3} = 2 - 11i$, und $(2+i) + (2-i) = 4$ ist reell, weil eine Zahl plus ihre Konjugierte nach Satz 3.6 (2) das Doppelte des Realteils ist.

Beispiel 6 (eine Gleichung vierten Grades ohne Polardarstellung). Gesucht sind alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -4$. Setzt man $u = z^2$, so ist $u^2 = -4$, nach Satz 3.12 (mit $a = -4$, $b = 0$, also $x = 0$, $y = 2$) also $u = 2i$ oder $u = -2i$. Für $z^2 = 2i$ liefert Satz 3.12 mit $a = 0$, $b = 2$, $|w| = 2$ die Zahlen $x = y = 1$ und die Lösungen $\pm(1+i)$; für $z^2 = -2i$ ist $b < 0$, und man erhält $\pm(1-i)$. Probe: $(1+i)^2 = 2i$ und $(2i)^2 = -4$. Die vier Lösungen sind $\pm 1 \pm i$, die Ecken eines Quadrats. Fasst man je zwei konjugierte Lösungen zusammen, so erhält man eine Zerlegung mit reellen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} z^4 + 4 &= \big(z - (1+i)\big)\big(z - (1-i)\big)\big(z + (1+i)\big)\big(z + (1-i)\big) \\ &= (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite bestätigt das: $(z^2+2)^2 - (2z)^2 = z^4 + 4z^2 + 4 - 4z^2$. Die Zerlegung ist eine reelle Aussage; gefunden hat man sie über $\mathbb{C}$. Nach demselben Muster zerfällt jedes reelle Polynom, sobald man seine komplexen Nullstellen kennt, in reelle Faktoren vom Grad 1 und 2; die Existenz der Nullstellen ist der Fundamentalsatz der Algebra. Gebraucht wird diese Zerlegung bei der Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung, Einheit 13).

Beispiel 7 (Woher die Formel der Leitfrage kommt). Seien $p, q \in \mathbb{C}$ und $u, v \in \mathbb{C}$ mit

$$u^3 + v^3 = q \qquad \text{und} \qquad 3uv = p.$$

Dann löst $x = u + v$ die Gleichung $x^3 = px + q$. Denn nach dem Binomialsatz, der in $\mathbb{C}$ gilt, ist

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = q + px.$$

Wie findet man solche u, v? Aus den beiden Bedingungen folgt $u^3 + v^3 = q$ und $u^3v^3 = \frac{p^3}{27}$, also $(t-u^3)(t-v^3) = t^2 - qt + \frac{p^3}{27}$. Die Zahlen u^3 und v^3 sind daher Lösungen der quadratischen Gleichung $t^2 - qt + \frac{p^3}{27} = 0$, nach Folgerung 3.13 die Zahlen $\frac{q}{2} + r$ und $\frac{q}{2} - r$ mit $r^2 = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$. Das ist die Formel der Leitfrage. Zugleich zeigt die Herleitung, was die Formel verschweigt: Die beiden dritten Wurzeln dürfen nicht unabhängig gewählt werden, sondern müssen $uv = \frac{p}{3}$ erfüllen. Umgekehrt: Hat man ein $u \neq 0$ mit $u^3 = \frac{q}{2} + r$ und setzt $v = \frac{p}{3u}$, so ist $v^3 = \frac{p^3}{27u^3} = \frac{q}{2} - r$, denn $\left(\frac{q}{2} + r\right)\left(\frac{q}{2} - r\right) = \frac{q^2}{4} - r^2 = \frac{p^3}{27}$; dann gelten beide Bedingungen. Dass jede komplexe Zahl eine dritte Wurzel hat, wird hier nicht bewiesen (Vorgriff in Abschnitt 3.6, bewiesen in Folgerung 9.33 (5)); im folgenden Fall kennt man sie.

Für $p = 15, q = 4$ lautet die quadratische Gleichung $t^2 - 4t + 125 = 0$ mit den Lösungen $2 \pm 11i$. Wählt man $u = 2 + i$, also $u^3 = 2 + 11i$, so verlangt die Bedingung $v = \frac{5}{u} = \frac{5(2-i)}{5} = 2 - i$, und tatsächlich ist $v^3 = 2 - 11i$ und $u^3 + v^3 = 4$. Damit ist $x = u + v = 4$. Die Rechnung kommt ohne Anordnung aus. Sie benutzt nur die Körperregeln und die Division durch 2 und 3 und gilt deshalb in jedem Körper, in dem $2 \neq 0$ und $3 \neq 0$ ist und die benötigten Wurzeln existieren; in $\mathbb{F}_3$ aus (G2) etwa erzwänge $3uv = p$ schon $p = 0$. In $\mathbb{R}$ allein bricht sie hier ab, weil $t^2 - 4t + 125 = (t-2)^2 + 121$ keine reelle Nullstelle hat.

3.9 Ausblick

- **Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$.** Einheit 4 erklärt Konvergenz über den Abstand $|z_n - z|$ mit reellen Toleranzen; alle Sätze, die nur Beträge, Dreiecksungleichung und Multiplikativität benutzen, gelten in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ zugleich. Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren (Satz 4.5); das folgt aus Satz 3.9 (3) und (4).
- **Exponentialfunktion.** In Einheit 9 wird $\exp(z) = \sum_{k\geq 0} z^k/k!$ für komplexe z erklärt. Die Funktionalgleichung folgt aus dem Binomialsatz, der in $\mathbb{C}$ gilt. Kosinus und Sinus werden als Real- und Imaginärteil von $\exp(i\varphi)$ definiert, π als das Doppelte der Nullstelle des Kosinus im Intervall $[0, 2]$; die Polardarstellung aus Abschnitt 3.6 wird damit bewiesen.
- **Potenzreihen.** Eine Potenzreihe konvergiert im Inneren eines Kreises, nicht nur eines Intervalls (Einheit 14). Warum die Reihe von $1/(1 + x^2)$ für reelles x nur bei

$|x| < 1$ konvergiert, obwohl die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ glatt ist, erklärt erst der Blick auf $\mathbb{C}$: Bei $\pm i$ wird der Nenner null.

- **Anordnung.** Satz 3.16 trennt die Begriffe dieses Kurses in zwei Sorten: metrische (Konvergenz, Cauchy-Folge, Stetigkeit), die in $\mathbb{C}$ gelten, und ordnungsabhängige (Supremum, Monotonie, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz), die auf $\mathbb{R}$ beschränkt bleiben. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung etwa gilt für komplexwertige Funktionen nicht in der reellen Form: Für $f(t) = \cos t + i \sin t$ auf $[0, 2\pi]$ ist $f(2\pi) - f(0) = 0$, aber die Ableitung $f'(t) = -\sin t + i \cos t$ hat überall den Betrag 1 (Vorgriff auf die Einheiten 9 und 10).
- **Fundamentalsatz der Algebra.** Er wird nicht bewiesen; er gehört in die Funktionentheorie oder die Algebra, und die üblichen Beweise benutzen die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Anmerkung (hyperkomplexe Zahlen, ohne Beweise). Von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ kommt man, indem man Paare reeller Zahlen multipliziert. Es liegt nahe, dasselbe mit Tripeln oder längeren Tupeln zu versuchen. Zahlbereiche dieser Art, also $\mathbb{R}^n$ mit der komponentenweisen Addition und einer Multiplikation, die distributiv ist, $\mathbb{R}$ fortsetzt und mit der komponentenweisen Multiplikation mit reellen Zahlen verträglich ist, $(tx)y = x(ty) = t(xy)$ für reelle t, nannte man früher *hyperkomplexe Zahlen*. Es gibt sie, aber jeder Schritt über $\mathbb{C}$ hinaus kostet eine Rechenregel.

Für Tripel gelingt es nicht: Auf $\mathbb{R}^3$ gibt es keine solche Multiplikation, die einen Körper ergibt. Für Quadrupel fand William Rowan Hamilton die *Quaternionen* $\mathbb{H}$. Ihre Elemente sind $a + bi + cj + dk$ mit reellen a, b, c, d, und gerechnet wird nach den Regeln

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik.$$

Alle Körperaxiome gelten bis auf eines: Die Multiplikation ist nicht kommutativ. Das Distributivgesetz gilt dabei von beiden Seiten, $x(y + z) = xy + xz$ und $(y + z)x = yx + zx$. Einen solchen Bereich nennt man *Schiefkörper*. Jedes Element außer 0 hat ein Inverses, und der Betrag $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ ist multiplikativ wie in Satz 3.9. Dass die Kommutativität fehlt, hat Folgen: Aus den Regeln folgt $(bi + cj + dk)^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)$, weil sich die gemischten Glieder wegen $ij = -ji$, $jk = -kj$, $ki = -ik$ paarweise aufheben. Die Gleichung $x^2 = -1$ hat in $\mathbb{H}$ also unendlich viele Lösungen, nämlich alle $bi + cj + dk$ mit $b^2 + c^2 + d^2 = 1$. In einem Körper hat sie höchstens zwei.

In der Dimension 8 gibt es die *Oktonionen*; bei ihnen geht zusätzlich das Assoziativgesetz verloren, dividieren kann man noch. Danach ist Schluss: In keiner anderen Dimension gibt es hyperkomplexe Zahlen, in denen man durch jedes Element außer 0 dividieren kann; das ist ein Satz von Bott, Milnor und Kervaire, bewiesen mit Methoden der Topologie. Ein älterer Satz von Frobenius besagt: Bis auf Isomorphie sind $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ die einzigen hyperkomplexen Zahlbereiche mit assoziativer Multiplikation, in denen man durch jedes Element außer 0 dividieren kann. Verlangt man auch die Kommutativität, so bleiben nur $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. Ein Satz von Hurwitz besagt, dass ein multiplikativer

Betrag der beschriebenen Art, also die euklidische Länge mit $|xy| = |x|\,|y|$, nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 möglich ist; bis auf Isomorphie sind das $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und die Oktonionen.

Die Reihe der Verluste lautet also: $\mathbb{R}$ ist angeordnet, $\mathbb{C}$ nicht mehr (Abschnitt 3.5); $\mathbb{C}$ ist kommutativ, $\mathbb{H}$ nicht mehr; $\mathbb{H}$ ist assoziativ, die Oktonionen nicht mehr. Für die Analysis ist $\mathbb{C}$ deshalb der letzte Zahlbereich, in dem alle Körperaxiome gelten. Dieser Kurs benutzt die Quaternionen und Oktonionen nicht.

Zum Vergleich.[1] Der Stoff dieser Einheit steht am Anfang vieler Analysis-Vorlesungen: die Konstruktion als Zahlenpaare, Betrag und Dreiecksungleichung, die Nichtanordenbarkeit. Bei O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, § 13, stehen die Konstruktion von $\mathbb{C}$ als Paare, Konjugation, Betrag $\sqrt{z\bar{z}}$, Multiplikativität und Dreiecksungleichung; die Beweise von Satz 3.2 (Assoziativität), Satz 3.9 (2) und Satz 3.10 folgen im Beweisgang diesem Paragraphen, in eigener Formulierung und mit zusätzlichem Gleichheitsfall. Die Formel für die Quadratwurzel in Satz 3.12 steht mit derselben Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen des Imaginärteils als Aufgabe 13.1 dort und als Aufgabe 13 A im *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage. Die rationale Parametrisierung des Einheitskreises und der Weg zu den pythagoreischen Tripeln (Satz 3.18, Aufgabe V1) stehen im Übungsbuch als Bemerkung zur Lösung von Aufgabe 14 G, dort über den halben Winkel; hier wird der Parameter ohne Winkelfunktionen eingeführt. Die Darstellung hier legt das Gewicht auf die Frage, was beim Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ gewonnen wird und was verloren geht.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 3

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Schreiben Sie in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(2 - i)(3 + 4i)$

(b) $(1 + i)^8$

(c) $\dfrac{1 + 2i}{3 - i}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{99} i^k$

Berechnen Sie $\left|\frac{1+2i}{3-i}\right|$ auf zwei Wegen: aus dem Ergebnis von (c) und mit Satz 3.9 (2).

R2. Quadratwurzeln und eine quadratische Gleichung.

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = 3 + 4i$ und alle z mit $z^2 = -8i$.

(b) Lösen Sie $z^2 + 2iz - 4 - 4i = 0$ und machen Sie die Probe.

R3. Beschreiben Sie die folgenden Mengen geometrisch und beweisen Sie Ihre Beschreibung:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| < |z - 2i|\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \operatorname{Re}(1/z) = \frac{1}{2}\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \ \bar{z} = z^2\}$ (geben Sie alle Elemente an)

R4. Für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$, sei $w = \dfrac{z - 1}{z + 1}$.

(a) Zeigen Sie: $\operatorname{Re} w = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z + 1|^2}$ und $\operatorname{Im} w = \dfrac{2 \operatorname{Im} z}{|z + 1|^2}$.

(b) Folgern Sie: Für $|z| = 1$ ist w rein imaginär; für $|z| < 1$ ist $\operatorname{Re} w < 0$.

(c) Berechnen Sie w für $z = i$ einmal direkt und einmal mit (a).

R5. Eine Gleichung vierten Grades.

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -7 - 24i$. (Hinweis: Setzen Sie $u = z^2$ und wenden Sie Satz 3.12 zweimal an.)

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $u^4 = 1$ genau die Lösungen 1, i, -1, $-i$ hat, und dass die Lösungen aus (a) genau die Zahlen $z_0 u$ mit $u^4 = 1$ sind, wobei z_0 eine beliebige Lösung aus (a) ist.

R6. Abschätzungen für ein Polynom.

(a) Zeigen Sie $|z^3 - 2z + 1| \geq 3$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 2$. Für welche z mit $|z| = 2$ gilt Gleichheit?

(b) Zeigen Sie: Für alle z mit $|z| \geq 2$ ist $|z^3 - 2z + 1| \geq \frac{1}{4}|z|^3$. Folgern Sie, dass alle Nullstellen von $z^3 - 2z + 1$ in der Kreisscheibe $B_2(0)$ liegen.

Stufe B – Beweisen

B1. Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die Parallelogrammgleichung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2,$$

und deuten Sie sie geometrisch.

B2. Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$:

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}\,|z|.$$

Bestimmen Sie für beide Ungleichungen alle z, für die Gleichheit gilt.

B3. Seien $a, b \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: $|1 - \bar{a}b|^2 - |a - b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2)$.

(b) Folgern Sie: Sind $|a| < 1$ und $|b| < 1$, so ist $\bar{a}b \neq 1$ und $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$.

(c) Sei $|a| = 1$. Zeigen Sie, dass $\bar{a}b = 1$ genau für $b = a$ gilt, und folgern Sie: Für $b \neq a$ ist $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$.

B4. Sei K ein angeordneter Körper (Definition 2.3; gleichwertig Lemma 3.14).

(a) Zeigen Sie: Sind $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, so ist $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

(b) Zeigen Sie: -1 ist in K keine Summe von Quadraten.

(c) Leiten Sie aus (a) noch einmal ab, dass $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann.

B5. Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Körperhomomorphismus (Definition 3.19).

(a) Es gelte $\varphi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, ohne die Bijektivität von φ vorauszusetzen: φ ist die Identität oder die Konjugation.

(b) Es gelte nur $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Satz 2.41, dass dann $\varphi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, und folgern Sie die Aussage von (a).

B6. Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.

(a) Sei $z \in B_r(a)$ und $\rho = r - |z-a|$. Zeigen Sie $\rho > 0$ und $B_\rho(z) \subseteq B_r(a)$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $B_r(a) \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\}$.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ und $\rho = \frac{1}{2}|a-b|$. Zeigen Sie $B_\rho(a) \cap B_\rho(b) = \emptyset$.

Stufe V – Vertiefen

V1 (pythagoreische Tripel). Rationale Punkte des Einheitskreises.

(a) Seien $m > n \geq 1$ ganze Zahlen. Zeigen Sie mit $z = m + ni$ und Satz 3.9 (2), dass $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$.

(b) Zeigen Sie mit Satz 3.18: Ist (x, y) ein Punkt mit rationalen Koordinaten, $x^2 + y^2 = 1$ und $x \neq -1$, so gibt es ein $t \in \mathbb{Q}$ mit $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

(c) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$. Zeigen Sie, dass es teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass (a, b, c) ein rationales Vielfaches von $(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$ ist. Bestimmen Sie m, n für $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ und $(8, 15, 17)$.

V2 (Matrizenmodell). Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $\boldsymbol{M}(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Setzen Sie Matrizensumme und Matrizenprodukt aus der linearen Algebra voraus.

(a) Zeigen Sie $\boldsymbol{M}(a, b) + \boldsymbol{M}(c, d) = \boldsymbol{M}(a + c, b + d)$ und $\boldsymbol{M}(a, b)\,\boldsymbol{M}(c, d) = \boldsymbol{M}(ac - bd,\ ad + bc)$.

(b) Zeigen Sie: $\det \boldsymbol{M}(a, b) = |a + bi|^2$, und für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist $\boldsymbol{M}(a, b)^{-1} = \boldsymbol{M}\big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\big)$.

(c) Welche Matrix entspricht i? Was bewirkt sie an einem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

(d) Erklären Sie, warum man in diesem Modell die Assoziativität der Multiplikation in Satz 3.2 nicht nachrechnen muss.

V3 (Summen zweier Quadrate). Ganze Zahlen als Beträge.

(a) Zeigen Sie: Sind m und n Summen zweier Quadrate ganzer Zahlen, so auch mn.

(b) Stellen Sie $65 = 5 \cdot 13$ mit (a) auf zwei verschiedene Arten als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen dar.

(c) Zeigen Sie: Eine ganze Zahl der Form $4k + 3$ ist keine Summe zweier Quadrate ganzer Zahlen.

V4 (Die Gleichung der Leitfrage vollständig). Sei $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

(a) Zeigen Sie $\omega^2 = \bar{\omega}$, $\omega^3 = 1$ und $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

(b) Zeigen Sie: Die Lösungen von $z^3 = 2 + 11i$ sind genau $2 + i$, $(2 + i)\omega$ und $(2 + i)\bar{\omega}$. (Hinweis: $u^3 - 1 = (u - 1)(u^2 + u + 1)$.)

(c) Berechnen Sie $z + \bar{z}$ für jede dieser drei Lösungen und zeigen Sie, dass die Ergebnisse genau die drei reellen Lösungen von $x^3 = 15x + 4$ sind.

V5 (Cauchy-Schwarz in $\mathbb{C}$). Seien $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} z_k \bar{w}_k\Big|^2 \le \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2.$$

Hinweis: Für $W = \sum |w_k|^2 > 0$ und $S = \sum z_k \bar{w}_k$ betrachte man $\sum_k |z_k - \lambda w_k|^2$ mit $\lambda = S/W$.

V6 (warum $i^2 = -1$). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei die Addition komponentenweise erklärt und die Multiplikation durch

$$(a, b) * (c, d) = (ac + \alpha bd,\ ad + bc).$$

Für $\alpha = -1$ ist das Definition 3.1.

(a) Sei $\alpha \ge 0$ und $s = \sqrt{\alpha}$. Berechnen Sie $(s, 1) * (-s, 1)$ und folgern Sie, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit diesen Verknüpfungen kein Körper ist.

(b) Sei $\alpha < 0$ und $s = \sqrt{-\alpha}$. Zeigen Sie, dass $\psi(a, b) = a + bs\,i$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist mit $\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$ und $\psi(u * v) = \psi(u)\psi(v)$.

(c) Folgern Sie für $\alpha < 0$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist mit $+$ und $*$ ein Körper mit Einselement $(1, 0)$, und $j = (0, \frac{1}{s})$ erfüllt $j * j = (-1, 0)$. Was besagt Satz 3.4 für diesen Körper?

Lösungen

Lösung R1. (a) $(2 - i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 3i - 4i^2 = 10 + 5i$.

(b) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, also $(1 + i)^8 = (2i)^4 = 16\, i^4 = 16$.

(c) Erweitern mit $3 + i$: $\dfrac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \dfrac{3 + i + 6i + 2i^2}{10} = \dfrac{1 + 7i}{10} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{10}i$.

(d) Nach der geometrischen Summe (Satz 1.13, gültig in jedem Körper, Abschnitt 3.1) mit $q = i \ne 1$:

$$\sum_{k=0}^{99} i^k = \frac{1 - i^{100}}{1 - i} = 0,$$

denn $i^4 = (i^2)^2 = 1$, also $i^{100} = (i^4)^{25} = 1$. Direkt: Je vier aufeinanderfolgende Summanden $1 + i - 1 - i$ ergeben 0, und 100 ist durch 4 teilbar.

Betrag: Aus (c) ist $\left|\frac{1+7i}{10}\right| = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mit Satz 3.9 (2): $\frac{|1+2i|}{|3-i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lösung R2. (a) Für $w = 3 + 4i$ ist $|w| = 5$, $a = 3$, $b = 4 \geq 0$. Nach Satz 3.12 ist $x = \sqrt{(5+3)/2} = 2$, $y = \sqrt{(5-3)/2} = 1$, und im Fall $b \geq 0$ ist $x + yi = 2 + i$ eine Wurzel; die Lösungen sind $\pm(2 + i)$. Probe: $(2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$.

Für $w = -8i$ ist $|w| = 8$, $a = 0$, $b = -8 < 0$, also $x = \sqrt{4} = 2$, $y = \sqrt{4} = 2$, und im Fall $b < 0$ ist $x - yi = 2 - 2i$ eine Wurzel; die Lösungen sind $\pm(2 - 2i)$. Probe: $(2 - 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i$.

(b) Mit $p = 2i$, $q = -4 - 4i$ ist $\frac{p^2}{4} - q = -1 + 4 + 4i = 3 + 4i$, nach (a) also $r = 2 + i$. Nach Folgerung 3.13 sind die Lösungen

$$z = -i \pm (2 + i), \qquad z_1 = 2, \quad z_2 = -2 - 2i.$$

Probe: $4 + 4i - 4 - 4i = 0$. Für z_2: $z_2^2 = (-2 - 2i)^2 = 4 + 8i + 4i^2 = 8i$ und $2iz_2 = -4i - 4i^2 = 4 - 4i$, also $8i + 4 - 4i - 4 - 4i = 0$.

Lösung R3. Sei stets $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Nach Lemma 3.8 ist $|z - 1| < |z - 2i|$ gleichwertig mit $|z - 1|^2 < |z - 2i|^2$. Es ist

$$|z-1|^2 - |z-2i|^2 = (x-1)^2 + y^2 - x^2 - (y-2)^2 = -2x + 4y - 3.$$

Die Bedingung lautet also $-2x + 4y - 3 < 0$, das heißt $y < \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$. Die Menge ist die offene Halbebene unterhalb der Geraden $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$; sie besteht aus den Punkten, die näher bei 1 als bei $2i$ liegen. Die Gerade geht durch den Mittelpunkt $\frac{1}{2} + i$ der Strecke von 1 nach $2i$ und steht auf dieser Strecke senkrecht: Die Strecke hat die Richtung $(-1, 2)$, die Gerade die Richtung $(2, 1)$, und $(-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$. Probe: $z = 1$ liegt in der Menge, denn $|1 - 1| = 0 < \sqrt{5} = |1 - 2i|$, und tatsächlich ist $0 < \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$.

(b) Nach Satz 3.9 (5) ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, also $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}$. Für $z \neq 0$ ist $\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ gleichwertig mit $x^2 + y^2 = 2x$, also mit $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Die Menge ist der Kreis um 1 mit Radius 1, ohne den Punkt 0, der auf diesem Kreis liegt, aber ausgeschlossen ist.

(c) Ist $\bar{z} = z^2$, so ist $|z| = |\bar{z}| = |z|^2$, also $|z| = 0$ oder $|z| = 1$. In Komponenten lautet die Gleichung $x - yi = x^2 - y^2 + 2xyi$, also

$$x^2 - y^2 = x \qquad \text{und} \qquad 2xy = -y.$$

Die zweite Gleichung heißt $y(2x + 1) = 0$. Ist $y = 0$, so gibt die erste $x^2 = x$, also $x = 0$ oder $x = 1$. Ist $x = -\frac{1}{2}$, so gibt die erste $\frac{1}{4} - y^2 = -\frac{1}{2}$, also $y^2 = \frac{3}{4}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Probe für $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$: $z^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{z}$. Die Menge ist

$$\left\{0,\ 1,\ -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Die drei Elemente $\neq 0$ sind genau die Lösungen von $z^3 = 1$. Denn für $|z| = 1$ ist $\bar{z} = z^{-1}$ (Satz 3.17), und $z^{-1} = z^2$ ist gleichwertig mit $z^3 = 1$; die drei Elemente haben Betrag 1 und erfüllen also $z^3 = 1$. Umgekehrt folgt aus $z^3 = 1$ nach Folgerung 3.23 $|z|^3 = 1$, und weil 1 die einzige nichtnegative dritte Wurzel aus 1 ist (Satz 2.39), ist $|z| = 1$. Dann ist $\bar{z} = z^{-1} = z^2$, also liegt z in der Menge.

Lösung R4. (a) Erweitern mit $\overline{z+1} = \bar{z} + 1$:

$$w = \frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2} = \frac{z\bar{z} + z - \bar{z} - 1}{|z+1|^2} = \frac{|z|^2 - 1 + 2i \operatorname{Im} z}{|z+1|^2},$$

mit Satz 3.6 (2) für $z - \bar{z}$. Der Nenner ist reell und positiv; Real- und Imaginärteil lassen sich ablesen.

(b) Für $|z| = 1$ ist der Zähler des Realteils null. Für $|z| < 1$ ist $|z|^2 - 1 < 0$ und $|z+1|^2 > 0$, also $\operatorname{Re} w < 0$.

(c) Direkt: $\frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2-1+i}{2} = \frac{2i}{2} = i$. Mit (a): $|i|^2 - 1 = 0$, $|i+1|^2 = 2$, $\operatorname{Im} w = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$, also $w = i$.

Die Abbildung $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ bildet also den Einheitskreis ohne -1 in die imaginäre Achse ab; sie ist im Wesentlichen die Umkehrung der Parametrisierung aus Satz 3.18 (dort ist $u(t) = \frac{1+ti}{1-ti}$, und man rechnet $\frac{u(t)-1}{u(t)+1} = ti$ nach).

Lösung R5. (a) Ist $z^4 = -7 - 24i$ und $u = z^2$, so ist $u^2 = -7 - 24i$. Für $w = -7 - 24i$ ist $|w| = \sqrt{49 + 576} = 25$, $a = -7$, $b = -24 < 0$. Nach Satz 3.12 ist

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}(25 - 7)} = 3, \qquad y = \sqrt{\tfrac{1}{2}(25 + 7)} = 4,$$

im Fall $b < 0$ also $x - yi = 3 - 4i$ eine Wurzel, und $u = \pm(3 - 4i)$. Probe: $(3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$.

Für $z^2 = 3 - 4i$ ist $|w| = 5$, $a = 3$, $b = -4 < 0$, also $x = 2$, $y = 1$ und $z = \pm(2 - i)$. Für $z^2 = -3 + 4i$ ist $|w| = 5$, $a = -3$, $b = 4 \geq 0$, also $x = 1$, $y = 2$ und $z = \pm(1 + 2i)$. Proben: $(2 - i)^2 = 3 - 4i$, $(1 + 2i)^2 = -3 + 4i$.

Weil jede Lösung z eine Zahl $u = z^2$ mit $u^2 = w$ liefert und Satz 3.12 alle solchen u und dann alle z mit $z^2 = u$ angibt, sind die Lösungen genau

$$2 - i, \qquad -2 + i, \qquad 1 + 2i, \qquad -1 - 2i.$$

(b) Es ist $u^4 - 1 = (u^2 - 1)(u^2 + 1)$. Wegen der Nullteilerfreiheit ist $u^4 = 1$ gleichwertig mit $u^2 = 1$ oder $u^2 = -1$, nach Satz 3.12 also mit $u \in \{1, -1\}$ oder $u \in \{i, -i\}$.

Sei z_0 eine Lösung aus (a). Für $u^4 = 1$ ist $(z_0u)^4 = z_0^4u^4 = -7 - 24i$. Ist umgekehrt $z^4 = -7 - 24i$, so ist $z_0 \neq 0$ und $u = z/z_0$ erfüllt $u^4 = z^4/z_0^4 = 1$, also $z = z_0u$. Für $z_0 = 2 - i$ ergibt das $(2 - i) \cdot i = 1 + 2i$, $(2 - i)(-1) = -2 + i$, $(2 - i)(-i) = -1 - 2i$: dieselben vier Zahlen wie in (a).

Bemerkung. Die vier Lösungen sind die Ecken eines Quadrats um 0; man erhält sie aus einer von ihnen durch fortgesetzte Multiplikation mit i, nach Abschnitt 3.3 also jeweils durch Übergang zu einem gleich langen, senkrecht stehenden Pfeil. Das Argument von (b) gilt für jedes n: Kennt man eine Lösung z_0 von $z^n = w \neq 0$, so sind die Lösungen genau die Zahlen z_0u mit $u^n = 1$. Dass es eine Lösung z_0 gibt und dass es genau n Zahlen u mit $u^n = 1$ gibt, die alle Potenzen einer von ihnen sind, folgt erst mit der Polardarstellung aus Einheit 9 (Folgerung 9.33 (3) und (5); Vorgriff in Abschnitt 3.6).

Lösung R6. (a) Nach der zweiten Ungleichung in Satz 3.10, angewandt auf z^3 und $2z-1$, zusammen mit der reellen Regel $x \leq |x|$, nach der ersten, angewandt auf $2z$ und -1, nach Satz 3.9 (2) ($|2z| = 2|z|$, $|-1| = 1$) und nach Folgerung 3.23 ist

$$|z^3 - 2z + 1| = |z^3 - (2z - 1)| \geq |z^3| - |2z - 1| \geq |z|^3 - (2|z| + 1) = 8 - 5 = 3.$$

Gilt Gleichheit, so ist $|z^3| - |2z-1| \leq 3$, zusammen mit $|z^3| = 8$ also $|2z-1| \geq 5 = |2z| + |-1|$; mit der Dreiecksungleichung folgt $|2z-1| = |2z| + |-1|$. Nach dem Gleichheitsfall von Satz 3.10 (mit dem zweiten Summanden $-1 \neq 0$) ist dann $2z = t \cdot (-1)$ mit reellem $t \geq 0$, also z reell und $z \leq 0$; wegen $|z| = 2$ ist $z = -2$. Umgekehrt ist für $z = -2$ tatsächlich $z^3 - 2z + 1 = -8 + 4 + 1 = -3$, also $|z^3 - 2z + 1| = 3$. Gleichheit gilt genau für $z = -2$.

(b) Sei $r = |z| \geq 2$. Wie in (a) ist $|z^3 - 2z + 1| \geq r^3 - 2r - 1$. Wegen $r^2 \geq 4$ ist $r^3 \geq 4r$, also $\frac{3}{4}r^3 \geq 3r$, und damit

$$r^3 - 2r - 1 - \tfrac{1}{4}r^3 = \tfrac{3}{4}r^3 - 2r - 1 \geq 3r - 2r - 1 = r - 1 \geq 1 > 0.$$

Also ist $|z^3 - 2z + 1| > \frac{1}{4}r^3 > 0$ für $|z| \geq 2$; insbesondere ist dort $z^3 - 2z + 1 \neq 0$, und jede Nullstelle erfüllt $|z| < 2$, liegt also in $B_2(0)$.

Bemerkung. Für großes $|z|$ verhält sich ein Polynom wie sein höchster Term; die übrigen Terme verschieben den Wert höchstens um einen kleineren Betrag. Abschätzungen dieser Art gehen in die üblichen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra ein (Bemerkung in Abschnitt 3.4): Außerhalb einer großen Kreisscheibe ist der Betrag des Polynoms groß, eine Nullstelle muss also innen liegen.

Lösung B1. Wie im Beweis von Satz 3.10:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2, \qquad |z - w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Addition ergibt die Behauptung. Geometrisch: In einem Parallelogramm mit den Seiten z und w sind $z+w$ und $z-w$ die Diagonalen. Die Summe der Quadrate der Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

Lösung B2. Sei $z = x + yi$. Die linke Ungleichung ist Satz 3.9 (4). Im Beweis dort ist $(|x| + |y|)^2 = |z|^2 + 2|x||y|$; Gleichheit gilt also genau für $|x||y| = 0$, das heißt, wenn z auf einer der Achsen liegt.

Rechts: Nach Lemma 3.8 genügt $(|x| + |y|)^2 \le 2(x^2 + y^2)$. Die Differenz ist

$$2x^2 + 2y^2 - x^2 - 2|x||y| - y^2 = (|x| - |y|)^2 \ge 0.$$

Gleichheit gilt genau für $|x| = |y|$, also auf den beiden Winkelhalbierenden.

Bemerkung. Die Ungleichungen besagen, dass der Betrag und die Größe $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ sich gegenseitig bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ abschätzen. Eine Folge ist für den einen Abstand genau dann eine Nullfolge, wenn sie es für den anderen ist; das benutzt Einheit 4.

Lösung B3. (a) Nach der Rechnung im Beweis von Satz 3.10 (mit Satz 3.6) ist

$$|1 - \bar{a}b|^2 = 1 - \bar{a}b - a\bar{b} + |a|^2|b|^2,$$
$$|a - b|^2 = |a|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b + |b|^2.$$

Die Differenz ist $1 + |a|^2|b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |b|^2)$.

(b) Aus $|a| < 1$, $|b| < 1$ folgt $|\bar{a}b| = |a||b| < 1$, also $\bar{a}b \neq 1$. Beide Faktoren rechts in (a) sind positiv, also $|a - b|^2 < |1 - \bar{a}b|^2$, nach Lemma 3.8 $|a - b| < |1 - \bar{a}b|$, und Division durch die positive Zahl $|1 - \bar{a}b|$ gibt die Behauptung.

(c) Wegen $|a| = 1$ ist $a\bar{a} = 1$, also $\bar{a} = a^{-1}$ (Satz 3.9 (5)), und $\bar{a}b = 1$ ist gleichwertig mit $b = a$. Für $b \neq a$ ist daher der Nenner $\neq 0$. Die rechte Seite in (a) ist null, also $|a - b|^2 = |1 - \bar{a}b|^2$, nach Lemma 3.8 $|a - b| = |1 - \bar{a}b|$, und Division durch $|1 - \bar{a}b| > 0$ gibt die Behauptung.

Bemerkung. Die Abbildung $b \mapsto \frac{a-b}{1-\bar{a}b}$ bildet für festes $|a| < 1$ die Kreisscheibe $B_1(0)$ in sich ab; sie spielt in der Funktionentheorie eine Rolle.

Lösung B4. Sei P die Menge der positiven Elemente von K (Definition 2.3).

(a) Sei nicht jedes x_k null, etwa $x_m \neq 0$. Nach Satz 3.15 ist $x_m^2 \in P$, und jedes andere x_k^2 liegt in P oder ist 0. Lässt man die Summanden 0 weg, ändert sich die Summe nicht, und es bleibt eine Summe von mindestens einem Element aus P. Eine solche Summe liegt in P, durch Induktion über die Anzahl der Summanden: Für einen Summanden ist das klar, und ist $s \in P$ und $t \in P$, so ist $s + t \in P$ nach (Pos2). Also ist $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in P$, nach (Pos1) also $\neq 0$. Das widerspricht der Voraussetzung.

(b) Wäre $-1 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$, so wäre $1^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 0$ mit $1 \neq 0$, im Widerspruch zu (a).

(c) In $\mathbb{C}$ ist $1^2 + i^2 = 0$ mit $1 \neq 0$. Nach (a) kann $\mathbb{C}$ nicht angeordnet sein.

Bemerkung. (b) ist schärfer als Satz 3.16: Dort wurde nur ausgeschlossen, dass -1 ein Quadrat ist. Auch in $\mathbb{F}_3$ aus (G2) ist $-1 = [2] = [1]^2 + [1]^2$ eine Summe von Quadraten; damit hat man einen zweiten Beweis, dass $\mathbb{F}_3$ nicht anordenbar ist.

Lösung B5. (a) Es ist $\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$. Nach Satz 3.12 hat $z^2 = -1$ genau die Lösungen $\pm i$, also ist $\varphi(i) = i$ oder $\varphi(i) = -i$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\varphi(a + bi) = \varphi(a) + \varphi(b)\varphi(i) = a + b\,\varphi(i).$$

Im ersten Fall ist φ die Identität, im zweiten die Konjugation. Beide Abbildungen haben die verlangten Eigenschaften (Satz 3.6 (1)). Die Bijektivität wurde nicht benutzt; sie folgt. Das ist der Fall $L = \mathbb{C}$, $j = i$ von Folgerung 3.21, dort mit der stärkeren Voraussetzung „Isomorphismus“, deren Beweis die Bijektivität ebenfalls nicht verwendet.

(b) Wegen $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ ist die Einschränkung $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\chi(a) = \varphi(a)$, eine Abbildung mit $\chi(a + b) = \chi(a) + \chi(b)$, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ und $\chi(1) = 1$. $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet (Satz 2.29), und jede Cauchy-Folge konvergiert (Satz 2.33). Nach Satz 2.41 mit $K = \mathbb{R}$ gibt es genau einen Isomorphismus angeordneter Körper $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und er ist die einzige Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit diesen drei Eigenschaften. Die Identität ist ein Isomorphismus angeordneter Körper, also ist sie diese Abbildung. Also ist χ die Identität, das heißt $\varphi(a) = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, und (a) ist anwendbar.

Bemerkung. Ohne jede Bedingung an $\mathbb{R}$ gibt es weitere Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die sogar bijektiv sind; ihre Existenz zeigt man mit dem Auswahlaxiom, und keiner von ihnen ist stetig. Das wird hier nicht bewiesen. Nach (b) bildet keiner von ihnen $\mathbb{R}$ in sich ab.

Lösung B6. (a) Wegen $|z - a| < r$ ist $\rho = r - |z - a| > 0$. Sei $w \in B_\rho(z)$. Nach Satz 3.10 ist

$$|w - a| \leq |w - z| + |z - a| < \rho + |z - a| = r,$$

also $w \in B_r(a)$.

(b) Für reelles x ist $x - a$ reell, und sein Betrag nach Definition 3.7 ist der reelle Betrag aus Definition 1.22 (Absatz nach Definition 3.7). Nach der Regel $|y| < c \iff -c < y < c$ für $c > 0$ aus Abschnitt 1.8 ist $|x - a| < r$ gleichwertig mit $-r < x - a < r$, also mit $a - r < x < a + r$.

(c) Angenommen, w liegt in beiden Kreisscheiben. Dann ist nach Satz 3.10

$$|a - b| \leq |a - w| + |w - b| < \rho + \rho = |a - b|,$$

ein Widerspruch. Hier wird $a \neq b$ gebraucht, damit $\rho > 0$ und die Kreisscheiben erklärt sind.

Ausblick. (a) besagt, dass jeder Punkt einer offenen Kreisscheibe noch eine kleine Kreisscheibe um sich in ihr hat; Mengen mit dieser Eigenschaft heißen *offen*. (c) ist der Kern des Arguments, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert hat: Zwei verschiedene Punkte haben disjunkte Umgebungen.

Lösung V1. (a) Für $z = m + ni$ ist $z^2 = (m^2 - n^2) + 2mn\,i$ und $|z^2| = |z|^2 = m^2 + n^2$. Also ist $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = |z^2|^2 = (m^2 + n^2)^2$.

(b) Nach Satz 3.18 ist $u = x + yi = u(t)$ mit $t = \frac{y}{1+x}$. Sind x und y rational und ist $x \neq -1$, so ist t rational.

(c) Der Punkt $(a/c,\ b/c)$ hat rationale Koordinaten, liegt auf dem Einheitskreis, und $a/c > 0$, also $a/c \neq -1$. Nach (b) ist $t = \frac{b/c}{1+a/c} = \frac{b}{a+c}$ eine positive rationale Zahl; schreibe $t = \frac{n}{m}$ mit teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\frac{a}{c} = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2mn}{m^2+n^2},$$

also $(a, b, c) = \frac{c}{m^2+n^2}\,(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$.

Beispiele: Für $(3, 4, 5)$ ist $t = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, also $m = 2$, $n = 1$, und $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2) = (3, 4, 5)$. Für $(5, 12, 13)$ ist $t = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, also $(9 - 4, 12, 13) = (5, 12, 13)$. Für $(8, 15, 17)$ ist $t = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$, also $(25 - 9, 30, 34) = (16, 30, 34) = 2 \cdot (8, 15, 17)$; hier ist der Faktor $\frac{1}{2}$. Die Darstellung liefert also nicht immer das Tripel selbst, sondern ein Vielfaches; welche Faktoren auftreten, ist eine Frage der Zahlentheorie und wird hier nicht verfolgt.

Lösung V2. (a) Die Summe ist komponentenweise klar. Das Produkt:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}(ac - bd,\ ad + bc).$$

(b) $\det \boldsymbol{M}(a, b) = a \cdot a - (-b) \cdot b = a^2 + b^2 = |a + bi|^2$. Nach (a) ist $\boldsymbol{M}(a, b)\,\boldsymbol{M}\big(\frac{a}{r}, \frac{-b}{r}\big) = \boldsymbol{M}\big(\frac{a^2+b^2}{r}, \frac{-ab+ba}{r}\big) = \boldsymbol{M}(1, 0)$ mit $r = a^2 + b^2 > 0$ (Beweis von Satz 3.2), und $\boldsymbol{M}(1, 0)$ ist die Einheitsmatrix. Weil die Produktformel in (a) in (a, b) und (c, d) symmetrisch ist, ist auch $\boldsymbol{M}\big(\frac{a}{r}, \frac{-b}{r}\big)\,\boldsymbol{M}(a, b) = \boldsymbol{M}(1, 0)$; also ist $\boldsymbol{M}\big(\frac{a}{r}, \frac{-b}{r}\big)$ die inverse Matrix.

(c) $i = (0, 1)$ entspricht $\boldsymbol{M}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sie bildet $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ab, also auf einen

gleich langen Vektor, der auf $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ senkrecht steht, wie in Abschnitt 3.3; geometrisch ist das die Drehung um einen rechten Winkel.

(d) Die Abbildung $z = (a, b) \mapsto \boldsymbol{M}(a, b)$ ist injektiv, denn a und b stehen in der ersten Spalte von $\boldsymbol{M}(a, b)$; nach (a) überträgt sie Addition und Multiplikation. Das Matrizenprodukt ist assoziativ (lineare Algebra), also ist $\boldsymbol{M}((zw)v) = (\boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{M}(w))\boldsymbol{M}(v) = \boldsymbol{M}(z)(\boldsymbol{M}(w)\boldsymbol{M}(v)) = \boldsymbol{M}(z(wv))$, und wegen der Injektivität ist $(zw)v = z(wv)$. Dasselbe gilt für das Distributivgesetz. Die Rechnung aus Satz 3.2 ist dadurch nicht überflüssig geworden, sondern in die Assoziativität des Matrizenprodukts verlagert.

Lösung V3. (a) Sei $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$ mit ganzen a, b, c, d. Für $z = a + bi$, $w = c + di$ ist $m = |z|^2$, $n = |w|^2$ und $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$, also

$$mn = |zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

mit ganzen Zahlen $ac - bd$ und $ad + bc$.

(b) $5 = |2 + i|^2$, $13 = |3 + 2i|^2$. Es ist $(2 + i)(3 + 2i) = 6 + 4i + 3i - 2 = 4 + 7i$ und $(2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i$. Also

$$65 = 4^2 + 7^2 = 8^2 + 1^2.$$

Die zwei Darstellungen entstehen aus den beiden Wahlen w und $\bar{w}$ für den zweiten Faktor.

(c) Jede ganze Zahl ist von der Form $2k$ oder $2k + 1$, und $(2k)^2 = 4k^2$, $(2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$. Ein Quadrat lässt also bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1, eine Summe zweier Quadrate den Rest 0, 1 oder 2, nie 3.

Lösung V4. (a) $\omega^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{4}i^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{\omega}$. Damit $\omega^3 = \omega\bar{\omega} = |\omega|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$. Und $1 + \omega + \omega^2 = 1 + 2\operatorname{Re}\omega = 1 - 1 = 0$.

(b) Nach der Leitfrage ist $(2+i)^3 = 2+11i$. Für jedes u mit $u^3 = 1$ ist $\big((2+i)u\big)^3 = 2+11i$; nach (a) sind $u = 1, \omega, \bar{\omega} = \omega^2$ solche Zahlen, denn $(\omega^2)^3 = (\omega^3)^2 = 1$. Umgekehrt: Ist $z^3 = 2 + 11i$, so ist $u = z/(2 + i)$ eine Lösung von $u^3 = 1$, also $(u - 1)(u^2 + u + 1) = 0$. Entweder ist $u = 1$, oder $u^2 + u + 1 = 0$; nach Folgerung 3.13 mit $p = q = 1$ und $r^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}i$, ist dann $u = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, also $u = \omega$ oder $u = \bar{\omega}$. Die drei Lösungen sind verschieden, weil $1, \omega, \bar{\omega}$ verschieden sind.

(c) Nach Satz 3.6 (2) ist $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$. Es ist

$$(2 + i)\omega = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \Big(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\Big)i,$$
$$(2 + i)\bar{\omega} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \Big(-\sqrt{3} - \frac{1}{2}\Big)i.$$

Die drei Werte $2\operatorname{Re} z$ sind 4, $-2-\sqrt{3}$ und $-2+\sqrt{3}$. Andererseits ist $x^3-15x-4=(x-4)(x^2+4x+1)$, wie Ausmultiplizieren zeigt: $x^3+4x^2+x-4x^2-16x-4$. Die Nullstellen von x^2+4x+1 sind nach Folgerung 3.13 $-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3}$. Die drei reellen Lösungen von $x^3=15x+4$ sind also genau die drei Werte $z+\bar{z}$.

Deutung. Cardanos Formel verlangt eine dritte Wurzel z aus $2+11i$ und eine aus $2-11i$, und zwar nach Beispiel 7 in Abschnitt 3.8 so gewählt, dass ihr Produkt $p/3=5$ ist. Das leisten die Paare z, $\bar{z}$: Nach Folgerung 3.22 ist $\bar{z}^3=\overline{z^3}=2-11i$, und nach (b) ist $z=(2+i)u$ mit $u\in\{1,\omega,\bar{\omega}\}$, also $|u|=1$ nach (a) und $z\bar{z}=|z|^2=|2+i|^2|u|^2=5$ nach Satz 3.9 (2). Jede der drei Wahlen liefert eine reelle Lösung. Die drei reellen Lösungen lassen sich mit der Formel nur auf dem Umweg über $\mathbb{C}$ erreichen.

Lösung V5. Ist $W=\sum|w_k|^2=0$, so sind alle $w_k=0$ (B4 (a) in $\mathbb{R}$, oder direkt), und beide Seiten sind 0. Sei $W>0$, $S=\sum z_k\bar{w}_k$, $Z=\sum|z_k|^2$ und $\lambda=S/W$. Für jedes k ist nach der Rechnung im Beweis von Satz 3.10

$$|z_k-\lambda w_k|^2=|z_k|^2-2\operatorname{Re}\bigl(\bar{\lambda}\,z_k\bar{w}_k\bigr)+|\lambda|^2|w_k|^2.$$

Summation über k ergibt, da Re additiv ist,

$$0\le\sum_{k=1}^{n}|z_k-\lambda w_k|^2=Z-2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}S)+|\lambda|^2W=Z-2\frac{|S|^2}{W}+\frac{|S|^2}{W}=Z-\frac{|S|^2}{W},$$

denn $\bar{\lambda}S=\bar{S}S/W=|S|^2/W$ ist reell, und $|\lambda|^2W=|S|^2/W$. Multiplikation mit $W>0$ gibt $|S|^2\le ZW$.

Bemerkung. Gleichheit gilt genau dann, wenn alle $z_k-\lambda w_k$ null sind, also wenn (z_k) ein komplexes Vielfaches von (w_k) ist (im Fall $W>0$). Für $n=1$ ist die Ungleichung die Gleichung $|z_1\bar{w}_1|=|z_1||w_1|$; für reelle Zahlen ist sie die aus der linearen Algebra bekannte Ungleichung von Cauchy und Schwarz.

Lösung V6. (a) Es ist $(s,1)*(-s,1)=(-s^2+\alpha,\ s-s)=(0,0)$, weil $s^2=\alpha$. Beide Faktoren sind von $(0,0)$ verschieden, denn ihre zweite Komponente ist 1. Das Nullelement der komponentenweisen Addition ist $(0,0)$. In einem Körper ist ein Produkt zweier Elemente $\neq 0$ nicht null (Lemma 2.2 (5); vergleiche (G6)). Also ist $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit $+$ und $*$ kein Körper. Für $\alpha=0$ ist $s=0$, und das Beispiel lautet $(0,1)*(0,1)=(0,0)$.

(b) *Bijektiv:* Zu $x+yi\in\mathbb{C}$ ist $(x,y/s)$ ein Urbild, denn $s>0$. Aus $a+bs\,i=a'+b's\,i$ folgt nach Satz 3.3 $a=a'$ und $bs=b's$, also $b=b'$. *Additiv:* klar. *Multiplikativ:* Mit $s^2=-\alpha$ ist

$$\begin{aligned}\psi(a,b)\,\psi(c,d)&=(a+bs\,i)(c+ds\,i)=(ac-bd\,s^2)+(ad+bc)s\,i\\&=(ac+\alpha bd)+(ad+bc)s\,i=\psi\bigl((a,b)*(c,d)\bigr).\end{aligned}$$

(c) Jedes Körperaxiom überträgt sich mit ψ aus $\mathbb{C}$, so wie in Aufgabe V2 (d). Zum Beispiel die Assoziativität: $\psi((u * v) * w) = (\psi(u)\psi(v))\psi(w) = \psi(u)(\psi(v)\psi(w)) = \psi(u * (v * w))$, und weil ψ injektiv ist, folgt $(u * v) * w = u * (v * w)$. Ebenso Kommutativität und Distributivgesetz. Neutral sind $\psi^{-1}(0) = (0,0)$ und $\psi^{-1}(1) = (1,0)$, denn $\psi(u)+0 = \psi(u)$ und $\psi(u) \cdot 1 = \psi(u)$; das Negative von u ist $\psi^{-1}(-\psi(u))$, das Inverse von $u \neq (0,0)$ ist $\psi^{-1}(\psi(u)^{-1})$; dabei ist $\psi(u) \neq 0$, weil ψ injektiv ist und $\psi(0,0) = 0$. Schließlich ist

$$j * j = \left(0 \cdot 0 + \alpha \cdot \frac{1}{s^2},\ 0\right) = \left(\frac{\alpha}{-\alpha},\ 0\right) = (-1,0).$$

Die Abbildung $a \mapsto (a,0)$ ist ein Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, denn $(a,0) + (c,0) = (a+c,0)$, $(a,0)*(c,0) = (ac,0)$, und $(1,0)$ ist das Einselement. Nach Lemma 3.20 ist ihr Bild, die Menge der Paare $(a,0)$, ein Teilkörper; nach Identifizierung von a mit $(a,0)$ enthält der Körper $\mathbb{R}$ als Teilkörper. Satz 3.4 mit diesem Körper als K und j als Wurzel aus -1 liefert $a+bi \mapsto (a,0)+(b,0)*j = (a, \frac{b}{s})$; das ist ψ^{-1}. Weil diese Abbildung surjektiv ist, ist der Körper nach Folgerung 3.21 zu $\mathbb{C}$ isomorph: Er ist $\mathbb{C}$ in anderen Koordinaten.

Deutung. Für $\alpha \geq 0$ hat das Element $(0,1)$ ein Quadrat $(\alpha,0)$, das in der reellen Kopie ein Quadrat ist, und daraus entstehen Nullteiler. Nur für $\alpha < 0$ entsteht ein Körper, und dann bis auf Isomorphie stets derselbe. Das ist eine zweite Antwort auf die Frage aus (G6), warum die Multiplikation in Definition 3.1 gerade so aussieht.

Teil II

Grenzwerte

EINHEIT 4

Folgen

Leitfrage

Ein Guthaben von 1 wird ein Jahr lang zum Zinssatz von 100 % verzinst. Bei jährlicher Gutschrift steht am Ende 2 auf dem Konto. Teilt man das Jahr in n gleiche Abschnitte und schreibt nach jedem Abschnitt den Zins $\frac{1}{n}$ gut, der von da an mitverzinst wird, so wächst das Guthaben auf

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Die Werte steigen: $a_1 = 2$, $a_2 = 2{,}25$, $a_4 \approx 2{,}4414$, bei monatlicher Gutschrift $a_{12} \approx 2{,}6130$, bei täglicher $a_{365} \approx 2{,}7146$, bei stündlicher $a_{8760} \approx 2{,}71813$, bei minütlicher $a_{525600} \approx 2{,}718279$. Nach Aufgabe V4 der Einheit 1 wächst (a_n) tatsächlich mit n. Die Zahlen deuten darauf hin, dass das Wachstum nicht über alle Grenzen geht, sondern sich einem Wert nähert. Aber welchem? Eine Formel für diesen Wert hat man nicht, und keine Tabelle beweist, dass es ihn gibt. **Wie kann man beweisen, dass eine Folge einen Grenzwert hat, wenn man ihn nicht kennt? Und was heißt „sich nähern" überhaupt genau?** Diese Einheit beantwortet beide Fragen. Die Antwort auf die zweite ist die Definition der Konvergenz; die Antwort auf die erste führt über die Vollständigkeit der reellen Zahlen und liefert die Zahl e.

Voraussetzungen. Aus Einheit 1: die Quantoren und ihre Verneinung (Abschnitt 1.2, Regel 1.3), die Anordnungsregeln (O0)–(O6) (Abschnitt 1.8), der Rekursionssatz (Abschnitt 1.6), die Summenformel $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Satz 1.12), die geometrische Summe (Satz 1.13), die Wohlordnung (Satz 1.16), der Binomialsatz (Satz 1.20), die Dreiecksungleichung (Satz 1.23) und die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24). Aus Einheit 2: $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper (Satz 2.25), der $\mathbb{Q}$ enthält (Satz 2.28). Benutzt werden die *archimedische Eigenschaft* (Satz 2.29: zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$), die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31), die *Cauchy-Vollständigkeit* (Satz 2.33: jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert), die *Supremumseigenschaft* (Satz 2.34; nach unten beschränkte Mengen haben ein Infimum, Folgerung 2.35) mit den Regeln aus Lemma 2.36, die erweiterte Zahlengerade $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 2.37), Lemma 2.38 (Potenzen), die *Existenz von Wurzeln* (Satz 2.39: zu $c \geq 0$

und $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \geq 0$ mit $y^k = c$, geschrieben $\sqrt[k]{c}$), die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Satz 2.9, Satz 2.39) und die Heron-Folge (Satz 2.18) mit ihrem Grenzwert in $\mathbb{R}$ (Lemma 2.32); im Aufgabenblatt außerdem die Abzählbarkeit (Abschnitt 2.7). Einheit 2 hat Folgen, Konvergenz, Nullfolgen und Cauchy-Folgen in einem beliebigen angeordneten Körper erklärt (Definition 2.14) und dort die ersten Regeln bewiesen (Lemma 2.15, Lemma 2.16); diese Einheit nimmt die Begriffe für reelle und komplexe Folgen zugleich auf und baut sie aus. Aus Einheit 3: der Körper $\mathbb{C}$, der sich nicht anordnen lässt (Satz 3.16), Lemma 3.8, Betrag und Dreiecksungleichung (Satz 3.9, Satz 3.10, Folgerung 3.23, Folgerung 3.24) und die Kreisscheiben $B_r(a)$ (Abschnitt 3.3). Die Nummern 4.32 bis 4.35 stehen in den Abschnitten 4.3, 4.6 und 4.7 dort, wo sie gebraucht werden; die Nummern folgen deshalb dort nicht der Reihe nach.

Schreibweise. $\mathbb{K}$ steht wie in Abschnitt 3.3 für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sätze, die für $\mathbb{K}$ formuliert sind, gelten für beide Körper mit demselben Beweis. Von $\mathbb{C}$ benutzen sie den Betrag mit $|z| = 0 \iff z = 0$, $|zw| = |z|\,|w|$ und der Dreiecksungleichung (Satz 3.9, Satz 3.10), an ausdrücklich genannten Stellen auch Real- und Imaginärteil; alle Ungleichungen stehen zwischen reellen Zahlen. Von $\mathbb{R}$ benutzen sie, wo es angegeben ist, die archimedische Eigenschaft oder die Vollständigkeit. Sätze, die die Anordnung benutzen, sind ausdrücklich für $\mathbb{R}$ formuliert; nach Satz 3.16 haben sie in $\mathbb{C}$ keinen Sinn. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind einige der folgenden Aussagen schon aus Einheit 2 bekannt: Satz 4.3 ist Lemma 2.16 (1); Satz 4.7 und Satz 4.30 (1), (2) stehen in Lemma 2.15; Satz 4.8, Satz 4.9 (1), (2) und der erste Teil von Satz 4.9 (3) stehen in Lemma 2.16 (2), (3), (5), der Zusatz von Satz 4.10 in Lemma 2.16 (4). Die Beweise dort vergleichen Elemente des angeordneten Körpers selbst; erst die folgenden Beweise, die nur reelle Beträge vergleichen, gelten auch für komplexe Folgen.

4.1 Konvergenz

Definition 4.1. Eine *Folge* in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto a_n$; man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz (a_n). Die Zahl a_n heißt das n-te *Glied*. Ebenso zugelassen sind Folgen, deren Indizes erst bei einer ganzen Zahl n_0 beginnen, $(a_n)_{n\geq n_0}$.

Alle Begriffe und Sätze dieser Einheit werden für Folgen ab $n = 1$ formuliert; für eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ sind sie über die verschobene Folge $(a_{n_0-1+m})_{m\in\mathbb{N}}$ erklärt. So ist $(a_{n-1})_{n\geq 2}$ dieselbe Folge wie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge ist mehr als die Menge ihrer Glieder: $(1, 0, 1, 0, \dots)$ und $(1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ haben dieselbe Gliedermenge $\{0, 1\}$ und sind verschiedene Folgen. Es kommt auf die Reihenfolge und die Wiederholungen an.

Man sagt, eine Aussage gilt *für fast alle n*, wenn sie für alle n mit höchstens endlich vielen Ausnahmen gilt, gleichwertig: wenn es ein N gibt, so dass sie für alle $n \geq N$ gilt. Die Gleichwertigkeit sieht man so: Sind $n_1, \dots, n_r$ die Ausnahmen, so leistet $N = \max\{n_1, \dots, n_r\} + 1$ das Verlangte, und ohne Ausnahmen $N = 1$; umgekehrt gibt es

unterhalb von N nur endlich viele Indizes. Gelten zwei Aussagen je für fast alle n, so gilt auch ihre Konjunktion für fast alle n: Man nimmt das größere der beiden N. Eine Aussage gilt *für unendlich viele n*, wenn es zu jedem N ein $n \geq N$ gibt, für das sie gilt. Nach Regel 1.3 ist das genau die Verneinung davon, dass ihre Verneinung für fast alle n gilt.

Definition 4.2. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{K}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und nennt a einen *Grenzwert* oder *Limes* der Folge. Eine Folge heißt *konvergent*, wenn sie gegen ein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert, sonst *divergent*. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Die Definition beantwortet die zweite Hälfte der Leitfrage. „Die Folge nähert sich a“ heißt: Wie klein man eine Toleranz ε auch vorschreibt, ab einer Stelle N liegen alle Glieder näher als ε bei a. In Worten mit „fast alle“: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Glieder in der Kreisscheibe $B_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{K} : \ |z - a| < \varepsilon\}$ aus Abschnitt 3.3, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ also im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Das N darf von ε abhängen und wird es fast immer; Einheit 1 hat in Abschnitt 1.2 gezeigt, warum die Reihenfolge der Quantoren nicht vertauscht werden darf. Ebenfalls dort steht die Verneinung: (a_n) konvergiert nicht gegen a, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele n gilt.

Man kann sich die Definition als Spiel vorstellen. Ein Gegner nennt eine Toleranz $\varepsilon > 0$, so klein er will; man selbst muss darauf eine Stelle N nennen, ab der alle Glieder innerhalb der Toleranz liegen. Die Folge konvergiert gegen a, wenn man dieses Spiel gegen jeden Gegner gewinnt. Für $a_n = \frac{1}{n}$ und $a = 0$ gewinnt man es mit jedem $N > \frac{1}{\varepsilon}$; für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ genügt $N = 1001$. Dass die Wahl von N von ε abhängt, ist kein Mangel, sondern der Inhalt der Definition: Je schärfer die Toleranz, desto später darf man erst einsetzen.

Drei unmittelbare Folgerungen. Erstens ist $a_n \to a$ gleichwertig damit, dass $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist, und damit, dass die reelle Folge $(|a_n - a|)$ eine Nullfolge ist; alle drei Aussagen haben dieselbe Definition. Zweitens ändert das Abändern, Weglassen oder Hinzufügen endlich vieler Glieder nichts an Konvergenz und Grenzwert: Danach stimmt die neue Folge (b_n) ab einer Stelle N_0 mit der verschobenen Folge (a_{n+r}) überein, mit einer festen ganzen Zahl r, und aus $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$ folgt $|b_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq \max\{N_0, N - r, 1\}$; die Umkehrung zeigt man ebenso. Drittens darf man in der Definition $< \varepsilon$ durch $\leq \varepsilon$ ersetzen oder ε durch $C\varepsilon$ mit einer festen Zahl $C > 0$: Was für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, gilt auch für $\varepsilon/2$ oder ε/C.

Satz 4.3 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). Eine Folge in $\mathbb{K}$ hat höchstens einen Grenzwert.

Beweisidee. Für $a \neq b$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$ sind die Kreisscheiben $B_\varepsilon(a)$ und $B_\varepsilon(b)$ disjunkt;

fast alle Glieder können nicht in beiden liegen.

Beweis. Gelte $a_n \to a$ und $a_n \to b$, und sei angenommen $a \neq b$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b| > 0$. Es gibt N_1 mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_1$ und N_2 mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N_2$. Für $n = \max\{N_1, N_2\}$ folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a-b|,$$

ein Widerspruch. □

Erst dieser Satz rechtfertigt die Schreibweise $\lim a_n = a$ mit dem bestimmten Artikel.

Satz 4.4 (zwei Grundbeispiele).

1. $\frac{1}{n} \to 0$.
2. Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge.

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$. Nach der archimedischen Eigenschaft (Satz 2.29) gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ ist $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ nach (O6).

(2) Für $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $0 < |q| < 1$ und $x = \frac{1}{|q|} - 1 > 0$, also $|q| = \frac{1}{1+x}$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.24) ist $(1+x)^n \geq 1 + nx > nx$, also mit Folgerung 3.23

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{nx}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle man nach der archimedischen Eigenschaft $N > \frac{1}{x\varepsilon}$; für $n \geq N$ ist dann $\frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} < \varepsilon$. □

Der zweite Teil ist die Rechnung aus Beispiel 3 in Abschnitt 1.11, jetzt als Konvergenzaussage. Die archimedische Eigenschaft ist hier unentbehrlich: In einem angeordneten Körper ohne sie gäbe es positive Elemente unterhalb aller $\frac{1}{n}$ (Absatz nach Definition 2.14), und $(\frac{1}{n})$ wäre keine Nullfolge.

Weitere Beispiele. Eine konstante Folge $a_n = c$ konvergiert gegen c. Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist divergent: Wäre $a_n \to a$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein N mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$, also $2 = |a_N - a_{N+1}| \leq |a_N - a| + |a - a_{N+1}| < 2$. Ebenso divergiert (i^n) in $\mathbb{C}$; das ergibt sich in Abschnitt 4.10 aus einem allgemeinen Beispiel.

Konvergenz in $\mathbb{C}$ lässt sich auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ zurückführen.

Satz 4.5. Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann gegen z, wenn $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.

Beweis. Nach Satz 3.9 (3) ist $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z|$, ebenso für den Imaginärteil; daraus folgt „⇒“ mit demselben N. Für „⇐“ sei $\varepsilon > 0$, und N so groß,

dass für $n \geq N$ beide Abweichungen $< \varepsilon/2$ sind. Nach Satz 3.9 (4) ist dann $|z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)| < \varepsilon$. □

Bemerkung (Folgen in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$). Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist Definition 4.2 die Definition 2.14 mit $K = \mathbb{R}$. Eine rationale Folge kann man in $\mathbb{Q}$ oder in $\mathbb{R}$ lesen; nach der Bemerkung nach Satz 2.29 ist es für die Konvergenz gegen eine rationale Zahl und für die Cauchy-Bedingung gleichgültig, ob ε die positiven rationalen oder die positiven reellen Zahlen durchläuft. Neu ist, dass der Grenzwert jede reelle oder komplexe Zahl sein darf: Die Heron-Folge aus Satz 2.18 konvergiert in $\mathbb{R}$ (Lemma 2.32), in $\mathbb{Q}$ nicht.

4.2 Beschränktheit und Rechenregeln

Die Definition der Konvergenz taugt zum Beweisen, nicht zum Rechnen: Wer jedes Mal ein N zu ε suchen muss, kommt nicht weit. Dieser Abschnitt zeigt, dass Konvergenz mit den Rechenoperationen verträglich ist. Dabei spielt ein einfacher Begriff die Hauptrolle, die Beschränktheit: Sie macht ein Produkt „Nullfolge mal etwas“ wieder zur Nullfolge.

Definition 4.6. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $C \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq C$ für alle n. Eine reelle Folge heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein C mit $a_n \leq C$ für alle n gibt, und *nach unten beschränkt* entsprechend.

Eine reelle Folge ist genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist: Aus $c \leq a_n \leq C$ folgt $|a_n| \leq \max\{|c|, |C|\}$.

Satz 4.7. Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.

Beweis. Gelte $a_n \to a$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es N mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$, also $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$. Dann ist $|a_n| \leq C$ für alle n mit $C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$. □

Die Umkehrung ist falsch, wie $((-1)^n)$ zeigt. Satz 4.7 wird vor allem in der Kontraposition gebraucht: Eine unbeschränkte Folge divergiert. So divergiert $a_n = n$.

Satz 4.8 (Nullfolgen). Seien (c_n), (d_n) Folgen in $\mathbb{K}$.

1. (*Majorante*) Ist (d_n) eine reelle Nullfolge und gilt $|c_n| \leq d_n$ für fast alle n, so ist (c_n) eine Nullfolge.
2. Ist (c_n) eine Nullfolge und (d_n) beschränkt, so ist $(c_n d_n)$ eine Nullfolge.
3. Sind (c_n) und (d_n) Nullfolgen, so auch $(c_n + d_n)$.

Beweis. (1) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $d_n < \varepsilon$ und $|c_n| \leq d_n$ für $n \geq N$. (2) Sei $|d_n| \leq C$ für alle n; nach Übergang zu $C + 1$ dürfen wir $C > 0$ annehmen. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $|c_n| < \varepsilon/C$ für $n \geq N$, also $|c_n d_n| < \varepsilon$. (3) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $|c_n| < \varepsilon/2$ und $|d_n| < \varepsilon/2$ für $n \geq N$, also $|c_n + d_n| < \varepsilon$. □

Teil (2) ist das Werkzeug, mit dem man Produkte behandelt. Er verlangt die Beschränktheit des zweiten Faktors, und ohne sie ist er falsch (G4).

Satz 4.9 (Rechenregeln). Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$, und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

1. $a_n + b_n \to a + b$ und $\lambda a_n \to \lambda a$;
2. $a_n b_n \to ab$;
3. $|a_n| \to |a|$ und, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\bar{a}_n \to \bar{a}$;
4. ist $b \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n, und für diese n gilt $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$.

Beweisidee. Jede Differenz wird so umgeformt, dass sie aus Termen der Form „beschränkt mal Nullfolge“ besteht; dafür schiebt man eine Null ein, wie in Aufgabe B8 der Einheit 1.

Beweis. (1) $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$ ist nach Satz 4.8 (3) eine Nullfolge; $\lambda a_n - \lambda a = \lambda(a_n - a)$ nach Satz 4.8 (2) mit der konstanten Folge λ.

(2) Man schiebt $-a_n b + a_n b$ ein:

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a).$$

Der erste Summand ist eine Nullfolge nach Satz 4.8 (2), weil (a_n) nach Satz 4.7 beschränkt ist; der zweite ebenso mit der konstanten Folge b. Nach Satz 4.8 (3) ist die Summe eine Nullfolge.

(3) Nach der zweiten Dreiecksungleichung (Satz 1.23, Satz 3.10) ist $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$; Satz 4.8 (1). Ferner $|\bar{a}_n - \bar{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$.

(4) Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}|b| > 0$ gibt es N_0 mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ für $n \geq N_0$. Für diese n ist

$$|b_n| \geq |b| - |b - b_n| > \tfrac{1}{2}|b| > 0,$$

insbesondere $b_n \neq 0$. Für $n \geq N_0$ ist weiter

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \frac{|b - b_n|}{|b_n|\,|b|} \leq \frac{2}{|b|^2}\,|b_n - b|,$$

und die rechte Seite ist nach (1) eine Nullfolge; nach Satz 4.8 (1) gilt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Mit (2) folgt $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to \frac{a}{b}$. □

Durch Induktion folgt: Konvergieren $(a_n^{(1)}), \ldots, (a_n^{(r)})$, so konvergieren Summe und Produkt der r Folgen gegen Summe und Produkt der Grenzwerte; insbesondere $a_n^k \to a^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, und für jedes Polynom p gilt $p(a_n) \to p(a)$.

Beispiel. Für $a_n = \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{5n^2 + n}$ teilt man Zähler und Nenner durch n^2:

$$a_n = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}} \to \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{3}{5},$$

nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.9 (1), (2), (4); der Grenzwert des Nenners ist $5 \neq 0$. Allgemein bestimmt bei einem Quotienten zweier Polynome in n der Vergleich der höchsten Potenzen den Grenzwert.

Bemerkung (was wo gebraucht wird). Die Beweise von Satz 4.3 und Satz 4.7 bis Satz 4.9 benutzen nur Betrag und Dreiecksungleichung, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ also nur die Körper- und Anordnungsregeln; dasselbe gilt für Satz 4.10, Satz 4.11, Satz 4.24 und Satz 4.30. Für reelle Folgen gelten diese Sätze daher wörtlich in jedem angeordneten Körper (vergleiche Lemma 2.15 und Lemma 2.16). Die archimedische Eigenschaft geht zuerst in Satz 4.4 ein und über ihn in alles, was $\frac{1}{n} \to 0$ oder $q^n \to 0$ benutzt. Die Supremumseigenschaft geht in Satz 4.16 ein und über ihn in Satz 4.17, Satz 4.18, Satz 4.20 und in die Definition des Limes superior, ebenso über Satz 2.39 in alle Aussagen über Wurzeln; die Cauchy-Vollständigkeit (Satz 2.33) geht in Satz 4.31 ein. Einheit 5 untersucht, welche dieser Eigenschaften in einem beliebigen angeordneten Körper aus welcher folgt.

4.3 Grenzwerte und Ungleichungen

Dieser Abschnitt betrifft reelle Folgen; er benutzt die Anordnung von $\mathbb{R}$. Nur Satz 4.32 am Ende gilt in $\mathbb{K}$.

Satz 4.10 (Erhaltung von Ungleichungen). Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle n. Dann ist $a \leq b$. Insbesondere folgt aus $a_n \leq C$ für fast alle n, dass $a \leq C$ ist, und aus $a_n \geq C$, dass $a \geq C$ ist.

Beweis. Angenommen, $a > b$. Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b) > 0$ gibt es N mit $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$ und $a_n \leq b_n$ für $n \geq N$. Dann ist für $n = N$

$$b_n < b + \varepsilon = \tfrac{1}{2}(a + b) = a - \varepsilon < a_n,$$

im Widerspruch zu $a_n \leq b_n$. Der Zusatz ist der Fall einer konstanten Folge. □

Strikte Ungleichungen bleiben nicht erhalten: $\frac{1}{n} > 0$ für alle n, aber $\lim \frac{1}{n} = 0$ (G1). Beim Grenzübergang wird aus $<$ im Allgemeinen nur $\leq$.

Satz 4.11 (Einschließung). Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Folgen mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n, und gelte $a_n \to L$ und $b_n \to L$. Dann gilt $c_n \to L$.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N, so dass für $n \geq N$ gilt: $L-\varepsilon < a_n, b_n < L+\varepsilon$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$. Für diese n ist $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$, also $|c_n - L| < \varepsilon$. □

Der Satz ist bemerkenswert, weil er die Konvergenz von (c_n) *beweist*; in Satz 4.10 wurde sie vorausgesetzt.

Drei Grenzwerte mit Wurzeln werden immer wieder gebraucht: gleich anschließend in Satz 4.32, später beim Wurzelkriterium für Reihen (Einheit 6) und bei Konvergenzradien (Einheit 14). In zweien von ihnen wächst der Wurzelexponent mit n.

Satz 4.12 (Wurzeln).

1. Ist (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $a_n \to a$, so gilt $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, insbesondere $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.
2. Für jedes $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$.
3. $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Beweisidee. (1) Man teilt die Differenz der k-ten Potenzen wie in Lemma 2.38 durch eine Summe, die nach unten beschränkt ist; für $a = 0$ argumentiert man direkt. (2) und (3) schreibt man die Wurzel als $1 + x_n$ und schätzt x_n mit der Bernoullischen Ungleichung beziehungsweise dem Binomialsatz ab.

Beweis. Nach Satz 4.10 ist $a \geq 0$, die Wurzel also erklärt.

(1) Sei $a > 0$, $u_n = \sqrt[k]{a_n}$ und $y = \sqrt[k]{a} > 0$. Wie im Beweis von Lemma 2.38 ist $a_n - a = u_n^k - y^k = (u_n - y)S_n$ mit $S_n = \sum_{j=0}^{k-1} u_n^{k-1-j} y^j$. Alle Summanden sind ≥ 0, der Summand mit $j = k - 1$ ist y^{k-1}; also ist $S_n \geq y^{k-1} > 0$ und

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = \frac{|a_n - a|}{S_n} \leq \frac{|a_n - a|}{y^{k-1}};$$

nach Satz 4.8 (1) folgt die Behauptung. Ist $a = 0$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es N mit $a_n < \varepsilon^k$ für $n \geq N$; dann ist $\sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$, denn aus $\sqrt[k]{a_n} \geq \varepsilon$ folgte nach Lemma 2.38 (1) $a_n \geq \varepsilon^k$.

(2) Sei zuerst $c \geq 1$ und $y_n = \sqrt[n]{c}$. Dann ist $y_n \geq 1$: Für $0 \leq y < 1$ ist $y^n < 1^n = 1$ nach Lemma 2.38 (1), also $y^n \neq c$. Setze $x_n = y_n - 1 \geq 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist $c = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$, also

$$0 \leq x_n \leq \frac{c-1}{n},$$

und nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.8 (1) ist (x_n) eine Nullfolge, also $y_n \to 1$. Ist $0 < c < 1$, so ist $\frac{1}{c} > 1$ und $\sqrt[n]{c} = 1/\sqrt[n]{1/c}$, denn beide Seiten sind positiv und haben die n-te Potenz c. Nach dem ersten Fall und Satz 4.9 (4) folgt $\sqrt[n]{c} \to 1$.

(3) Nach dem Beweis von (2), angewandt auf $c = n \geq 1$, ist $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Hier hilft Bernoulli nicht, weil $c = n$ mitwächst; man nimmt aus dem Binomialsatz den

quadratischen Summanden. Für $n \geq 2$ sind alle Summanden in $(1 + x_n)^n = \sum_k \binom{n}{k} x_n^k$ nichtnegativ, also

$$n = (1 + x_n)^n \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2, \qquad \text{also} \qquad 0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Die Folge $\left(\frac{2}{n-1}\right)_{n\geq 2}$ ist nach Satz 4.4 (1) eine Nullfolge, nach (1) auch ihre Wurzel, und Satz 4.8 (1) gibt $x_n \to 0$. □

Mit Teil (3) lässt sich das zweite Grundbeispiel aus Satz 4.4 verschärfen: Eine Potenz von n kommt gegen eine geometrische Nullfolge nicht an.

Satz 4.32. Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $n^k q^n \to 0$.

Beweis. Sei $r = \frac{1}{2}(1 + |q|)$, also $|q| < r < 1$. Nach Satz 4.12 (3) und Satz 4.9 (2) gilt $\left(\sqrt[n]{n}\right)^k |q| \to |q|$; zu $\varepsilon = r - |q| > 0$ ist also $\left(\sqrt[n]{n}\right)^k |q| < r$ für fast alle n. Für diese n ist nach Folgerung 3.23 und Lemma 2.38 (1)

$$|n^k q^n| = n^k |q|^n = \left(\left(\sqrt[n]{n}\right)^k |q|\right)^n \leq r^n,$$

denn $\left((\sqrt[n]{n})^k\right)^n = \left((\sqrt[n]{n})^n\right)^k = n^k$. Die Folge (r^n) ist nach Satz 4.4 (2) eine Nullfolge, und Satz 4.8 (1) gibt die Behauptung. □

Aufgabe B2 gibt einen zweiten Beweis mit dem Binomialsatz, der eine ausdrückliche Schranke liefert, Aufgabe V1 einen dritten Weg über Quotienten.

Zwischenbilanz. Bis hierher kann man Grenzwerte *ausrechnen*: Man führt eine Folge mit den Rechenregeln (Satz 4.9), der Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.10) und der Einschließung (Satz 4.11) auf wenige Grundfolgen zurück, nämlich

$$\frac{1}{n} \to 0, \qquad q^n \to 0 \text{ und } n^k q^n \to 0 \ (|q| < 1), \qquad \sqrt[n]{c} \to 1 \ (c > 0), \qquad \sqrt[n]{n} \to 1.$$

Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, dass der Grenzwert schon bekannt ist oder aus bekannten Grenzwerten zusammengesetzt wird. Die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ aus der Leitfrage lässt sich so nicht behandeln: Man kennt keinen Kandidaten. Dafür braucht man ein Kriterium, das aus Eigenschaften der Folge selbst auf die Existenz eines Grenzwerts schließt; Abschnitt 4.5 liefert es. Zuvor erhält die geordnete Divergenz von Folgen wie (n) einen Namen.

4.4 Bestimmte Divergenz

Die Folge $a_n = n$ divergiert, aber auf eine geordnete Weise: Sie übertrifft schließlich jede Schranke. Dafür gibt es einen eigenen Namen.

Definition 4.13. Eine reelle Folge (a_n) *divergiert bestimmt gegen* $+\infty$, geschrieben $a_n \to \infty$, wenn

$$\forall C \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ a_n > C.$$

Entsprechend $a_n \to -\infty$, wenn $-a_n \to \infty$.

Das Zeichen ∞ ist keine Zahl, und eine bestimmt divergente Folge ist divergent im Sinn von Definition 4.2 (Satz 4.7). Die Schreibweise $\lim a_n = \infty$ ist üblich, aber kein Grenzwert in $\mathbb{R}$; die Rechenregeln aus Satz 4.9 gelten für sie nicht ohne Weiteres (G3, G4).

Satz 4.14.

1. Ist $a_n > 0$ für fast alle n, so gilt $a_n \to \infty$ genau dann, wenn $\frac{1}{a_n} \to 0$.
2. Gilt $a_n \to \infty$ und ist (b_n) nach unten beschränkt, so gilt $a_n + b_n \to \infty$.
3. Gilt $a_n \to \infty$ und $b_n \geq c$ für fast alle n mit einer Konstanten $c > 0$, so gilt $a_n b_n \to \infty$.

Beweis. (1) „⇒“: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ und $a_n > 0$ für $n \geq N$, nach (O6) also $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon$. „⇐“: Zu $C > 0$ gibt es N mit $a_n > 0$ und $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{C}$ für $n \geq N$, nach (O6) also $a_n > C$. Für $C \leq 0$ ist ohnehin $a_n > 0 \geq C$ für fast alle n.

(2) Sei $b_n \geq c$ für alle n. Zu C gibt es N mit $a_n > C - c$ für $n \geq N$, also $a_n + b_n > C$.

(3) Zu $C > 0$ gibt es N mit $a_n > C/c$ und $b_n \geq c$ für $n \geq N$, also $a_n b_n > C$; für $C \leq 0$ genügt ein $C' > 0$. □

Beispiele. Nach (1), Satz 4.4 und Satz 4.9 (2) gilt $n^k \to \infty$ für $k \in \mathbb{N}$, denn $\frac{1}{n^k} = \left(\frac{1}{n}\right)^k \to 0$, und $q^n \to \infty$ für $q > 1$, denn $(1/q)^n \to 0$. Ebenso $\sqrt{n} \to \infty$, weil $\sqrt{n} > C$ für $n > C^2$ gilt ($C > 0$, Lemma 3.8).

Bemerkung (Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$). Definition 2.37 hat $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ nur angeordnet; Satz 4.14 begründet einige Rechenregeln. Gelte $a_n \to \infty$. Konvergiert (b_n) gegen eine reelle Zahl, so ist (b_n) nach Satz 4.7 nach unten beschränkt; gilt $b_n \to \infty$, so ist $b_n > 0$ für fast alle n und (b_n) ebenfalls nach unten beschränkt. In beiden Fällen gilt $a_n + b_n \to \infty$ nach Satz 4.14 (2). Ist $b_n \to b > 0$, so ist $b_n > \frac{b}{2}$ für fast alle n; ist $b_n \to \infty$, so ist $b_n > 1$ für fast alle n. In beiden Fällen gilt $a_n b_n \to \infty$ nach Satz 4.14 (3). Deshalb setzt man $x + \infty = \infty + x = \infty$ für $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$ für $x > 0$ und für $x = \infty$; die Regeln mit $-\infty$ erhält man daraus durch Übergang zu $(-a_n)$ oder $(-b_n)$, etwa $x + (-\infty) = -\infty$ für $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $x \cdot \infty = -\infty$ für $x < 0$. Die Ausdrücke $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty$ bleiben unerklärt; nach (G4) können bei Folgen dieser Gestalt

verschiedene Grenzwerte und bestimmte Divergenz herauskommen. Schließlich überträgt sich bestimmte Divergenz nach oben: Gilt $a_n \leq b_n$ für fast alle n und $a_n \to \infty$, so gilt $b_n \to \infty$, denn zu jedem C ist $b_n \geq a_n > C$ für fast alle n.

4.5 Monotone Folgen

Nun zur ersten Hälfte der Leitfrage: Wie beweist man Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwerts? Für monotone Folgen gibt es ein einfaches Kriterium, und es ist der erste Satz dieser Einheit, der die Vollständigkeit der reellen Zahlen benutzt.

Definition 4.15. Eine reelle Folge (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n, *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle n, und entsprechend *(streng) monoton fallend*. Sie heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Aus $a_n \leq a_{n+1}$ für alle n folgt durch Induktion $a_m \leq a_n$ für alle $m \leq n$.

Satz 4.16 (Monotonieprinzip). Sei (a_n) eine monoton wachsende reelle Folge.

1. Ist (a_n) nach oben beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so gilt $a_n \to \infty$.

Entsprechend konvergiert eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge gegen das Infimum ihrer Glieder, und eine monoton fallende, nach unten unbeschränkte Folge divergiert bestimmt gegen $-\infty$. Insbesondere ist eine monotone Folge genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweisidee. Der Kandidat für den Grenzwert ist das Supremum s. Dass es existiert, ist die Supremumseigenschaft. Dass die Folge ihm nahekommt, liegt daran, dass $s-\varepsilon$ keine obere Schranke mehr ist; dass sie ihm nahe bleibt, an der Monotonie.

Beweis. (1) Die Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht leer und nach oben beschränkt. Nach der Supremumseigenschaft (Satz 2.34) hat sie ein Supremum s. Sei $\varepsilon > 0$. Weil s die *kleinste* obere Schranke ist, ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von A; es gibt also ein N mit $a_N > s - \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt aus der Monotonie und weil s obere Schranke ist

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s,$$

also $|a_n - s| < \varepsilon$.

(2) Zu $C \in \mathbb{R}$ gibt es, weil C keine obere Schranke ist, ein N mit $a_N > C$, und für $n \geq N$ ist $a_n \geq a_N > C$.

Der Fall einer fallenden Folge folgt durch Anwendung auf $(-a_n)$, denn $\inf A = -\sup(-A)$ (Folgerung 2.35). Die letzte Aussage: Eine konvergente Folge ist nach

Satz 4.7 beschränkt, und eine beschränkte monotone Folge konvergiert nach (1) oder seinem Gegenstück. □

Der Beweis benutzt von $\mathbb{R}$ nur die Anordnung und die Supremumseigenschaft; er gilt deshalb wörtlich in jedem angeordneten Körper mit Supremumseigenschaft (Satz 5.8, Vorgriff).

Der Satz beantwortet die Leitfrage im Prinzip: Für eine wachsende Folge genügt es, *irgendeine* obere Schranke zu finden; den Grenzwert muss man nicht kennen. Die Vollständigkeit geht an genau einer Stelle ein, bei der Existenz von s. In $\mathbb{Q}$ ist der Satz falsch (G5), obwohl dort jeder andere Schritt des Beweises gültig bleibt.

Als erste Anwendung ein Verfahren, das schon im Altertum bekannt war und nach Heron von Alexandria benannt ist.

Satz 4.17 (Heron-Verfahren). Sei $a > 0$, $x_1 > 0$ beliebig und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann sind alle $x_n > 0$, die Folge $(x_n)_{n\geq 2}$ ist monoton fallend, und $x_n \to \sqrt{a}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}, \qquad \text{und für } n \geq 2 \text{ ist} \qquad 0 \leq x_n - \sqrt{a} \leq x_n - \frac{a}{x_n}.$$

Für $a = 2$ und $x_1 = 2$ ist das die Folge aus Satz 2.18, dort in $\mathbb{Q}$ untersucht.

Beweisidee. x_n und a/x_n haben das Produkt a; ist eine der Zahlen zu groß, ist die andere zu klein, und ihr Mittelwert liegt dazwischen. Die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel zeigt, dass das Mittel nie unter $\sqrt{a}$ fällt.

Beweis. Positivität: Induktion; mit $x_n > 0$ ist auch $a/x_n > 0$ und $x_{n+1} > 0$.

Für jedes n ist

$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)^2 - a = \frac{1}{4}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big)^2 \geq 0,$$

also $x_n^2 \geq a$ für alle $n \geq 2$. Damit ist für $n \geq 2$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0,$$

die Folge $(x_n)_{n\geq 2}$ also monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Nach Satz 4.16 konvergiert sie gegen ein L, nach Satz 4.10 mit $L \geq 0$. Aus $x_n^2 \geq a$ folgt mit Satz 4.9 (2) und Satz 4.10 $L^2 \geq a > 0$, also $L > 0$. Die Rekursion lautet $2x_n x_{n+1} = x_n^2 + a$;

die Folge (x_{n+1}) konvergiert ebenfalls gegen L (sie entsteht durch Weglassen des ersten Glieds), und Satz 4.9 gibt $2L^2 = L^2 + a$, also $L^2 = a$. Weil $L > 0$ ist, ist $L = \sqrt{a}$.

Die Fehlerformel ist eine Umformung: $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a - 2\sqrt{a}\,x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}$. Für $n \geq 2$ ist $x_n \geq \sqrt{a}$ (Lemma 3.8), also $\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$ und damit $x_n - \sqrt{a} \leq x_n - \frac{a}{x_n}$. □

Zwei Beobachtungen. Erstens beweist der Satz die Existenz von $\sqrt{a}$ ein zweites Mal (das erste Mal: Satz 2.39): Im Beweis wurde $\sqrt{a}$ nicht benutzt, bevor L gefunden war; man hätte $\sqrt{a}$ als L *definieren* können. Die Wurzel aus Einheit 2 und die Grenzwerte der Analysis hängen an derselben Eigenschaft von $\mathbb{R}$. Zweitens ist die Konvergenz sehr schnell: Nach der Fehlerformel quadriert sich der Fehler in jedem Schritt ungefähr, die Zahl der richtigen Stellen verdoppelt sich etwa. Abschnitt 4.10 rechnet das an $\sqrt{2}$ vor. Dass die Heron-Folge für $a = 2$, $x_1 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert hat, ist in Satz 2.18 bewiesen und wird in (G5) aufgegriffen; neu sind hier der beliebige Radikand, der beliebige Startwert und die Fehlerformel.

4.6 Die Zahl e

Jetzt kann die Leitfrage beantwortet werden. Man braucht eine kleine Verschärfung der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.24).

Lemma 4.33 (strikte Bernoullische Ungleichung). Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$, $x \neq 0$ und jedes $n \geq 2$ gilt $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Beweis. Nach Satz 1.24 ist $(1 + x)^{n-1} \geq 1 + (n - 1)x$, und Multiplikation mit $1 + x \geq 0$ ergibt nach (O2)

$$(1 + x)^n \geq \big(1 + (n - 1)x\big)(1 + x) = 1 + nx + (n - 1)x^2 > 1 + nx,$$

weil $(n - 1)x^2 > 0$ für $n \geq 2$ und $x \neq 0$ ist ((O3), (O5)). □

Dass (a_n) wächst, beantwortet die Leitfrage noch nicht: Auch die Folge (n) wächst. Nach Satz 4.16 fehlt eine obere Schranke. Man findet sie, indem man (a_n) eine zweite Folge gegenüberstellt, die von oben kommt: $b_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1} = a_n\big(1 + \frac{1}{n}\big)$ liegt über a_n, und es wird sich zeigen, dass (b_n) fällt. Dann liegt jedes a_n unter $b_1 = 4$, und der Grenzwert ist zwischen beiden Folgen eingeschlossen.

Satz 4.18. Sei $a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ und $b_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}$. Dann ist (a_n) streng monoton wachsend, (b_n) streng monoton fallend, und $a_n < b_n$ für alle n. Beide Folgen konvergieren gegen denselben Grenzwert e, und es gilt

$$a_n < e < b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisidee. Die Monotonie folgt in beiden Fällen aus der Bernoullischen Ungleichung, angewandt auf den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder. Dann liegt jedes a_n unter jedem b_m, und die Abstände $b_n - a_n$ schrumpfen. Die Folgen schließen ihren gemeinsamen Grenzwert ein, ohne ihn zu nennen.

Beweis. (a_n) *wächst.* Wegen $n(n+2) = (n+1)^2 - 1$ ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n} = \Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\frac{n+1}{n} = \Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$

Das ist die Umformung aus Aufgabe V4 (b) der Einheit 1; dort lieferte die Bernoullische Ungleichung „≥“. Lemma 4.33 mit $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ und dem Exponenten $n+1 \geq 2$ gibt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} = 1.$$

(b_n) *fällt.* Wegen $(n+1)^2 = n(n+2) + 1$ ist

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n+1}\Big(\frac{n+1}{n+2}\Big)^{n+2} = \Big(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\Big)^{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \Big(1 + \frac{1}{n(n+2)}\Big)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}.$$

Mit Lemma 4.33 ($x = \frac{1}{n(n+2)}$, Exponent $n+1 \geq 2$) und $\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1}$, was nach Multiplikation mit den positiven Nennern $(n+1)^2 > n(n+2)$ bedeutet:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > \Big(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\Big)\frac{n+1}{n+2} > \Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Einschließung. Es ist $b_n = a_n\big(1 + \frac{1}{n}\big) > a_n$. Mit den Monotonien folgt $2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4$ für alle n. Nach Satz 4.16 konvergiert (a_n) gegen ein e und (b_n) gegen ein e'. Wegen

$$0 < b_n - a_n = \frac{a_n}{n} < \frac{4}{n}$$

ist $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge, also $e' - e = \lim(b_n - a_n) = 0$. Schließlich ist $a_n < a_{n+1} \leq e$, weil e nach Satz 4.16 das Supremum der a_k ist, und ebenso $b_n > b_{n+1} \geq e$. □

Definition 4.19. Die Zahl $e = \lim_{n\to\infty}\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ heißt *Eulersche Zahl.*

Die Frage nach der Verzinsung in immer kürzeren Abschnitten wird üblicherweise mit Jakob Bernoulli verbunden; der Name der Zahl erinnert an Leonhard Euler.

Die Leitfrage ist damit beantwortet: Bei immer feinerer Verzinsung wächst das Guthaben nicht über alle Grenzen, sondern strebt gegen e, und jede Verzinsung mit n Abschnitten bleibt darunter. Die Einschließung $a_n < e < b_n$ ist allerdings langsam: Für $n = 6$ liefert sie nur $2{,}52 < e < 2{,}95$. Eine schnellere Darstellung ist die folgende.

Satz 4.20 (e als Summe). Für $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ gilt $s_n \to e$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!\,n}.$$

Beweisidee. Der Binomialsatz zerlegt a_n in eine Summe, deren k-ter Summand $\frac{1}{k!}$ ist, multipliziert mit Faktoren, die kleiner als 1 sind und für $n \to \infty$ gegen 1 gehen. Daraus folgt $a_n \leq s_n$ sowie, für jedes feste m, dass e mindestens s_m ist.

Beweis. Schritt 1: $a_n \leq s_n$. Nach dem Binomialsatz ist

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{j}{n}\Big),$$

und jedes Produkt liegt zwischen 0 und 1.

Schritt 2: (s_n) konvergiert. Die Folge wächst. Für $k \geq 1$ ist $k! \geq 2^{k-1}$ (Induktion: $(k+1)! = (k+1)k! \geq 2 \cdot 2^{k-1}$), also mit der geometrischen Summe (Satz 1.13)

$$s_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Nach Satz 4.16 konvergiert (s_n) gegen ein $s \leq 3$, und aus Schritt 1 folgt mit Satz 4.10 $e \leq s$.

Schritt 3: $e \geq s$. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Für $n \geq m$ lässt man in Schritt 1 die Summanden mit $k > m$ weg, die nichtnegativ sind:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{j}{n}\Big).$$

Rechts steht eine Summe aus $m+1$ Folgen in n, jede ein Produkt aus höchstens m Faktoren, die für $n \to \infty$ gegen 1 gehen. Nach Satz 4.9 konvergiert die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen s_m, und Satz 4.10 gibt $e \geq s_m$. Weil das für jedes m gilt, folgt mit Satz 4.10 $e \geq s$. Also $e = s$.

Schritt 4: Fehlerabschätzung. Seien $m > n$. Für $k \geq n+1$ ist $k! = (n+1)!\,(n+2)(n+3)\cdots k \geq (n+1)!\,(n+2)^{k-n-1}$. Mit der geometrischen Summe für $q = \frac{1}{n+2}$ folgt

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{m-n-1} \frac{1}{(n+2)^j} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)}.$$

Für $m \to \infty$ gibt Satz 4.10 $e - s_n \le \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} = \frac{n+2}{n!\,(n+1)^2}$, und wegen $n(n+2) \le (n+1)^2$ ist das höchstens $\frac{1}{n!\,n}$. Positiv ist $e - s_n$, weil $e \ge s_{n+1} > s_n$. □

Mit $n = 6$: $s_6 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720}$, und $\frac{1}{6!\cdot 6} = \frac{1}{4320}$. Also

$$2{,}71805 < \frac{1957}{720} < e \le \frac{1957}{720} + \frac{1}{4320} < 2{,}71829.$$

Die Fehlerabschätzung hat eine zweite Folge, die über das Rechnen hinausgeht.

Satz 4.21. e ist irrational.

Beweisidee. Wäre $e = \frac{p}{q}$, so wäre $n!\,e$ für großes n eine ganze Zahl, ebenso $n!\,s_n$. Ihre Differenz läge nach Satz 4.20 echt zwischen 0 und 1.

Beweis. Angenommen, $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Sei $n = \max\{q, 2\}$. Dann ist $n!\,e = p \cdot \frac{n!}{q}$ eine ganze Zahl, weil $q \le n$ ein Faktor von $n!$ ist, und $n!\,s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ ist eine Summe ganzer Zahlen. Also ist $n!\,(e - s_n)$ ganz. Nach Satz 4.20 ist

$$0 < n!\,(e - s_n) \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{2},$$

und zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt keine ganze Zahl. □

Satz 4.21 zeigt noch einmal, was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet: Die Partialsummen s_n sind rationale Zahlen, die Folge (s_n) ist eine Cauchy-Folge (sie konvergiert in $\mathbb{R}$, Satz 4.30 (1)), und ihr Grenzwert e ist keine rationale Zahl. Wie die Heron-Folge in (G5) ist sie eine rationale Cauchy-Folge ohne Grenzwert in $\mathbb{Q}$.

4.7 Teilfolgen, Häufungswerte, Limes superior und Limes inferior

Eine divergente beschränkte Folge wie $\big((-1)^n\big)$ hat keinen Grenzwert, aber sie hält sich in der Nähe zweier Werte auf. Die Begriffe dieses Abschnitts erfassen das.

Definition 4.22. Sei (a_n) eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n).

Durch Induktion ist $n_k \ge k$: $n_1 \ge 1$, und aus $n_k \ge k$ folgt $n_{k+1} > n_k \ge k$, also $n_{k+1} \ge k + 1$.

Definition 4.23. Eine Zahl $h \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungswert* der Folge (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n - h| < \varepsilon$ für unendlich viele n gilt.

„Unendlich viele n“ ist dabei im Sinn von Abschnitt 4.1 gemeint. Gleichwertig: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegt a_n für unendlich viele n in $B_\varepsilon(h)$. Man beachte den Unterschied zum

Grenzwert: Dort liegen *fast alle* Glieder in jeder solchen Kreisscheibe, hier nur *unendlich viele*. Die Folge $\big((-1)^n\big)$ hat die Häufungswerte 1 und -1; die Folge (i^n) hat die vier Häufungswerte $1, i, -1, -i$.

Satz 4.24. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$.

1. Konvergiert (a_n) gegen a, so konvergiert jede Teilfolge gegen a.
2. Ist h Grenzwert einer Teilfolge, so ist h ein Häufungswert von (a_n).
3. Konvergiert (a_n) gegen a, so ist a der einzige Häufungswert.

Beweis. (1) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Für $k \geq N$ ist $n_k \geq k \geq N$, also $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

(2) Gelte $a_{n_k} \to h$, und sei $\varepsilon > 0$. Es gibt K mit $|a_{n_k} - h| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Zu gegebenem N ist für $k = \max\{K, N\}$ dann $n_k \geq k \geq N$ und $|a_{n_k} - h| < \varepsilon$; die Ungleichung gilt also für unendlich viele Indizes im Sinn von Abschnitt 4.1.

(3) Nach (2) mit der Teilfolge (a_n) selbst ist a ein Häufungswert. Sei $h \neq a$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}|h - a|$. Für fast alle n ist $|a_n - a| < \varepsilon$, und für diese ist $|a_n - h| \geq |h - a| - |a_n - a| > \varepsilon$. Also gilt $|a_n - h| < \varepsilon$ nur für endlich viele n, und h ist kein Häufungswert. □

Aus (1) folgt ein bequemes Divergenzkriterium: Hat eine Folge zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten, so divergiert sie. Auch die Umkehrung von (2) gilt.

Satz 4.34 (Häufungswerte und Teilfolgen). Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $h \in \mathbb{K}$. Genau dann ist h ein Häufungswert von (a_n), wenn eine Teilfolge von (a_n) gegen h konvergiert.

Beweis. „⇐“ ist Satz 4.24 (2). Sei umgekehrt h ein Häufungswert. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $M_j = \{n \in \mathbb{N} : |a_n - h| < \frac{1}{j}\}$. Nach Definition 4.23 gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geq m + 1$ in M_j; die Menge $\{n \in M_j : n > m\}$ ist also nicht leer und hat nach Satz 1.16 ein kleinstes Element $\psi_j(m)$. Insbesondere ist M_1 nicht leer. Der Rekursionssatz (Abschnitt 1.6) liefert eine Folge mit $n_1 = \min M_1$ und $n_{k+1} = \psi_{k+1}(n_k)$. Dann ist $n_1 < n_2 < \ldots$ und $n_k \in M_k$, also $|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k}$ für alle k. Nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.8 (1) ist $(a_{n_k} - h)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. □

Die Häufungswerte einer Folge sind also genau die Grenzwerte ihrer konvergenten Teilfolgen. Die Teilfolge ist durch die Wahl des jeweils kleinsten Index eindeutig festgelegt; der Beweis kommt ohne Auswahl aus (vergleiche die Bemerkung nach Satz 2.33).

Für reelle Folgen gibt es unter den Häufungswerten einen größten und einen kleinsten, und man kann sie ohne Kenntnis der Häufungswerte über Suprema erklären. Ist (a_n) nach oben beschränkt, so auch jede Menge $\{a_k : k \geq n\}$, und

$$\sigma_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

existiert für jedes n. Die Folge (σ_n) ist monoton fallend, weil das Supremum über eine kleinere Menge gebildet wird (Lemma 2.36 (2)). Ist (a_n) auch nach unten beschränkt, etwa $a_k \geq c$ für alle k, so ist $\sigma_n \geq a_n \geq c$, und (σ_n) konvergiert nach Satz 4.16 gegen $\inf_n \sigma_n$. Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so ist es auch keine der Mengen $\{a_k : k \geq n\}$, denn sonst wäre das Maximum einer oberen Schranke dieser Menge und der Zahlen $a_1, \dots, a_{n-1}$ eine obere Schranke der ganzen Folge. Anschaulich ist σ_n die höchste Stelle, an die die Folge ab dem Index n noch heranreicht. Mit wachsendem n werden weniger Glieder berücksichtigt, die Dächer σ_n sinken, und ihr Grenzwert ist die Höhe, auf der sich die Folge schließlich noch aufhält. Ein ausgerechnetes Beispiel steht in Abschnitt 4.10, Beispiel 4.

Definition 4.25. Sei (a_n) eine reelle Folge. Ihr *Limes superior* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ist das folgende Element von $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 2.37):

- Ist (a_n) nach oben beschränkt und (σ_n) nach unten beschränkt, so ist $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \inf_n \sup_{k\geq n} a_k$; der Grenzwert existiert nach Satz 4.16, weil (σ_n) monoton fällt.
- Ist (a_n) nach oben beschränkt und (σ_n) nicht nach unten beschränkt, so ist $\limsup a_n = -\infty$.
- Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so ist $\limsup a_n = \infty$.

Der *Limes inferior* ist $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$, mit $-(\infty) = -\infty$ und $-(-\infty) = \infty$.

Die drei Fälle schließen einander aus und erfassen jede reelle Folge. Für eine beschränkte Folge sind beide Werte reell. Mit $\tau_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$ ist dann nach Folgerung 2.35 $\sup_{k\geq n}(-a_k) = -\tau_n$, also $\liminf a_n = -\lim(-\tau_n) = \lim \tau_n = \sup_n \inf_{k\geq n} a_k$. Wegen der Definition des Limes inferior hat jede Aussage über den Limes superior ein Gegenstück für den Limes inferior, und wir formulieren nur die eine Hälfte. In Satz 4.26 bis Satz 4.28 ist (a_n) beschränkt; was für beliebige reelle Folgen gilt, sagt Satz 4.35.

Der Limes superior ist nicht das Supremum der Folge. Für $a_n = \frac{1}{n}$ ist $\sup a_n = 1$, aber $\sigma_n = \frac{1}{n}$ und $\limsup a_n = 0$ (G7). Das Supremum wird von einem einzelnen Glied bestimmt, der Limes superior nur vom Verhalten „weit draußen“; er ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder abändert.

Satz 4.26 (Kennzeichnung des Limes superior). Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge und $L \in \mathbb{R}$. Genau dann ist $L = \limsup a_n$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) $a_n < L + \varepsilon$ für fast alle n, und

(ii) $a_n > L - \varepsilon$ für unendlich viele n.

Beweisidee. (i) sagt, dass schließlich nichts mehr wesentlich über L hinausragt, (ii), dass immer wieder etwas bis knapp unter L heranreicht. Beides liest man an den Suprema

σ_n ab.

Beweis. Sei $L = \limsup a_n = \inf_n \sigma_n$ und $\varepsilon > 0$.

(i) Weil L die größte untere Schranke der σ_n ist, gibt es N mit $\sigma_N < L + \varepsilon$. Für $n \geq N$ ist $a_n \leq \sigma_n \leq \sigma_N < L + \varepsilon$.

(ii) Sei N beliebig. Dann ist $\sigma_N \geq L > L - \varepsilon$, also ist $L - \varepsilon$ keine obere Schranke von $\{a_k : k \geq N\}$, und es gibt $k \geq N$ mit $a_k > L - \varepsilon$. Weil N beliebig war, gilt das für unendlich viele k.

Umgekehrt erfülle L' die Bedingungen (i) und (ii) für jedes $\varepsilon > 0$; sei $L = \limsup a_n$. Nach (i) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N mit $a_n < L' + \varepsilon$ für $n \geq N$; also ist $L' + \varepsilon$ eine obere Schranke von $\{a_k : k \geq N\}$, und $L \leq \sigma_N \leq L' + \varepsilon$. Nach (ii) gibt es zu jedem n ein $k \geq n$ mit $a_k > L' - \varepsilon$, also $\sigma_n > L' - \varepsilon$ für alle n, und mit Satz 4.10 $L \geq L' - \varepsilon$. Somit $|L - L'| \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, also $L = L'$ (wie in Aufgabe B6 (d) der Einheit 1). □

Folgerung 4.27. Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Dann sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ Häufungswerte von (a_n), und für jeden Häufungswert h gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq h \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Der Limes superior ist also der größte, der Limes inferior der kleinste Häufungswert. Insbesondere hat jede beschränkte reelle Folge einen Häufungswert.

Beweis. Sei $L = \limsup a_n$ und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.26 (ii) gilt $a_n > L - \varepsilon$ für unendlich viele n, nach (i) gilt $a_n \geq L + \varepsilon$ nur für endlich viele. Also gilt $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ für unendlich viele n; L ist ein Häufungswert. Sei h ein Häufungswert und angenommen $h > L$. Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}(h - L)$ gilt $|a_n - h| < \varepsilon$, also $a_n > h - \varepsilon = L + \varepsilon$, für unendlich viele n, im Widerspruch zu (i). Für den Limes inferior folgt alles durch Übergang zu $(-a_n)$. □

Satz 4.28. Eine beschränkte reelle Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn $\liminf a_n = \limsup a_n$. In diesem Fall ist $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Beweis. Konvergiert (a_n) gegen a, so ist a nach Satz 4.24 (3) der einzige Häufungswert; nach Folgerung 4.27 sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ Häufungswerte, also beide gleich a. Sei umgekehrt $L = \limsup a_n = \liminf a_n$ und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 4.26 (i) ist $a_n < L + \varepsilon$ für fast alle n, nach dem Gegenstück für den Limes inferior $a_n > L - \varepsilon$ für fast alle n. Also ist $|a_n - L| < \varepsilon$ für fast alle n. □

Ohne Beschränktheit bleibt von Satz 4.26 die folgende Fassung, in der Form, in der das Wurzelkriterium (Einheit 6) und die Formel für den Konvergenzradius (Einheit 14) den Limes superior gebrauchen. Vergleiche mit $\pm\infty$ sind dabei im Sinn der Anordnung von $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 2.37) gemeint.

Satz 4.35 (Limes superior in $\overline{\mathbb{R}}$). Sei (a_n) eine reelle Folge und $L = \limsup a_n$.

1. Genau dann ist $L = \infty$, wenn (a_n) nicht nach oben beschränkt ist.
2. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L < \lambda$, so gilt $a_n < \lambda$ für fast alle n.
3. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L > \lambda$, so gilt $a_n > \lambda$ für unendlich viele n.
4. Genau dann ist $L = -\infty$, wenn $a_n \to -\infty$.
5. (Kennzeichnung) Ist $M \in \overline{\mathbb{R}}$ und gelten (2) und (3) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ mit M an Stelle von L, so ist $M = L$.

Entsprechend für den Limes inferior: Genau dann ist $\liminf a_n = -\infty$, wenn (a_n) nicht nach unten beschränkt ist; aus $\liminf a_n > \lambda$ folgt $a_n > \lambda$ für fast alle n, aus $\liminf a_n < \lambda$ folgt $a_n < \lambda$ für unendlich viele n; genau dann ist $\liminf a_n = \infty$, wenn $a_n \to \infty$; und der Limes inferior ist durch die beiden mittleren Eigenschaften bestimmt.

Beweis. (1) Nach Definition 4.25 ist $L = \infty$ genau im dritten Fall; in den beiden anderen ist L reell oder $-\infty$.

(2) Wegen $L < \lambda < \infty$ ist (a_n) nach oben beschränkt, alle σ_n sind also reell. Es gibt ein N mit $\sigma_N < \lambda$: Ist (σ_n) nicht nach unten beschränkt, so ist λ keine untere Schranke der σ_n; andernfalls ist $\lambda > L = \inf_n \sigma_n$, und λ ist keine untere Schranke, weil $\inf_n \sigma_n$ die größte ist. Für $n \geq N$ folgt $a_n \leq \sigma_n \leq \sigma_N < \lambda$.

(3) Sei $N \in \mathbb{N}$; gesucht ist ein $k \geq N$ mit $a_k > \lambda$. Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so ist es $\{a_k : k \geq N\}$ nach dem Absatz vor Definition 4.25 auch nicht, und ein solches k existiert. Andernfalls ist L wegen $L > \lambda > -\infty$ reell und gleich $\inf_n \sigma_n$; dann ist $\sigma_N \geq L > \lambda$, also ist λ keine obere Schranke von $\{a_k : k \geq N\}$, und es gibt $k \geq N$ mit $a_k > \lambda$.

(4) Ist $L = -\infty$ und $C \in \mathbb{R}$, so gilt nach (2) mit $\lambda = -C$ für fast alle n, dass $a_n < -C$, also $-a_n > C$; das ist $a_n \to -\infty$. Gelte umgekehrt $a_n \to -\infty$. Es gibt N_0 mit $a_n < 0$ für $n \geq N_0$, also ist $a_n \leq \max\{a_1, \dots, a_{N_0-1}, 0\}$ für alle n, und (a_n) ist nach oben beschränkt. Zu $C \in \mathbb{R}$ gibt es N mit $a_n < C - 1$ für $n \geq N$, also $\sigma_N \leq C - 1 < C$. Somit ist (σ_n) nicht nach unten beschränkt, und $L = -\infty$.

(5) Angenommen, $M \neq L$, etwa $M < L$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $M < \lambda < L$: Sind beide reell, nimmt man $\lambda = \frac{1}{2}(M + L)$; ist nur $M = -\infty$, so $\lambda = L - 1$; ist nur $L = \infty$, so $\lambda = M + 1$; sonst $\lambda = 0$. Nach der Eigenschaft (2) für M gilt $a_n < \lambda$ für fast alle n, nach (3) für L gilt $a_n > \lambda$ für unendlich viele n. Das ist ein Widerspruch: Es gibt ein N mit $a_n < \lambda$ für alle $n \geq N$, und zugleich ein $n \geq N$ mit $a_n > \lambda$. Ist $L < M$, so schließt man ebenso mit (2) für L und (3) für M.

Die Aussagen über den Limes inferior folgen durch Übergang zu $(-a_n)$, denn $x \mapsto -x$ kehrt die Anordnung von $\overline{\mathbb{R}}$ um. □

Für eine beschränkte Folge mit $L = \limsup a_n$ sind (2) mit $\lambda = L+\varepsilon$ und (3) mit $\lambda = L-\varepsilon$ die Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 4.26. Ist $a_n \geq c$ für alle n mit einem $c \in \mathbb{R}$, so ist $\limsup a_n \geq c$: Ist (a_n) nach oben beschränkt, so ist $\sigma_n \geq a_n \geq c$, die Folge (σ_n) also nach unten beschränkt, und Satz 4.10 gibt $\lim \sigma_n \geq c$; andernfalls ist $\limsup a_n = \infty$. Insbesondere liegt der Limes superior einer Folge nichtnegativer Zahlen in $[0, \infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \geq 0\}$, und er ist nach (1) genau dann ∞, wenn die Folge unbeschränkt ist. Folgerung 4.27 braucht die Beschränktheit: Für die Folge (b_n) aus Aufgabe R3 (b) ist $\limsup b_n = \infty$, und der einzige Häufungswert ist 0.

4.8 Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Das Monotonieprinzip beweist Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwerts, aber nur für monotone Folgen. Ein Kriterium für beliebige Folgen darf nur von den Gliedern selbst sprechen: Sie sollen untereinander beliebig nahe kommen.

Definition 4.29. Eine Folge (a_n) in $\mathbb{K}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N : \ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist das Definition 2.14 mit $K = \mathbb{R}$; für rationale Folgen ist es nach der Bemerkung nach Satz 2.29 gleichgültig, ob man rationale oder reelle Toleranzen nimmt.

Satz 4.30. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$.

1. Ist (a_n) konvergent, so ist sie eine Cauchy-Folge.
2. Ist (a_n) eine Cauchy-Folge, so ist sie beschränkt.
3. Ist (a_n) eine Cauchy-Folge mit einem Häufungswert h, so konvergiert sie gegen h.

Beweis. (1) Gelte $a_n \to a$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$, und für $m, n \geq N$ ist $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon$.

(2) Zu $\varepsilon = 1$ gibt es N mit $|a_n - a_N| < 1$ für $n \geq N$, also $|a_n| < |a_N| + 1$. Mit $C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ ist $|a_n| \leq C$ für alle n.

(3) Sei $\varepsilon > 0$ und N so, dass $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Weil h Häufungswert ist, gibt es ein $m \geq N$ mit $|a_m - h| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für jedes $n \geq N$ ist dann $|a_n - h| \leq |a_n - a_m| + |a_m - h| < \varepsilon$. □

Satz 4.31 (Cauchy-Kriterium). Eine Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. „⇒“ ist Satz 4.30 (1).

„⇐“ für $\mathbb{R}$: Das ist Satz 2.33. Ein zweiter Beweis aus der Supremumseigenschaft: Eine reelle Cauchy-Folge ist nach Satz 4.30 (2) beschränkt, hat also nach Folgerung 4.27 den Häufungswert $\limsup a_n$ und konvergiert nach Satz 4.30 (3) gegen ihn.

„⇐“ für $\mathbb{C}$: Sei (z_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Nach Satz 3.9 (3) ist $|\operatorname{Re} z_m - \operatorname{Re} z_n| \leq |z_m - z_n|$, also ist $(\operatorname{Re} z_n)$ eine reelle Cauchy-Folge, ebenso $(\operatorname{Im} z_n)$. Beide konvergieren nach dem reellen Fall, und nach Satz 4.5 konvergiert (z_n). □

Damit ist auch $\mathbb{C}$ vollständig, ohne dass man dafür etwas Neues über $\mathbb{C}$ braucht: Die Vollständigkeit überträgt sich komponentenweise. Für die Anordnung galt das nicht (Satz 3.16).

Der zweite Beweis benutzt von $\mathbb{R}$ nur die Anordnung und die Supremumseigenschaft, über Satz 4.16 und Definition 4.25. Er zeigt deshalb: In jedem angeordneten Körper mit Supremumseigenschaft konvergiert jede Cauchy-Folge. In Einheit 2 ging der Weg in die andere Richtung, von Satz 2.33 zu Satz 2.34, und dort wurde zusätzlich die archimedische Eigenschaft gebraucht. Einheit 5 stellt die Fassungen der Vollständigkeit nebeneinander (Satz 5.14) und zeigt, dass die archimedische Eigenschaft auf diesem Rückweg nicht entbehrlich ist.

Beispiel (Glieder, die schnell zusammenrücken). Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$, und es gebe Konstanten $C \geq 0$ und $0 \leq q < 1$ mit $|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n$ für alle n. Dann konvergiert (a_n). Denn für $m > n$ ist nach der Dreiecksungleichung für endliche Summen (Folgerung 3.24) und der geometrischen Summe (Satz 1.13)

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq C \sum_{k=n}^{m-1} q^k = Cq^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \leq \frac{C}{1 - q} q^n.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 4.4 (2) und Satz 4.9 (1) ein N mit $\frac{C}{1-q} q^N < \varepsilon$. Für $m > n \geq N$ ist $q^n = q^N q^{n-N} \leq q^N$, also $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Die Folge ist eine Cauchy-Folge und nach Satz 4.31 konvergent, ohne dass man den Grenzwert kennt. Anders als in (G6) ist hier der Abstand zu *allen* späteren Gliedern beherrscht; den Unterschied macht die geometrische Schranke. Aufgabe V3 ist ein Fall davon, und Lemma 5.22 in Einheit 5 behandelt die verwandte Bedingung $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q\,|a_{n+1} - a_n|$.

Bilanz. Damit hat die erste Frage der Leitfrage zwei Antworten: Für monotone reelle Folgen genügt eine Schranke (Satz 4.16), für beliebige Folgen in $\mathbb{K}$ die Cauchy-Bedingung (Satz 4.31). Beide beruhen auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

4.9 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt

(G1) Strikte Ungleichungen gehen verloren. $\frac{1}{n} > 0$ für alle n, aber $\lim \frac{1}{n} = 0$. Satz 4.10 lässt sich nicht zu „aus $a_n < b_n$ folgt $a < b$“ verschärfen.

(G2) Beschränkt, aber nicht konvergent; monoton, aber nicht konvergent. $\left((-1)^n\right)$ ist beschränkt und divergent; sie hat die beiden Häufungswerte ± 1, und $\limsup = 1 \neq -1 = \liminf$. Die Folge (n) ist monoton und divergent; sie ist unbeschränkt. Das Monotonieprinzip braucht beide Voraussetzungen.

(G3) Quotienten von Nullfolgen. Für $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$ ist $\frac{a_n}{b_n} = n \to \infty$; für $b_n = \frac{1}{n}$ ist der Quotient konstant 1; für $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist er $(-1)^n$, also divergent und nicht bestimmt divergent. Ein Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$“ legt nichts fest. Satz 4.9 (4) verlangt deshalb $\lim b_n \neq 0$.

(G4) Nullfolge mal unbeschränkte Folge. $\frac{1}{n} \cdot n = 1$ ist keine Nullfolge, $\frac{1}{n} \cdot n^2 = n$ divergiert, $\frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}$ ist eine. In Satz 4.8 (2) ist die Beschränktheit des zweiten Faktors unentbehrlich. „$0 \cdot \infty$“ legt nichts fest, ebenso wenig „$\infty - \infty$“: $(n + c) - n \to c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$, $n^2 - n \to \infty$.

(G5) Das Monotonieprinzip in $\mathbb{Q}$. Das Heron-Verfahren mit $a = 2$ und $x_1 = 2$ ist die Folge aus Satz 2.18. Sie besteht aus rationalen Zahlen, ist ab $n = 2$ monoton fallend, durch 0 nach unten beschränkt und nach Satz 2.18 eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Einen rationalen Grenzwert hat sie nicht: Er wäre nach der Bemerkung nach Satz 2.29 auch ihr Grenzwert in $\mathbb{R}$, nach Satz 4.17 und Satz 4.3 also gleich $\sqrt{2}$, und $\sqrt{2}$ ist irrational (Satz 2.39). In $\mathbb{Q}$ scheitert der Beweis von Satz 4.16 an genau einer Stelle: Die Menge $A = \{x_n : n \geq 2\}$ hat in $\mathbb{Q}$ kein Infimum. Denn in $\mathbb{R}$ ist $\sqrt{2}$ ihr Infimum (Satz 4.16 für fallende Folgen). Wäre $r \in \mathbb{Q}$ eine größte rationale untere Schranke von A, so wäre $r \leq \sqrt{2}$, wegen der Irrationalität sogar $r < \sqrt{2}$; nach Satz 2.31 gäbe es ein rationales r' mit $r < r' < \sqrt{2}$, und r' wäre eine größere rationale untere Schranke. Nach Satz 5.14 (Vorgriff) gilt das Monotonieprinzip in einem angeordneten Körper genau dann, wenn er die Supremumseigenschaft hat, und in einem archimedisch angeordneten Körper ist das Cauchy-Kriterium damit gleichwertig; in $\mathbb{Q}$ gilt keines von beiden.

(G6) Kleine Schritte machen noch keine Cauchy-Folge. Für $a_n = \sqrt{n}$ werden die Schritte von einem Glied zum nächsten beliebig klein:

$$0 < a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

und die rechte Seite ist eine Nullfolge, denn $\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$ nach Satz 4.12 (1). Trotzdem gilt $a_n \to \infty$; die Folge ist unbeschränkt und nach Satz 4.30 (2) keine Cauchy-Folge. Man sieht es auch direkt: $a_{4n} - a_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}$, weit auseinanderliegende

Glieder entfernen sich also beliebig weit voneinander. Die Cauchy-Bedingung verlangt kleine Abstände zwischen *beliebigen* späten Gliedern; die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ für fast alle n hält dagegen den Indexabstand fest. Wieder entscheidet die Reihenfolge der Quantoren.

(G7) Limes superior und Supremum. Für $a_n = \frac{1}{n}$ ist $\sup a_n = 1$, $\limsup a_n = 0$. Für $a_n = -\frac{1}{n}$ ist $\limsup a_n = 0 = \sup a_n$, aber das Supremum wird von keinem Glied angenommen. Der Limes superior ist im Allgemeinen weder ein Glied noch das Supremum.

(G8) Der Limes superior ist nicht additiv. Für $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -(-1)^n$ ist $\limsup a_n = \limsup b_n = 1$, aber $a_n + b_n = 0$, also $\limsup(a_n + b_n) = 0 < 2$. Es gilt nur $\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$ (Aufgabe B3).

(G9) Kein Limes superior in $\mathbb{C}$. Die Folge (i^n) ist beschränkt, hat die vier Häufungswerte $1, i, -1, -i$, und keiner ist „der größte“: Nach Satz 3.16 gibt es auf $\mathbb{C}$ keine Anordnung, die das festlegen könnte. Satz 4.28 hat in $\mathbb{C}$ kein Gegenstück mit einem komplexen Limes superior. Nach Satz 4.5 und Satz 4.28 gilt aber: Eine beschränkte Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn $\liminf \operatorname{Re} z_n = \limsup \operatorname{Re} z_n$ und $\liminf \operatorname{Im} z_n = \limsup \operatorname{Im} z_n$; Real- und Imaginärteil sind nach Satz 3.9 (3) beschränkt. Die Zahl $\limsup \operatorname{Re} z_n + i \limsup \operatorname{Im} z_n$ ist dagegen im Allgemeinen kein Häufungswert: Für $z_n = 1$ bei ungeradem und $z_n = i$ bei geradem n ist sie $1 + i$, aber $|z_n - (1+i)| = 1$ für alle n; die Häufungswerte sind 1 und i.

4.10 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (ein N zu gegebenem ε). Für $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{n^2 + 1}$ ist $\lim a_n = 2$ nach den Rechenregeln. Will man zu gegebenem ε ein N ausdrücklich angeben, rechnet man

$$|a_n - 2| = \Big|\frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 2}{n^2 + 1}\Big| = \frac{3n - 2}{n^2 + 1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} \qquad (n \ge 1).$$

Also leistet jedes $N > \frac{3}{\varepsilon}$ das Verlangte; für $\varepsilon = 10^{-3}$ etwa $N = 3001$. Das kleinste mögliche N zu suchen lohnt nicht. Die Definition verlangt irgendeines, und eine grobe Abschätzung, die man sicher beweisen kann, ist besser als eine scharfe, die man nicht beweisen kann.

Beispiel 2 (Heron für $\sqrt{2}$). Mit $a = 2$, $x_1 = 2$:

$$x_2 = \frac{3}{2}, \qquad x_3 = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\Big) = \frac{17}{12}, \qquad x_4 = \frac{1}{2}\Big(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\Big) = \frac{577}{408}.$$

Nach Satz 4.17 ist

$$0 \le x_4 - \sqrt{2} \le x_4 - \frac{2}{x_4} = \frac{577}{408} - \frac{816}{577} = \frac{577^2 - 816 \cdot 408}{408 \cdot 577} = \frac{332929 - 332928}{235416} = \frac{1}{235416},$$

also stimmt $x_4 \approx 1{,}4142157$ mit $\sqrt{2}$ auf mindestens fünf Nachkommastellen überein. Nach der Fehlerformel ist der Fehler von x_5 höchstens $\frac{(1/235416)^2}{2\sqrt{2}} < 10^{-11}$.

Beispiel 3 (Potenzen einer komplexen Zahl). Für $z \in \mathbb{C}$ verhält sich (z^n) wie folgt:

- $|z| < 1$: $z^n \to 0$ nach Satz 4.4 (2).
- $z = 1$: konstante Folge, Grenzwert 1.
- $|z| > 1$: Mit $|z| = 1+x$, $x > 0$, ist nach Folgerung 3.23 $|z^n| = |z|^n = (1+x)^n \geq 1+nx$; die Folge ist unbeschränkt und divergiert nach Satz 4.7.
- $|z| = 1$, $z \neq 1$: Angenommen, $z^n \to a$. Nach Satz 4.9 (3) ist $|a| = \lim |z^n| = 1$. Die Folge (z^{n+1}) konvergiert ebenfalls gegen a (Weglassen des ersten Glieds), und nach Satz 4.9 (1) gegen za. Nach Satz 4.3 ist $za = a$, also $(z-1)a = 0$, und wegen $z \neq 1$ ist $a = 0$ – im Widerspruch zu $|a| = 1$. Die Folge divergiert.

Insbesondere divergieren $\big((-1)^n\big)$ und (i^n). Der letzte Fall ist bemerkenswert, weil die Folge beschränkt ist und trotzdem divergiert, ohne dass man ihre Häufungswerte kennen muss.

Beispiel 4 (Limes superior ausrechnen). Sei $a_n = \big(2+(-1)^n\big)\dfrac{n}{n+1}$, also $a_n = \frac{3n}{n+1} = 3 - \frac{3}{n+1}$ für gerades und $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für ungerades n: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{12}{5}$, … Die geraden Glieder wachsen und bleiben unter 3, die ungeraden wachsen und bleiben unter 1, und für gerades $n \geq 2$ ist $a_n \geq 2$, weil $3n \geq 2n+2$ ist. Für jedes n ist also 3 eine obere Schranke von $\{a_k : k \geq n\}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 2.29 ein gerades $k \geq n$ mit $k+1 > \frac{3}{\varepsilon}$, und für dieses ist $a_k = 3 - \frac{3}{k+1} > 3 - \varepsilon$. Damit ist

$$\sigma_n = 3 \qquad \text{für alle } n,$$

und $\limsup a_n = 3 = \sup a_n$; das Supremum wird von keinem Glied angenommen. Das kleinste Glied mit Index $k \geq n$ ist das erste ungerade, denn die ungeraden Glieder wachsen und liegen unter 1, die geraden über 2:

$$\tau_n = \inf\{a_k : k \geq n\} = \frac{n}{n+1} \ (n \text{ ungerade}), \qquad \tau_n = \frac{n+1}{n+2} \ (n \text{ gerade}).$$

In beiden Fällen ist $\frac{n}{n+1} \leq \tau_n < 1$, denn $(n+1)^2 > n(n+2)$. Wegen $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$ (Satz 4.4 (1), Satz 4.9 (1), (4)) und Satz 4.11 ist $\liminf a_n = \lim \tau_n = 1$ (Absatz nach Definition 4.25). Dagegen ist $\inf a_n = a_1 = \frac{1}{2}$, und es wird angenommen. Supremum und Limes superior fallen hier zusammen, Infimum und Limes inferior nicht: Das Infimum bestimmt ein einzelnes frühes Glied, den Limes inferior nur das Verhalten weit draußen. Die Folge ist beschränkt ($0 < a_n < 3$) und divergiert nach Satz 4.28, denn $\liminf a_n = 1 \neq 3 = \limsup a_n$. Die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}) konvergieren gegen 3 und 1; das bestätigt nach Satz 4.24 (1) die Divergenz auf einem zweiten Weg.

Beispiel 5 (ein Grenzwert mit e). Es gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \to e^2$ nach Satz 4.9 (2), denn die Folge ist a_n^2. Ferner

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \to \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e} \qquad (n \geq 2),$$

mit Satz 4.9 (2), (4) und weil $(a_{n-1})_{n\geq 2}$ die Folge (a_n) mit verschobenem Index ist (Abschnitt 4.1). Das ist der Fall $x = -1$ der allgemeinen Aussage über $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, die der Ausblick nennt.

4.11 Ausblick

- **Vollständigkeit.** In dieser Einheit ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ in drei Gestalten aufgetreten, die Einheit 5 mit (S), (M) und (C) bezeichnet: als Supremumseigenschaft (S) im Beweis von Satz 4.16 und in Definition 4.25, als Monotonieprinzip (M) in Satz 4.16 selbst, das Satz 4.17, Satz 4.18 und Satz 4.20 trägt, und als Cauchy-Vollständigkeit (C) in Satz 4.31. Im Beweis von Satz 4.18 bilden die Intervalle $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung, deren Längen gegen null gehen; ihren gemeinsamen Punkt e lieferte dort noch das Monotonieprinzip. Nach Folgerung 4.27 und Satz 4.34 hat jede beschränkte reelle Folge eine konvergente Teilfolge; das ist der Satz von Bolzano-Weierstraß. Einheit 5 macht Intervallschachtelung und Bolzano-Weierstraß zu eigenen Gestalten der Vollständigkeit, beweist den Satz von Bolzano-Weierstraß auf weiteren Wegen und zeigt in Satz 5.14, wie die Gestalten in einem beliebigen angeordneten Körper zusammenhängen; Häufungswerte, Teilfolgen, Limes superior und Cauchy-Kriterium nimmt sie aus dieser Einheit.
- **Reihen.** Eine Reihe ist die Folge ihrer Partialsummen; Satz 4.20 war bereits eine Aussage über die Reihe $\sum 1/k!$, und Satz 4.21 zeigt, dass ihr Wert irrational ist. Das Cauchy-Kriterium (Satz 4.31) wird in Einheit 6 zum wichtigsten Werkzeug, die geometrische Folge (q^n) aus Satz 4.4 und die Folge $(n^k q^n)$ aus Satz 4.32 zum Maßstab der Konvergenzkriterien.
- **Stetigkeit.** Eine Funktion ist genau dann stetig in a, wenn sie jede gegen a konvergente Folge auf eine gegen $f(a)$ konvergente Folge abbildet (Einheit 7). Die Rechenregeln aus Satz 4.9 und Satz 4.12 (1) sind dann Aussagen über die Stetigkeit von Summe, Produkt, Quotient, Betrag und k-ter Wurzel.
- **Exponentialfunktion.** Die Zahl e ist der Wert der Exponentialfunktion an der Stelle 1. Einheit 9 erklärt $\exp(x) = \sum x^k/k!$ und zeigt, dass $\exp(1)$ die Zahl e dieser Einheit ist; dass $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für jedes reelle x gegen $\exp(x)$ strebt, beweist Satz 9.10.
- **Limes superior.** In der Form von Satz 4.35 liefert er die geschlossene Fassung des Wurzelkriteriums (Einheit 6) und die Formel von Cauchy-Hadamard für den Konvergenzradius einer Potenzreihe (Einheit 14). Beide Aussagen lassen sich auch ohne

ihn mit Schranken formulieren; der Limes superior fasst diese Schranken in einer einzigen Zahl zusammen, die auch dann existiert, wenn kein gewöhnlicher Grenzwert existiert.

Zum Vergleich.[1] Der Stoff dieser Einheit gehört zum Standardinhalt einer ersten Analysis-Vorlesung. Parallel lesen kann man O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, § 4 bis § 6 und § 9; dort wird e in § 8 als Summe der Exponentialreihe erklärt und die Darstellung als Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ erst in § 15 gewonnen, während diese Einheit von der Folge ausgeht. Das Heron-Verfahren (Satz 4.17) folgt im Gang des Beweises – Positivität, $x_n^2 \geq a$, Monotonie, Grenzübergang in der Rekursion – und in der Fehlerschranke $\frac{a}{x_n} \leq \sqrt{a} \leq x_n$ der Darstellung in Forster, § 6, Satz 1 mit dem anschließenden numerischen Beispiel. Die Kennzeichnung des Limes superior (Satz 4.26) entspricht in Aussage und Beweisgang Forster, § 9, Satz 4; die Teile (1) und (4) von Satz 4.35 stellt Forster als Aufgabe 9.11. Aufgaben zu denselben Themen enthält das *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage, § 4 bis § 6 und § 9. Aufgabe B1 ist eine gewichtete Abwandlung von Forster, Aufgabe 4.5 (Übungsbuch, Aufgabe 4 E) über arithmetische Mittel; deren ungewichtete Fassung folgt in V5 (b). Das Beispiel $(\sqrt{n})$ in (G6) ist Aufgabe 6 K des Übungsbuchs. Im Übrigen behandelt die Einheit Standardstoff in eigener Darstellung.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 4

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Nennen Sie jeweils die benutzten Sätze.

(a) $\dfrac{n^3 - 2n}{4n^3 + n^2 + 1}$

(b) $\sqrt{n^2 + n} - n$

(c) $\sqrt[n]{2^n + n^3}$

(d) $\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$

(e) $\dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ für $n \geq 2$

R2. Sei $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$. Zeigen Sie mit Definition 4.2 direkt, dass $a_n \to 2$. Bestimmen Sie zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ das kleinste N, für das $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

R3. Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Limes superior, Limes inferior und alle Häufungswerte der Folgen

(a) (a_n) mit $a_{3k-2} = -1 - \dfrac{1}{k}$, $a_{3k-1} = \dfrac{1}{k}$ und $a_{3k} = 2 - \dfrac{1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ (jedes $n \in \mathbb{N}$ hat genau eine dieser drei Formen),

(b) (b_n) mit $b_n = m$, falls $n = m^2$ mit $m \in \mathbb{N}$, und $b_n = \dfrac{1}{n}$, falls n keine Quadratzahl ist.

Wird das Supremum beziehungsweise Infimum als Glied angenommen?

R4. Führen Sie das Heron-Verfahren für $a = 3$ mit $x_1 = 2$ bis x_3 aus, und zwar mit Brüchen. Zeigen Sie mit Satz 4.17, dass $0 \leq x_3 - \sqrt{3} \leq \frac{1}{5432}$, und schätzen Sie den Fehler von x_4 ab, ohne x_4 zu berechnen.

R5. Zeigen Sie mit Satz 4.20 und $n = 8$, dass $2{,}7182 < e < 2{,}7183$.

R6. In den folgenden Folgen strebt die Basis gegen 1 und der Exponent gegen ∞.

(a) Zeigen Sie $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$ und $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n} \to \sqrt{e}$.

(b) Zeigen Sie zuerst: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ mit $nx < 1$ gilt $1 \leq (1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}$. Folgern Sie $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

(c) Zeigen Sie $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to \infty$.

Was lehrt der Vergleich der drei Fälle?

R7. Untersuchen Sie auf bestimmte Divergenz und nennen Sie die benutzten Sätze:

(a) $\dfrac{n^2-3n}{n+1}$

(b) $n-\sqrt{n}$

(c) $(-2)^n$

Zeigen Sie bei (c), dass $|a_n| \to \infty$ gilt, die Folge aber weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$ bestimmt divergiert.

Stufe B – Beweisen

B1. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \to a$. Man mittelt die Glieder, gewichtet mit ihrem Index:

$$m_n = \frac{1\cdot a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1+2+\cdots+n}.$$

Zeigen Sie $m_n \to a$. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass aus der Konvergenz von (m_n) nicht die von (a_n) folgt.

B2. Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $0 < |q| < 1$, sei $k \in \mathbb{N}$ und $x = \frac{1}{|q|} - 1$. Satz 4.32 wurde mit $\sqrt[n]{n} \to 1$ bewiesen. Hier ist ein zweiter Weg, der eine ausdrückliche Schranke liefert.

(a) Zeigen Sie mit dem Binomialsatz: Für $n \geq 2k$ gilt $|n^k q^n| \leq \dfrac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \dfrac{1}{n}$.

(b) Folgern Sie $n^k q^n \to 0$, ohne Satz 4.12 zu benutzen.

(c) Bestimmen Sie für $q = \frac{1}{2}$ und $k = 1$ aus (a) ein N mit $n\,2^{-n} < \frac{1}{100}$ für alle $n \geq N$, und vergleichen Sie mit dem kleinsten solchen N.

B3. Seien (a_n), (b_n) beschränkte reelle Folgen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$,

(b) $\limsup(\lambda a_n) = \lambda \limsup a_n$ für $\lambda \geq 0$ und $\limsup(\lambda a_n) = \lambda \liminf a_n$ für $\lambda < 0$.

Geben Sie ein Beispiel an, in dem in (a) die strikte Ungleichung gilt.

B4. Sei $c \geq 0$, $a_1 = c$ und $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2}{3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $0 \leq c < 1$, so ist (a_n) streng monoton wachsend mit $a_n < 1$, und $a_n \to 1$.

(b) Zeigen Sie: Ist $1 < c < 2$, so ist (a_n) streng monoton fallend mit $a_n > 1$, und $a_n \to 1$.

(c) Zeigen Sie: Ist $c > 2$, so gilt $a_n \to \infty$.

(d) Welche Werte kann ein Grenzwert der Folge überhaupt haben, und warum beweist diese Rechnung allein keine Konvergenz?

B5. Zwei Teilfolgen, die eine Folge zusammensetzen.

(a) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$, deren Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}) beide gegen dasselbe a konvergieren. Zeigen Sie: $a_n \to a$.

(b) Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots \pm \frac{1}{n}$. Zeigen Sie, dass (s_{2m}) monoton wächst, (s_{2m-1}) monoton fällt, dass $\frac{1}{2} \le s_{2m} < s_{2m-1} \le 1$ gilt und dass (s_n) konvergiert.

B6. Seien $c, d \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 1$, $z_1 \in \mathbb{C}$ und $z_{n+1} = cz_n + d$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $p = \frac{d}{1-c}$.

(a) Zeigen Sie $z_n - p = c^{n-1}(z_1 - p)$ für alle n.

(b) Zeigen Sie: Ist $|c| < 1$, so gilt $z_n \to p$.

(c) Berechnen Sie für $c = \frac{i}{2}$, $d = 1$, $z_1 = 0$ die Glieder $z_2, \dots, z_5$, den Grenzwert und die Grenzwerte von $\operatorname{Re} z_n$ und $\operatorname{Im} z_n$.

(d) Sei $|c| \ge 1$. Zeigen Sie: (z_n) konvergiert genau dann, wenn $z_1 = p$.

Stufe V – Vertiefen

V1 (Quotientenkriterium für Folgen). Sei $a_n > 0$ für alle n, und gelte $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to q$.

(a) Zeigen Sie: Ist $q < 1$, so ist (a_n) eine Nullfolge. Ist $q > 1$, so gilt $a_n \to \infty$.

(b) Zeigen Sie an drei Beispielen, dass für $q = 1$ Konvergenz gegen 0, Konvergenz gegen eine Zahl $\neq 0$ und bestimmte Divergenz vorkommen.

(c) Folgern Sie: $\frac{n^5}{2^n} \to 0$, $\frac{c^n}{n!} \to 0$ für jedes $c > 0$, und $\frac{n!}{n^n} \to 0$.

V2 (eine Folge mit sehr vielen Häufungswerten). Die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist nach Satz 2.45 und der Bemerkung nach Lemma 2.44 abzählbar, und sie ist unendlich, denn sie enthält alle $\frac{1}{m}$; es gibt also eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $n \mapsto q_n$. Die Folge (q_n) enthält jede rationale Zahl aus $[0,1]$ genau einmal und keine andere Zahl. Zeigen Sie: Jedes $x \in [0,1]$ ist ein Häufungswert von (q_n), und keine Zahl außerhalb von $[0,1]$ ist einer. Bestimmen Sie $\limsup q_n$ und $\liminf q_n$. Sie dürfen Satz 2.31 und die anschließende Bemerkung benutzen, nach der zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen unendlich viele rationale liegen.

V3 (ein periodischer Kettenbruch). Sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{a_n}$.

(a) Berechnen Sie $a_1, \dots, a_5$. Sei $g_1 = g_2 = 1$ und $g_{n+2} = g_{n+1} + 2g_n$. Zeigen Sie $g_n > 0$ und $a_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ für alle n.

(b) Zeigen Sie, dass (a_n) nicht monoton ist.

(c) Zeigen Sie $1 \le a_n \le 3$ und $|a_{n+1} - a_n| \le \frac{2}{3}|a_n - a_{n-1}|$ für $n \ge 2$, und folgern Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

(d) Bestimmen Sie $\lim a_n$. Beweisen Sie $g_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ durch Induktion und bestätigen Sie damit den Grenzwert.

V4. Seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte reelle Folgen, und gelte $b_n \to b$. Zeigen Sie mit Satz 4.26:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + b.$$

Vergleichen Sie mit B3 (a) und (G8).

V5. Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen, (b_n) streng monoton wachsend mit $b_n \to \infty$, und gelte

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to L \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie $\dfrac{a_n}{b_n} \to L$.

(b) Folgern Sie Aufgabe B1 für reelle Folgen, und ebenso: Aus $x_n \to a$ folgt $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to a$.

(c) Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \to \dfrac{1}{k+1}$.

(d) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass aus der Konvergenz von $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ nicht die der Differenzenquotienten folgt.

V6. Sei $0 < a_1 < 1$ und $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) streng monoton fällt und gegen 0 konvergiert.

(b) Zeigen Sie $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{1 - a_n}$ und folgern Sie $a_n < \frac{1}{n}$ für alle n.

(c) Zeigen Sie $n\, a_n \to 1$. (Hinweis: V5.)

Lösungen

Lösung R1. (a) Division durch n^3: $\dfrac{1 - \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \to \dfrac{1}{4}$, nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.9 (1), (2), (4); der Nenner konvergiert gegen $4 \neq 0$.

(b) Erweitern mit $\sqrt{n^2+n}+n>0$:

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

wobei $\sqrt{n^2+n}=n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ benutzt ist (beide Seiten nichtnegativ mit gleichem Quadrat). Nach Satz 4.12 (1) gilt $\sqrt{1+\frac{1}{n}}\to 1$, nach Satz 4.9 (4) also $\sqrt{n^2+n}-n\to\frac{1}{2}$. Obwohl beide Terme gegen ∞ gehen, hat die Differenz einen Grenzwert; „$\infty-\infty$“ legt nichts fest (G4).

(c) Nach Satz 4.32 mit $q=\frac{1}{2}$ und $k=3$ gilt $n^3\,2^{-n}\to 0$, also $n^3\,2^{-n}<1$, das heißt $n^3<2^n$, für fast alle n (nach Beispiel 4 in Abschnitt 1.11 der Einheit 1 für alle $n\geq 10$). Für diese n ist

$$2^n\leq 2^n+n^3\leq 2\cdot 2^n.$$

Die n-te Wurzel ist auf $[0,\infty)$ monoton wachsend: Wäre $0\leq u\leq v$ und $\sqrt[n]{v}<\sqrt[n]{u}$, so wäre nach Lemma 2.38 (1) $v<u$. Ferner ist $\sqrt[n]{2^n}=2$ und $\sqrt[n]{2\cdot 2^n}=2\sqrt[n]{2}$, denn beide Seiten sind jeweils positiv mit derselben n-ten Potenz. Also gilt für fast alle n

$$2\leq\sqrt[n]{2^n+n^3}\leq 2\sqrt[n]{2}.$$

Nach Satz 4.12 (2) und Satz 4.9 (1) geht die rechte Seite gegen 2; nach Satz 4.11 ist der Grenzwert 2. Die Potenz n^3 fällt gegen die Exponentialfolge nicht ins Gewicht, obwohl sie selbst gegen ∞ geht.

(d) $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$; nach Satz 4.4 (2) ist die Folge eine Nullfolge.

(e) Division durch n: $\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1-\frac{(-1)^n}{n}}$. Die Folge $\frac{(-1)^n}{n}$ ist nach Satz 4.8 (2) eine Nullfolge (Nullfolge $\frac{1}{n}$ mal beschränkte Folge $(-1)^n$). Nach Satz 4.9 ist der Grenzwert 1. Die Folge ist nicht monoton: $a_2=3$, $a_3=\frac{1}{2}$, $a_4=\frac{5}{3}$.

Lösung R2. Es ist

$$|a_n-2|=\left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right|=\frac{5}{n+3}.$$

Zu $\varepsilon>0$ wähle man nach der archimedischen Eigenschaft $N>\frac{5}{\varepsilon}$; für $n\geq N$ ist $\frac{5}{n+3}<\frac{5}{N}<\varepsilon$. Also $a_n\to 2$.

Für $\varepsilon=\frac{1}{100}$: $\frac{5}{n+3}<\frac{1}{100}$ ist gleichwertig mit $n+3>500$, also mit $n\geq 498$. Weil $\frac{5}{n+3}$ mit n fällt, gilt die Ungleichung für alle $n\geq 498$, und für $n=497$ ist $\frac{5}{500}=\frac{1}{100}$ nicht kleiner als ε. Das kleinste N ist 498. Die grobe Wahl $N>\frac{5}{\varepsilon}$ ergäbe $N=501$; sie ist ebenso richtig.

Lösung R3. (a) Die Werte: $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -\frac{3}{2}$, $a_5 = \frac{1}{2}$, $a_6 = \frac{3}{2}$, ... Die Teilfolge (a_{3k-2}) wächst gegen -1, (a_{3k-1}) fällt gegen 0, (a_{3k}) wächst gegen 2 (Satz 4.4 (1), Satz 4.9 (1)).

- $\sup a_n = 2$, nicht angenommen: Es ist $a_{3k} < 2$, $a_{3k-1} \le 1$ und $a_{3k-2} < 0$; zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 2.29 ein $k > \frac{1}{\varepsilon}$, und dann ist $a_{3k} > 2 - \varepsilon$.
- $\inf a_n = -2 = a_1$, angenommen: Es ist $a_{3k-2} \ge -2$, und alle übrigen Glieder sind positiv.
- Nach Satz 4.24 (2) sind -1, 0 und 2 Häufungswerte; die Indexfolgen $3k-2$, $3k-1$, $3k$ wachsen streng. Andere gibt es nicht: Sei $h \notin \{-1, 0, 2\}$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{|h+1|, |h|, |h-2|\} > 0$. Es gibt ein K mit $|a_{3k-2} + 1| < \varepsilon$, $|a_{3k-1}| < \varepsilon$ und $|a_{3k} - 2| < \varepsilon$ für $k \ge K$, etwa jedes $K > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \ge 3K$ ist n von der Form $3k-2$, $3k-1$ oder $3k$ mit $3k \ge n \ge 3K$, also $k \ge K$; a_n liegt dann näher als ε an einer der Zahlen $c \in \{-1, 0, 2\}$, und $|a_n - h| \ge |h - c| - |a_n - c| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Nur endlich viele Glieder erfüllen also $|a_n - h| < \varepsilon$.
- Die Folge ist beschränkt ($|a_n| \le 2$); nach Folgerung 4.27 ist $\limsup a_n = 2$ der größte und $\liminf a_n = -1$ der kleinste Häufungswert.

(b) Die Folge ist wohldefiniert, denn zu n gibt es höchstens ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m^2 = n$ (Lemma 2.38 (1)). Die Werte: $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_4 = 2$, $b_5 = \frac{1}{5}$, ..., $b_9 = 3$.

- Wegen $b_{m^2} = m$ ist (b_n) nicht nach oben beschränkt (Satz 2.29), also $\sup b_n = \infty$ nach Definition 2.37 und $\limsup b_n = \infty$ nach Definition 4.25; das Supremum ∞ ist keine Zahl und wird nicht angenommen.
- Alle Glieder sind positiv. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $m^2 < m^2 + 1 < (m+1)^2$; nach Lemma 2.38 (1) läge eine Wurzel $j \in \mathbb{N}$ von $m^2 + 1$ echt zwischen m und $m+1$, also ist $m^2 + 1$ keine Quadratzahl und $b_{m^2+1} = \frac{1}{m^2+1} \le \frac{1}{m}$. Damit ist $\inf b_n = 0$, nicht angenommen, und ebenso $\tau_n = \inf\{b_k : k \ge n\} = 0$ für jedes n.
- Die Folge $(-b_n)$ ist durch 0 nach oben beschränkt, und nach Folgerung 2.35 ist $\sup_{k \ge n}(-b_k) = -\tau_n = 0$ für alle n; diese Folge ist konstant, also nach unten beschränkt. Nach Definition 4.25 ist $\limsup(-b_n) = 0$, also $\liminf b_n = 0$.
- Häufungswerte: 0 ist einer, Grenzwert der Teilfolge $(b_{m^2+1})_{m \in \mathbb{N}}$ nach Satz 4.8 (1) mit der Majorante $\frac{1}{m}$, und Satz 4.24 (2). Kein $h > 0$ ist einer: Mit $\varepsilon = \frac{h}{2}$ verlangt $|b_n - h| < \varepsilon$, dass $b_n > \frac{h}{2}$ und $b_n < \frac{3h}{2}$ ist; das erfüllen nur Quadratzahlen $n = m^2$ mit $m < \frac{3h}{2}$ und Nichtquadrate $n < \frac{2}{h}$, also endlich viele n. Negative h scheiden aus, weil alle Glieder positiv sind.

Der einzige Häufungswert ist 0, aber die Folge konvergiert nicht, denn sie ist unbeschränkt (Satz 4.7); Satz 4.28 verlangt die Beschränktheit. Der Limes superior ∞ ist

keine Zahl und damit kein Häufungswert; Folgerung 4.27 verlangt ebenfalls die Beschränktheit (vergleiche Satz 4.35).

Lösung R4. $x_2 = \frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}+\frac{12}{7}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{49+48}{28} = \frac{97}{56}$.
Nach Satz 4.17 ist für $n = 3 \geq 2$

$$0 \leq x_3 - \sqrt{3} \leq x_3 - \frac{3}{x_3} = \frac{97}{56} - \frac{168}{97} = \frac{97^2 - 168\cdot 56}{56\cdot 97} = \frac{9409-9408}{5432} = \frac{1}{5432}.$$

Nach der Fehlerformel und $x_3 \geq \sqrt{3}$ ist

$$0 \leq x_4 - \sqrt{3} = \frac{(x_3-\sqrt{3})^2}{2x_3} \leq \frac{1}{5432^2\cdot 2\sqrt{3}} < \frac{1}{5432^2\cdot 3} < 1{,}2\cdot 10^{-8},$$

denn $2\sqrt{3} > 3$ (Quadrieren: $12 > 9$) und $5432^2\cdot 3 > 2{,}9\cdot 10^7\cdot 3 = 8{,}7\cdot 10^7$, also $\frac{1}{5432^2\cdot 3} < \frac{1}{8{,}7\cdot 10^7} < 1{,}2\cdot 10^{-8}$. Mit $2\sqrt{3} > 3{,}46$ erhält man sogar eine Schranke unter 10^{-8}.

Lösung R5. $s_8 = s_6 + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} = \frac{1957}{720} + \frac{8+1}{40320} = \frac{109592+9}{40320} = \frac{109601}{40320}$. Division ergibt $2{,}718278\ldots < s_8 < 2{,}718279$. Nach Satz 4.20 ist

$$s_8 < e \leq s_8 + \frac{1}{8!\cdot 8} = s_8 + \frac{1}{322560} < 2{,}718279 + 0{,}0000032 < 2{,}7183,$$

und $e > s_8 > 2{,}7182$.

Lösung R6. (a) Die Folge $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ ist die Teilfolge (a_{2n}) von $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mit den Indizes $n_k = 2k$; nach Satz 4.24 (1) und Definition 4.19 konvergiert sie gegen e. Ferner ist $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geq 0$ mit Quadrat a_{2n}, also nach der Eindeutigkeit der Wurzel (Satz 2.39) gleich $\sqrt{a_{2n}}$. Nach Satz 4.12 (1) gilt $\sqrt{a_{2n}} \to \sqrt{e}$.

(b) Aus $nx < 1$ folgt $0 \leq x < 1$, also $0 \leq 1-x^2 \leq 1$ und nach Lemma 2.38 (1) $(1-x^2)^n \leq 1$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.24, mit $-x \geq -1$) ist $(1-x)^n \geq 1-nx > 0$. Also

$$(1+x)^n = \frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} \leq \frac{1}{(1-x)^n} \leq \frac{1}{1-nx},$$

der letzte Schritt nach (O6), weil $(1-x)^n \geq 1-nx > 0$. Die linke Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx \geq 1$ ist wieder Bernoulli. Für $x = \frac{1}{n^2}$ und $n \geq 2$ ist $nx = \frac{1}{n} < 1$, also

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Die rechte Seite geht nach Satz 4.4 (1) gegen 1; nach Satz 4.11 gilt $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

(c) Nach Satz 4.18 ist $a_n \geq a_1 = 2$, nach Lemma 2.38 (1) also $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = a_n^n \geq 2^n$. Nach den Beispielen zu Satz 4.14 gilt $2^n \to \infty$, und nach der Bemerkung über das Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$ (Abschnitt 4.4) überträgt sich das auf die größere Folge: $a_n^n \to \infty$.

Vergleich. Basis gegen 1, Exponent gegen ∞, und doch konvergieren die Folgen gegen e, $\sqrt{e}$ beziehungsweise 1 oder divergieren bestimmt gegen ∞. Ein Ausdruck der Form „1^∞“ legt nichts fest, wie „$\frac{0}{0}$“ in (G3). Entscheidend ist, wie schnell die Basis gegen 1 geht, verglichen damit, wie schnell der Exponent wächst.

Lösung R7. (a) Für $n \geq 1$ ist $\dfrac{n^2-3n}{n+1} = n \cdot b_n$ mit $b_n = \dfrac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}$. Nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.9 gilt $b_n \to 1$, also ist $b_n > \frac{1}{2}$ für fast alle n (Definition 4.2 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Mit $n \to \infty$ und Satz 4.14 (3), $c = \frac{1}{2}$, folgt $\dfrac{n^2-3n}{n+1} \to \infty$.

(b) $n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n}-1)$. Für $n \geq 4$ ist $\sqrt{n} \geq 2$ (Lemma 3.8), also $\sqrt{n}-1 \geq 1$. Nach den Beispielen zu Satz 4.14 gilt $\sqrt{n} \to \infty$, und Satz 4.14 (3) mit $c = 1$ gibt $n - \sqrt{n} \to \infty$. Das ist ein Fall von „$\infty - \infty$“ mit bestimmter Divergenz (vergleiche (G4)).

(c) $|a_n| = 2^n \to \infty$ nach den Beispielen zu Satz 4.14. Die Folge ist unbeschränkt, nach Satz 4.7 also divergent. Sie divergiert nicht bestimmt gegen ∞: Zu $C = 0$ gibt es kein N mit $a_n > 0$ für alle $n \geq N$, denn für jedes ungerade $n \geq N$ ist $a_n = -2^n < 0$. Ebenso gibt es kein N mit $-a_n > 0$ für alle $n \geq N$, wegen der geraden n. Aus $|a_n| \to \infty$ folgt also keine bestimmte Divergenz; die Teilfolgen $(a_{2k}) = (4^k)$ und $(a_{2k-1}) = (-2 \cdot 4^{k-1})$ divergieren bestimmt gegen ∞ beziehungsweise $-\infty$ (Beispiele zu Satz 4.14, Satz 4.14 (3)). Das ist der Fall $|z| > 1$ aus Beispiel 3 in Abschnitt 4.10 für $z = -2$, genauer gefasst.

Lösung B1. Sei $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Satz 1.12). Dann ist $m_n = \frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^n k a_k$ und, weil $\frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^n k = 1$ ist,

$$m_n - a = \frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^{n} k\,(a_k - a).$$

Sei $\varepsilon > 0$ und N_1 so, dass $|a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq N_1$. Für $n \geq N_1$ gibt die Dreiecksungleichung für endliche Summen (Folgerung 3.24; für reelle Folgen Aufgabe B8 (a) der Einheit 1)

$$|m_n - a| \leq \frac{1}{T_n}\sum_{k=1}^{N_1-1} k\,|a_k - a| + \frac{1}{T_n}\sum_{k=N_1}^{n} k\,|a_k - a| \leq \frac{K}{T_n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

mit der festen Zahl $K = \sum_{k=1}^{N_1-1} k\,|a_k - a|$; im zweiten Summanden ist $\sum_{k=N_1}^{n} k \le T_n$ benutzt. Wegen $T_n \ge n$ ist $\frac{K}{T_n} \le \frac{K}{n}$. Wähle $N \ge N_1$ mit $N > \frac{2K}{\varepsilon}$; für $n \ge N$ ist dann $\frac{K}{T_n} < \frac{\varepsilon}{2}$, also $|m_n - a| < \varepsilon$.

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ divergiert. Fasst man in $\sum_{k=1}^{n} k(-1)^k$ je zwei Summanden $-(2j-1)+2j = 1$ zusammen, so erhält man $\frac{n}{2}$ für gerades und $\frac{n-1}{2} - n = -\frac{n+1}{2}$ für ungerades n. In beiden Fällen ist der Betrag höchstens $\frac{n+1}{2}$, also

$$|m_n| \le \frac{(n+1)/2}{n(n+1)/2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Idee. Der Anfang der Folge ist eine feste Last K, die durch T_n geteilt verschwindet; der Rest ist ohnehin klein. Obwohl die späten Glieder das größere Gewicht tragen, überträgt sich die Konvergenz. Aufgabe V5 (b) gibt einen zweiten Beweis und behandelt auch die ungewichteten Mittel.

Lösung B2. (a) Für $n \ge 2k$ ist $n \ge k+1$, und alle Summanden im Binomialsatz für $(1+x)^n$ sind nichtnegativ; also

$$(1+x)^n \ge \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\, x^{k+1}.$$

Für $0 \le j \le k$ ist $n - j \ge n - k \ge \frac{n}{2}$, weil $n \ge 2k$. Also ist $(1+x)^n \ge \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} x^{k+1}$, und mit $|q| = \frac{1}{1+x}$ und Folgerung 3.23

$$|n^k q^n| = \frac{n^k}{(1+x)^n} \le \frac{2^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1}} \cdot \frac{1}{n}.$$

(b) Die rechte Seite in (a) ist eine Konstante mal $\frac{1}{n}$, nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.9 (1) also eine Nullfolge, und sie ist für fast alle n eine Majorante von $|n^k q^n|$. Satz 4.8 (1) gibt $n^k q^n \to 0$. Benutzt wurden nur der Binomialsatz und $\frac{1}{n} \to 0$.

(c) Für $q = \frac{1}{2}$ ist $x = 1$, und mit $k = 1$ lautet (a): $n\,2^{-n} \le \frac{2^2 \cdot 2!}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{8}{n}$ für $n \ge 2$. Aus $\frac{8}{n} < \frac{1}{100}$, also $n > 800$, folgt: $N = 801$ leistet das Verlangte. Tatsächlich ist schon $10 \cdot 2^{-10} = \frac{10}{1024} < \frac{1}{100}$, und für $n \ge 10$ fällt $n\,2^{-n}$, denn $\frac{(n+1)2^{-n-1}}{n2^{-n}} = \frac{n+1}{2n} < 1$; dagegen ist $9 \cdot 2^{-9} = \frac{9}{512} > \frac{1}{100}$. Das kleinste N ist 10. Die Schranke aus (a) ist grob, aber sie ist bewiesen und gilt für jedes q und k.

Lösung B3. Seien $\sigma_n^a = \sup_{k\geq n} a_k$, $\sigma_n^b = \sup_{k\geq n} b_k$ und $\tau_n^a = \inf_{k\geq n} a_k$.

(a) Für $k \geq n$ ist $a_k + b_k \leq \sigma_n^a + \sigma_n^b$; also ist $\sigma_n^a + \sigma_n^b$ eine obere Schranke von $\{a_k + b_k : k \geq n\}$, und $\sup_{k\geq n}(a_k + b_k) \leq \sigma_n^a + \sigma_n^b$. Grenzübergang (Satz 4.10, Satz 4.9 (1)) gibt die Behauptung. Strikte Ungleichung: Für $a_n = (-1)^n$ und $b_n = -(-1)^n$ ist $a_n + b_n = 0$, also $\limsup(a_n + b_n) = 0 < 2 = \limsup a_n + \limsup b_n$ (G8).

(b) Für $\lambda = 0$ sind beide Seiten 0. Für $\lambda > 0$ ist $\sup_{k\geq n} \lambda a_k = \lambda\sigma_n^a$ nach Lemma 2.36 (3); Grenzübergang mit Satz 4.9 (1) gibt $\limsup(\lambda a_n) = \lambda \limsup a_n$. Für $\lambda < 0$ ist nach Lemma 2.36 (3), angewandt auf die nach unten beschränkte Menge $\{a_k : k \geq n\}$, $\sup_{k\geq n} \lambda a_k = \lambda\tau_n^a$. Für beschränkte Folgen ist $\liminf a_n = \lim \tau_n^a$ (Absatz nach Definition 4.25), und Satz 4.9 (1) gibt $\limsup(\lambda a_n) = \lambda \liminf a_n$.

Lösung B4. Grundlage sind drei Umformungen, die man durch Ausmultiplizieren prüft:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3}, \qquad a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)(a_n + 1)}{3}, \qquad a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n - 2)(a_n + 2)}{3}.$$

Ferner ist $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3} > 0$ für alle n. Konvergiert (a_n) gegen ein L, so auch (a_{n+1}) (Weglassen des ersten Glieds), und Satz 4.9 gibt $L = \frac{L^2+2}{3}$, also $(L - 1)(L - 2) = 0$ und $L \in \{1, 2\}$.

(a) Durch Induktion ist $0 \leq a_n < 1$: Für $n = 1$ ist das die Voraussetzung, und aus $0 \leq a_n < 1$ folgt $a_{n+1} > 0$ und $a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n-1)(a_n+1)}{3} < 0$, weil $a_n - 1 < 0 < a_n + 1$ (O5). Dann sind $a_n - 1$ und $a_n - 2$ negativ, also $a_{n+1} - a_n > 0$. Die Folge wächst streng und ist durch 1 nach oben beschränkt. Nach Satz 4.16 konvergiert sie gegen ein L, nach Satz 4.10 mit $L \leq 1$. Wegen $L \in \{1, 2\}$ ist $L = 1$.

(b) Durch Induktion ist $1 < a_n < 2$: Aus $1 < a_n < 2$ folgt $a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n-1)(a_n+1)}{3} > 0$ und $a_{n+1}-2 = \frac{(a_n-2)(a_n+2)}{3} < 0$. Dann haben a_n-1 und a_n-2 verschiedene Vorzeichen, also $a_{n+1} - a_n < 0$. Die Folge fällt streng und ist durch 1 nach unten beschränkt. Nach Satz 4.16 konvergiert sie gegen ein L, nach Satz 4.10 mit $L \leq a_1 = c < 2$. Wegen $L \in \{1, 2\}$ ist $L = 1$.

(c) Durch Induktion ist $a_n > 2$: Aus $a_n > 2$ folgt $a_{n+1} - 2 = \frac{(a_n-2)(a_n+2)}{3} > 0$. Dann sind $a_n - 1$ und $a_n - 2$ positiv, also wächst (a_n) streng, und $a_n \geq c$ für alle n. Wäre (a_n) nach oben beschränkt, so konvergierte sie nach Satz 4.16 gegen ein L mit $L \geq c > 2$ (Satz 4.10), im Widerspruch zu $L \in \{1, 2\}$. Also ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, und nach Satz 4.16 (2) gilt $a_n \to \infty$.

(d) Ein Grenzwert kann nur 1 oder 2 sein, wie oben gezeigt. Für $c = 1$ und $c = 2$ ist die Folge konstant. Die Gleichung $L = \frac{L^2+2}{3}$ setzt aber voraus, dass die Folge konvergiert: Für $c > 2$ führt dieselbe Rechnung auf die Kandidaten 1 und 2, obwohl $a_n \to \infty$. Erst

der Konvergenznachweis (Satz 4.16) und die Lage der Glieder (Satz 4.10) entscheiden, ob und welcher Kandidat der Grenzwert ist. Zusammen: Für $0 \le c < 2$ strebt die Folge gegen 1, für $c > 2$ gegen ∞; den Grenzwert 2 hat sie nur für $c = 2$.

Lösung B5. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt K_1 mit $|a_{2k} - a| < \varepsilon$ für $k \ge K_1$ und K_2 mit $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ für $k \ge K_2$. Sei $N = 2\max\{K_1, K_2\}$. Ist $n \ge N$ gerade, $n = 2k$, so ist $k \ge K_1$; ist n ungerade, $n = 2k - 1$, so ist $2k > N$, also $k \ge K_2$. In beiden Fällen ist $|a_n - a| < \varepsilon$.

(b) Es ist

$$s_{2m+2} - s_{2m} = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} > 0, \qquad s_{2m+1} - s_{2m-1} = -\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m+1} < 0.$$

Ferner $s_{2m} = s_{2m-1} - \frac{1}{2m} < s_{2m-1}$. Mit den Monotonien folgt $\frac{1}{2} = s_2 \le s_{2m} < s_{2m-1} \le s_1 = 1$. Nach Satz 4.16 konvergieren (s_{2m}) und (s_{2m-1}), und wegen $s_{2m-1} - s_{2m} = \frac{1}{2m} \to 0$ gegen denselben Grenzwert. Nach (a) konvergiert (s_n).

Ausblick. Das ist der Beweis des Leibniz-Kriteriums für Reihen (Einheit 6) an einem Beispiel. Der Grenzwert ist $\ln 2$; das zeigt sich erst mit der Taylorentwicklung des Logarithmus (Einheit 11).

Lösung B6. (a) Wegen $c \ne 1$ ist p erklärt, und $p(1 - c) = d$ heißt $p = cp + d$. Also $z_{n+1} - p = cz_n + d - (cp + d) = c(z_n - p)$. Durch Induktion folgt $z_n - p = c^{n-1}(z_1 - p)$: Für $n = 1$ ist $c^0 = 1$, und der Schritt ist die eben gezeigte Gleichung.

(b) Nach Satz 4.4 (2) ist (c^n) eine Nullfolge, also auch $(c^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$, die nur ein Glied mehr hat. Nach Satz 4.8 (2) mit der konstanten Folge $z_1 - p$ ist $(z_n - p)$ eine Nullfolge, also $z_n \to p$.

(c) $z_2 = 1$, $z_3 = 1 + \frac{i}{2}$, $z_4 = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{i}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} + \frac{i}{2}$, $z_5 = \frac{i}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{i}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{8}i$. Wegen $|c| = \frac{1}{2} < 1$ ist nach (b)

$$\lim z_n = p = \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} = \frac{1 + \frac{i}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i,$$

und nach Satz 4.5 gilt $\operatorname{Re} z_n \to \frac{4}{5}$, $\operatorname{Im} z_n \to \frac{2}{5}$. Probe mit (a): $z_5 - p = -\frac{1}{20} - \frac{1}{40}i = c^4(z_1 - p) = \frac{1}{16}\left(-\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right)$. Die Glieder umkreisen den Grenzwert, weil die Multiplikation mit $\frac{i}{2}$ den Abstand halbiert und die Richtung um einen rechten Winkel dreht; Real- und Imaginärteil sind deshalb nicht monoton.

(d) Ist $z_1 = p$, so ist $z_n = p$ für alle n nach (a). Sei $z_1 \ne p$, $w = z_1 - p$, und angenommen $z_n \to L$. Dann gilt nach Satz 4.9 (1) $c^{n-1} = \frac{1}{w}(z_n - p) \to \frac{1}{w}(L - p)$, also konvergiert

auch (c^n) (Weglassen des ersten Glieds). Nach Beispiel 3 in Abschnitt 4.10 divergiert (c^n) aber für $|c| > 1$ und für $|c| = 1, c \neq 1$. Widerspruch.

Bemerkung. Die Voraussetzung $|c| < 1$ ist also für jeden Startwert außer dem Fixpunkt p unentbehrlich. Für $c = 1$ ist $z_n = z_1 + (n-1)d$; die Folge konvergiert genau für $d = 0$. Mit $z_1 = 0$ und $d = 1$ ist $z_{n+1} = 1 + c + \cdots + c^{n-1}$; (b) liefert dann den Wert der geometrischen Reihe (Einheit 6). Die Gleichung $|z_{n+1} - p| = |c|\,|z_n - p|$ ist das Muster der Fixpunktargumente in Einheit 5.

Lösung V1. (a) Wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ für alle n ist $q \geq 0$ nach Satz 4.10. Sei $q < 1$ und $r = \frac{1+q}{2}$, also $0 < \frac{1}{2} \leq r$ und $q < r < 1$. Zu $\varepsilon = r - q$ gibt es N mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$ für $n \geq N$. Durch Induktion folgt $a_n \leq a_N r^{n-N}$ für $n \geq N$, also

$$0 < a_n \leq \frac{a_N}{r^N}\, r^n.$$

Die rechte Seite ist eine Konstante mal r^n, nach Satz 4.4 (2) und Satz 4.9 (1) eine Nullfolge; Satz 4.8 (1). Für $q > 1$ wendet man das auf $\frac{1}{a_n}$ an, deren Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ nach Satz 4.9 (4) gegen $\frac{1}{q} < 1$ gehen, und benutzt Satz 4.14 (1).

(b) $a_n = \frac{1}{n}$: Quotient $\frac{n}{n+1} \to 1$, Grenzwert 0. $a_n = 1$: Quotient 1, Grenzwert 1. $a_n = n$: Quotient $\frac{n+1}{n} \to 1$, $a_n \to \infty$.

(c) $\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^5} = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{n}\big)^5 \to \frac{1}{2}$. $\frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{c^n} = \frac{c}{n+1} \to 0$. Schließlich

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n} \to \frac{1}{e},$$

und $\frac{1}{e} < 1$, weil $e > 2$ nach Satz 4.18. In allen drei Fällen folgt die Behauptung aus (a). Die erste Aussage ist ein Sonderfall von Satz 4.32.

Lösung V2. Sei $x \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Das Intervall $J = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [0,1]$ enthält ein Intervall (c,d) mit $c < d$: für $x < 1$ etwa $c = x$, $d = \min\{x + \varepsilon, 1\}$, für $x = 1$ etwa $c = \max\{1 - \varepsilon, 0\}$, $d = 1$. Nach der Bemerkung nach Satz 2.31 liegen in $(c,d) \subseteq J$ unendlich viele rationale Zahlen. Jede davon kommt in (q_n) genau einmal vor, an verschiedenen Stellen. Also gilt $|q_n - x| < \varepsilon$ für unendlich viele n; x ist ein Häufungswert.

Ist $x > 1$, so ist mit $\varepsilon = x - 1$ kein Glied in $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, denn alle Glieder sind ≤ 1. Ebenso für $x < 0$.

Nach Folgerung 4.27 ist $\limsup q_n$ der größte Häufungswert, also 1, und $\liminf q_n = 0$.

Bemerkung. Eine einzige Folge kann also überabzählbar viele Häufungswerte haben, obwohl sie nur abzählbar viele Glieder hat: $[0,1]$ ist überabzählbar, denn die injektive Abbildung Φ aus dem Beweis von Satz 2.47 nimmt nur Werte in $[0,1]$ an (alle Teilsummen liegen in $[0,1)$, Satz 4.10). Häufungswerte sind keine Glieder, sondern Stellen, an denen sich Glieder sammeln.

Lösung V3. (a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = \frac{5}{3}$, $a_4 = \frac{11}{5}$, $a_5 = \frac{21}{11}$; die g_n beginnen mit $1, 1, 3, 5, 11, 21$. Durch Induktion über n gilt $g_n > 0$ und $g_{n+1} > 0$: Für $n = 1$ ist das die Festsetzung, und aus $g_n, g_{n+1} > 0$ folgt $g_{n+2} = g_{n+1} + 2g_n > 0$. Ebenso durch Induktion: $a_1 = \frac{g_2}{g_1} = 1$, und aus $a_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ folgt

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2g_n}{g_{n+1}} = \frac{g_{n+1} + 2g_n}{g_{n+1}} = \frac{g_{n+2}}{g_{n+1}}.$$

(b) $a_1 < a_2 > a_3$.

(c) Durch Induktion ist $a_n \geq 1$ für alle n: $a_1 = 1$, und aus $a_n \geq 1$ folgt $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} > 1$. Damit ist auch $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \leq 1 + 2 = 3$ nach (O6), und $a_1 \leq 3$. Für $n \geq 2$ ist

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{a_n} - \frac{2}{a_{n-1}} = \frac{2(a_{n-1} - a_n)}{a_n a_{n-1}}, \qquad a_n a_{n-1} = \Big(1 + \frac{2}{a_{n-1}}\Big) a_{n-1} = a_{n-1} + 2 \geq 3.$$

Also $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{2}{3}|a_n - a_{n-1}|$, und durch Induktion $|a_{n+1} - a_n| \leq \big(\frac{2}{3}\big)^{n-1} |a_2 - a_1| = 3\big(\frac{2}{3}\big)^n$ für alle n. Das ist die Voraussetzung des Beispiels nach Satz 4.31 mit $C = 3$ und $q = \frac{2}{3}$. Ausgeschrieben: Für $m > n$ ist nach der Dreiecksungleichung und der geometrischen Summe

$$|a_m - a_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} 3\Big(\frac{2}{3}\Big)^k < 3\Big(\frac{2}{3}\Big)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 9\Big(\frac{2}{3}\Big)^n,$$

und nach Satz 4.4 (2) und Satz 4.9 (1) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N mit $9(\frac{2}{3})^N < \varepsilon$; für $m > n \geq N$ ist $(\frac{2}{3})^n \leq (\frac{2}{3})^N$, also $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Die Folge ist eine Cauchy-Folge.

(d) Nach Satz 4.31 konvergiert (a_n) gegen ein L, nach Satz 4.10 mit $1 \leq L \leq 3$. Die Folge (a_{n+1}) konvergiert ebenfalls gegen L (Weglassen des ersten Glieds); wegen $L \neq 0$ folgt aus $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$ mit Satz 4.9 (1), (4) $L = 1 + \frac{2}{L}$, also $L^2 - L - 2 = (L-2)(L+1) = 0$, und wegen $L \geq 1$ ist $L = 2$.

Zur Formel: $g_1 = \frac{2+1}{3} = 1$, $g_2 = \frac{4-1}{3} = 1$, und gilt sie für g_n und g_{n+1}, so ist

$$g_{n+1} + 2g_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1} + 2^{n+1} - 2(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3}.$$

Damit ist, nach Division von Zähler und Nenner durch 2^n,

$$a_n = \frac{g_{n+1}}{g_n} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{2^n - (-1)^n} = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \to \frac{2+0}{1-0} = 2$$

nach Satz 4.4 (2) und Satz 4.9 (1), (4).

Bemerkung. Das Monotonieprinzip lässt sich hier nicht direkt anwenden, weil die Folge abwechselnd über und unter dem Grenzwert liegt; nach der Formel ist $a_n - 2 = \frac{3(-1)^n}{2^n - (-1)^n}$. Man könnte wie in B5 die geraden und ungeraden Glieder getrennt behandeln; das Cauchy-Kriterium kommt ohne diese Zerlegung und ohne Kenntnis des Grenzwerts aus, die geschlossene Formel bestätigt ihn nur nachträglich. Die Abschätzung in (c) ist ein Vorgriff auf den Banachschen Fixpunktsatz; Lemma 5.22 (Einheit 5, Vorgriff) fasst sie für beliebige kontrahierende Folgen.

Lösung V4. Sei $L = \limsup a_n$ und $\varepsilon > 0$. Für fast alle n gilt $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, nach Satz 4.26 (i) $a_n < L + \frac{\varepsilon}{2}$, also $a_n + b_n < L + b + \varepsilon$. Nach Satz 4.26 (ii) gilt $a_n > L - \frac{\varepsilon}{2}$ für unendlich viele n; da $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle n gilt, gibt es unendlich viele n, für die beides gilt, und für diese ist $a_n + b_n > L + b - \varepsilon$. Die Folge $(a_n + b_n)$ ist beschränkt, und $L + b$ erfüllt die Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 4.26; also ist $\limsup(a_n + b_n) = L + b$.

Vergleich: In B3 (a) gilt im Allgemeinen nur „$\leq$“, und (G8) zeigt, dass die Ungleichung strikt sein kann. Ist einer der Summanden konvergent, so gilt Gleichheit. Was in (G8) schiefgeht: Die Stellen, an denen (a_n) nahe an seinem Limes superior ist, sind genau die, an denen (b_n) weit von seinem entfernt ist.

Lösung V5. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Weil $b_{k+1} - b_k > 0$ ist, gibt es N mit

$$\left|(a_{k+1} - a_k) - L(b_{k+1} - b_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}(b_{k+1} - b_k) \qquad (k \geq N);$$

wegen $b_n \to \infty$ darf man N zusätzlich so groß wählen, dass $b_N > 0$ ist, und dann ist $b_n \geq b_N > 0$ für $n \geq N$. Summation über $k = N, \dots, n-1$ und die Dreiecksungleichung für Summen (Aufgabe B8 (a) der Einheit 1) geben für $n > N$

$$|a_n - a_N - L(b_n - b_N)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(b_n - b_N).$$

Also ist für $n > N$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| \leq \frac{|a_N - Lb_N|}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b_n - b_N}{b_n} < \frac{|a_N - Lb_N|}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Satz 4.14 (1) ist $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ eine Nullfolge, nach Satz 4.9 (1) auch $\left(\frac{|a_N - Lb_N|}{b_n}\right)$, denn N ist fest. Es gibt also $N' \geq N$ mit $\frac{|a_N - Lb_N|}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$, und für diese n ist $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$.

(b) Gelte $x_n \to a$ in $\mathbb{R}$. Mit $A_n = \sum_{k=1}^{n} kx_k$ und $b_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ist (b_n) streng monoton wachsend mit $b_n \geq n$, also $b_n \to \infty$, und

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)x_{n+1}}{n+1} = x_{n+1} \to a,$$

nach (a) also $\frac{A_n}{b_n} \to a$; das ist B1. Ebenso gibt (a) mit $A_n = x_1 + \cdots + x_n$ und $b_n = n$ wegen $\frac{A_{n+1} - A_n}{1} = x_{n+1} \to a$ die Behauptung über die arithmetischen Mittel.

(c) Sei $a_n = \sum_{j=1}^{n} j^k$ und $b_n = n^{k+1}$. (b_n) wächst streng (Lemma 2.38 (1)) und erfüllt $b_n \geq n$, also $b_n \to \infty$. Nach dem Binomialsatz (Satz 1.20) ist $(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} n^j$, und nach Division von Zähler und Nenner durch n^k:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k}{(k+1) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-j}} \to \frac{1}{k+1},$$

nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.9, denn $k - j \geq 1$ in jedem Summanden der Summe, und der Nenner strebt gegen $k + 1 \neq 0$. Nach (a) folgt die Behauptung. Die Summe der k-ten Potenzen wächst also wie $\frac{n^{k+1}}{k+1}$; in Einheit 12 ist $\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} j^k$ eine Riemannsche Summe von x^k auf $[0,1]$ (für $k = 2$ in der Leitfrage), und Einheit 13 bestätigt den Wert $\int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$ mit dem Hauptsatz.

(d) $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$: Nach Satz 4.8 (2) gilt $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, aber $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 2(-1)^{n+1}$ divergiert.

Bemerkung. Die Aussage (a) ist als Satz von Stolz-Cesàro bekannt. Der Beweis folgt demselben Gedanken wie B1: Ein fester Anfang wird durch eine gegen ∞ strebende Größe geteilt und verschwindet, der Rest ist klein.

Lösung V6. (a) Durch Induktion ist $0 < a_n < 1$: Gilt das für a_n, so sind a_n und $1 - a_n$ positiv, also $a_{n+1} > 0$, und $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 < 0$, also $a_{n+1} < a_n < 1$. Damit fällt (a_n) streng und ist durch 0 nach unten beschränkt. Nach Satz 4.16 gilt $a_n \to L$, nach Satz 4.10 mit $L \geq 0$. Aus $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$ folgt mit Satz 4.9 $L = L(1 - L)$, also $L^2 = 0$ und $L = 0$.

(b) Es ist

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{a_n^2}{a_n \cdot a_n(1 - a_n)} = \frac{1}{1 - a_n}.$$

Wegen $0 < 1 - a_n < 1$ ist die rechte Seite größer als 1. Summation über $k = 1, \dots, n-1$ gibt $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{a_1} + (n-1) > 1 + (n-1) = n$ für $n \geq 2$, denn $\frac{1}{a_1} > 1$; für $n = 1$ ist $\frac{1}{a_1} > 1$ direkt. Also $a_n < \frac{1}{n}$ für alle n.

(c) Nach (a) und Satz 4.9 (4) gilt $d_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-a_n} \to 1$. Mit V5 (a) für $A_n = \frac{1}{a_n}$ und $b_n = n$ folgt $\frac{1}{n\,a_n} = \frac{A_n}{n} \to 1$, nach Satz 4.9 (4) also $n\,a_n \to 1$.

Bemerkung. Die Folge strebt gegen 0, aber nur so schnell wie $\frac{1}{n}$, unabhängig vom Startwert. Die Rekursion selbst gibt das nicht zu erkennen; erst der Übergang zu $\frac{1}{a_n}$ macht aus der nichtlinearen Rekursion eine fast arithmetische Folge. Wegen $n\,a_n \to 1$ ist $a_n \geq \frac{1}{2n}$ für fast alle n; nach Satz 6.6 und dem Minorantenkriterium (Satz 6.10) folgt später, dass $\sum a_n$ divergiert.

EINHEIT 5

Vollständigkeit in vier Gestalten

Leitfrage

Halbiert man das Intervall $[1, 2]$ immer wieder und behält jeweils die Hälfte, für deren linken Endpunkt a noch $a^2 < 2$ und für deren rechten Endpunkt b noch $b^2 \geq 2$ gilt, so erhält man rationale Intervalle

$$[1, 2] \supseteq [1, \tfrac{3}{2}] \supseteq [\tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}] \supseteq [\tfrac{11}{8}, \tfrac{3}{2}] \supseteq [\tfrac{11}{8}, \tfrac{23}{16}] \supseteq \dots$$

Ihre Längen gehen gegen null, und doch liegt keine rationale Zahl in allen. Dieselbe Lücke von $\mathbb{Q}$ lässt sich auf mindestens vier Arten beschreiben: Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ hat in $\mathbb{Q}$ kein Supremum; die Folge der linken Endpunkte ist eine Cauchy-Folge ohne Grenzwert; die Intervalle haben keinen gemeinsamen Punkt; die beschränkte Folge der linken Endpunkte hat keine in $\mathbb{Q}$ konvergente Teilfolge. **Sind das vier Beschreibungen derselben Eigenschaft, und wenn ja, unter welcher Bedingung?** Die Antwort dieser Einheit: In einem archimedisch angeordneten Körper sind alle vier gleichwertig. Ohne die archimedische Eigenschaft fallen sie auseinander, und zwar genau an einer angebbaren Stelle.

Voraussetzungen. Aus Einheit 1: die Anordnungsregeln (O0)–(O6), Regel 1.3 (Verneinung), die geometrische Summe (Satz 1.13), die Wohlordnung (Satz 1.16), die Dreiecksungleichung (Satz 1.23) und die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24). Aus Einheit 2: angeordnete Körper (Definition 2.3, Satz 2.4, Folgerung 2.5), der Betrag in einem angeordneten Körper (Definition 2.6 mit dem Absatz danach), $\mathbb{Q}$ in jedem angeordneten Körper (Lemma 2.8), Schranken, Supremum und Supremumseigenschaft (Definition 2.10, Lemma 2.36 (1)), Intervalle (Abschnitt 2.2), archimedische Körper (Definition 2.12), Folgen in angeordneten Körpern (Definition 2.14, Lemma 2.15, Lemma 2.16) und die Aufzählung unendlicher Teilmengen von $\mathbb{N}$ (Lemma 2.43); für $\mathbb{Q}$ die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Satz 2.9), das Fehlen eines Supremums (Satz 2.11) und die archimedische Eigenschaft (Lemma 2.13); für $\mathbb{R}$ die archimedische Eigenschaft (Satz 2.29), der ganze Teil (Lemma 2.30), die Approximation (Lemma 2.32), die Cauchy-Vollständigkeit (Satz 2.33), die Supremumseigenschaft (Satz 2.34, Folgerung 2.35 mit der Bemerkung danach) und die Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$ (Satz 2.41). Aus Einheit 3: der Betrag in $\mathbb{C}$ (Satz 3.9, Satz 3.10, Folgerung 3.24) und dass sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt (Satz 3.16). Aus Einheit 4: Konvergenz

in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit komponentenweiser Konvergenz und Rechenregeln (Definition 4.2, Satz 4.5, Definition 4.6, Satz 4.8, Satz 4.9), das Monotonieprinzip (Satz 4.16), Teilfolgen und Häufungswerte (Definition 4.22, Definition 4.23, Satz 4.24, Satz 4.34), Limes superior und Limes inferior (Definition 4.25 bis Satz 4.28) sowie Cauchy-Folgen und das Cauchy-Kriterium (Definition 4.29, Satz 4.30, Satz 4.31).

Die Abschnitte 5.1 bis 5.4 arbeiten in einem beliebigen angeordneten Körper K und benutzen dort nur die Körper- und Anordnungsaxiome. Konvergenz, Beschränktheit und Cauchy-Folgen sind in K seit Definition 2.14 erklärt, und die Grundregeln aus Lemma 2.15 und Lemma 2.16 gelten in K. Neu zu beweisen sind vor allem die Aussagen über Teilfolgen und monotone Folgen, dazu Hilfsaussagen über die archimedische Eigenschaft und über Intervalle (Lemma 5.4, Lemma 5.6). Die entsprechenden Sätze aus Einheit 4 übertragen wir nicht, denn sie sind in $\mathbb{R}$ geführt und dürfen dort die archimedische Eigenschaft und die Supremumseigenschaft benutzen; gerade deren Rolle soll diese Einheit sichtbar machen.

5.1 Folgen in einem angeordneten Körper

Sei K ein angeordneter Körper. Wie in Einheit 2 schreiben wir n für $n \cdot 1$ und fassen $\mathbb{Q}$ nach Lemma 2.8 als Teilmenge von K auf; insbesondere ist $2 = 1 + 1 > 0$ und $\frac{1}{2}$ erklärt (Folgerung 2.5). Betrag, Dreiecksungleichung und Bernoullische Ungleichung gelten in K (Definition 2.6 und der Absatz danach).

Definition 5.1 (Erinnerung und Ergänzung). Konvergenz, Grenzwert, Beschränktheit und Cauchy-Folgen in K sind wie in Definition 2.14 erklärt. Zwei Begriffe aus Einheit 4 übertragen wir wörtlich auf Folgen (a_n) in K:

- (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \le a_{n+1}$ für alle n, *monoton fallend*, wenn $a_n \ge a_{n+1}$ für alle n, und *monoton*, wenn eines von beiden gilt.
- Ist $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (a_n).

Wie in Einheit 2 (Absatz nach Definition 2.14) durchläuft ε dabei alle positiven Elemente von K, nicht nur Zahlen der Form $\frac{1}{k}$. In einem archimedischen Körper ist das gleichgültig (Lemma 5.4), in einem nicht archimedischen nicht. Wie nach Definition 4.22 gilt für eine Teilfolge $n_k \ge k$ für alle k.

Lemma 5.2 (Grundregeln in K). Seien (a_n), (b_n) Folgen in K.

1. Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.
2. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
3. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

4. Konvergiert $a_n \to a$, so konvergiert jede Teilfolge gegen a.
5. Hat eine Cauchy-Folge eine Teilfolge mit Grenzwert a, so konvergiert die ganze Folge gegen a.
6. Gilt $a_n \le b_n$ für alle n und $a_n \to a$, $b_n \to b$, so ist $a \le b$.

Beweis. (1) ist Lemma 2.16 (1); (2) und (3) sind Lemma 2.15 (1) und (2).

(4) Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N$. Für $k \ge N$ ist $n_k \ge k \ge N$, also $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

(5) Sei $a_{n_k} \to a$ und $\varepsilon > 0$. Wähle N mit $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \ge N$ und dann $k \ge N$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; das geht, weil die Bedingung für alle hinreichend großen k gilt. Wegen $n_k \ge k \ge N$ ist für $n \ge N$

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

(6) Nach Lemma 2.16 (3), angewandt auf das Produkt der konstanten Folge (-1) mit (a_n) und dann auf die Summe mit (b_n), gilt $b_n - a_n \to b - a$. Wegen $b_n - a_n \ge 0$ für alle n folgt $b - a \ge 0$ aus Lemma 2.16 (4). □

Für konstantes (b_n) ist (6) Lemma 2.16 (4); wie dort darf man $\le$ nicht durch $<$ ersetzen. Neu gegenüber Einheit 2 sind (4) und (5); in $\mathbb{K}$ entsprechen ihnen Satz 4.24 (1) und Satz 4.30 (3).

Ab jetzt wird der Begriff aus Definition 2.12 für beliebige angeordnete Körper gebraucht; er ist der Angelpunkt dieser Einheit.

Definition 5.3 (Erinnerung). Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch*, wenn es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ gibt, das heißt, wenn $\mathbb{N}$ in K nicht nach oben beschränkt ist (Definition 2.12).

Lemma 5.4. Für einen angeordneten Körper K sind gleichwertig:

1. K ist archimedisch.
2. Zu je zwei Elementen $x > 0$ und y gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.
3. Die Folge $(\frac{1}{n})$ konvergiert in K gegen 0.

Ist K archimedisch, so gilt außerdem $q^n \to 0$ für jedes $q \in K$ mit $0 \le q < 1$, insbesondere $2^{-n} \to 0$.

Beweis. (1)⇒(2): Wähle $n > y/x$ und multipliziere mit $x > 0$ nach (O5). (2)⇒(3): Sei $\varepsilon > 0$. Nach (2) mit $x = \varepsilon$, $y = 1$ gibt es N mit $N\varepsilon > 1$, also $\frac{1}{N} < \varepsilon$ nach (O6); für $n \ge N$ ist $0 < \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon$. (3)⇒(1): Sei $x \in K$. Ist $x \le 0$, so leistet $n = 1$ das Verlangte. Sei $x > 0$. Zu $\varepsilon = \frac{1}{x}$ gibt es nach (3) ein n mit $\frac{1}{n} < \frac{1}{x}$, also $n > x$ nach (O6).

Zum Zusatz: Für $q = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $0 < q < 1$ setze $x = \frac{1}{q} - 1 > 0$. Nach der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.24, in K gültig nach dem Absatz nach Definition 2.6) ist $(1 + x)^n \geq 1 + nx > nx$, also $0 < q^n = \frac{1}{(1+x)^n} < \frac{1}{nx}$ nach (O6). Zu $\varepsilon > 0$ wähle nach (2) ein N mit $Nx\varepsilon > 1$; für $n \geq N$ ist dann $q^n < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{Nx} < \varepsilon$. □

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind archimedisch (Lemma 2.13, Satz 2.29). Ist K nicht archimedisch, so gibt es ein $t \in K$ mit $0 < t < \frac{1}{n}$ für alle n (Absatz nach Definition 2.14); dann ist $|\frac{1}{n} - 0| \geq t$ für alle n, und $(\frac{1}{n})$ ist keine Nullfolge. Einen solchen Körper gibt (G2) in Abschnitt 5.6 an.

5.2 Die vier Gestalten

Jede der vier Beobachtungen der Leitfrage verneint eine Eigenschaft, die $\mathbb{R}$ hat. Die *Supremumseigenschaft* verlangt, dass eine nach oben beschränkte Menge einen genauen oberen Rand hat (Satz 2.34). Die *Cauchy-Vollständigkeit* verlangt, dass eine Folge, deren Glieder sich immer enger zusammenziehen, ein Ziel hat (Satz 2.33). Die *Intervallschachtelungseigenschaft* verlangt, dass ineinander liegende, immer kürzere abgeschlossene Intervalle einen Punkt gemeinsam haben (Einheit 2, Aufgabe B5). Die *Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft* verlangt, dass eine beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge hat (Folgerung 4.27 zusammen mit Satz 4.34). Hinzu kommt als Zwischenglied die *Monotonieeigenschaft*, das Monotonieprinzip aus Satz 4.16. Für $\mathbb{R}$ sind alle fünf also schon bekannt oder werden hier nur noch zusammengesetzt. Neu ist die Frage, wie sie auseinander folgen und was man außer den Körper- und Anordnungsaxiomen dafür braucht.

Definition 5.5. Ein angeordneter Körper K hat

- die *Supremumseigenschaft* (S), wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von K ein Supremum in K besitzt (Definition 2.10);
- die *Intervallschachtelungseigenschaft* (I), wenn für jede Folge von Intervallen $[a_n, b_n] \subseteq K$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle n und $b_n - a_n \to 0$ ein $x \in K$ existiert, das in allen $[a_n, b_n]$ liegt;
- die *Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft* (BW), wenn jede beschränkte Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt;
- die *Cauchy-Vollständigkeit* (C), wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert;
- die *Monotonieeigenschaft* (M), wenn jede monotone, beschränkte Folge in K konvergiert.

Dabei ist $[a, b]$ das abgeschlossene Intervall in K aus Abschnitt 2.2. Eine Folge von Intervallen wie in (I), also mit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n \to 0$, heißt *Intervallschachtelung*.

Die vier Gestalten des Titels sind (S), (I), (BW) und (C). Die Eigenschaft (M) dient als

Zwischenglied, weil sie sich leicht aus (S) ergibt und leicht (BW) liefert. In (I) sind die Intervalle *abgeschlossen*, *beschränkt* und haben *gegen null gehende Länge*; was ohne jede dieser drei Bedingungen geschieht, zeigen (G3), (G4) und (G5).

Bemerkung (Supremum und Infimum). Schranken, Supremum und Infimum sind wie in Definition 2.10 erklärt. Nach Lemma 2.36 (1) ist eine obere Schranke s einer nichtleeren Menge A genau dann $\sup A$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $a > s - \varepsilon$ gibt. Hat K die Eigenschaft (S), so hat jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge A das Infimum $\inf A = -\sup(-A)$ mit $-A = \{-a : a \in A\}$; der Beweis von Folgerung 2.35 benutzt nur (O2) und die Existenz des Supremums und gilt deshalb wörtlich in K.

Lemma 5.6 (höchstens ein gemeinsamer Punkt). Ist $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung in K, so liegt höchstens ein Element von K in allen Intervallen. Liegt x in allen, so gilt $a_n \to x$ und $b_n \to x$.

Beweis. Liegen $x < y$ in allen Intervallen, so ist $b_n - a_n \geq y - x > 0$ für alle n, im Widerspruch zu $b_n - a_n \to 0$. Liegt x in allen, so ist $0 \leq x - a_n \leq b_n - a_n$ und $0 \leq b_n - x \leq b_n - a_n$; zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $b_n - a_n < \varepsilon$ für $n \geq N$, und dann sind $|a_n - x|$ und $|b_n - x|$ kleiner als ε. □

Lemma 5.7 (monotone Teilfolge). Jede Folge in K besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweisidee. Man nennt einen Index eine Aussichtsstelle, wenn kein späteres Folgenglied größer ist. Gibt es unendlich viele, so bilden sie eine fallende Teilfolge. Gibt es nur endlich viele, so findet man hinter der letzten zu jedem Glied ein späteres, größeres, und erhält eine wachsende Teilfolge.

Beweis. Ein Index n heißt *Aussichtsstelle*, wenn $a_m \leq a_n$ für alle $m > n$ gilt.

Fall 1: Es gibt unendlich viele Aussichtsstellen. Die Menge der Aussichtsstellen ist eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und wird wie im Beweis von Lemma 2.43 streng wachsend aufgezählt, $n_1 < n_2 < \ldots$. Wegen $n_{k+1} > n_k$ und weil n_k Aussichtsstelle ist, gilt $a_{n_{k+1}} \leq a_{n_k}$. Die Teilfolge ist monoton fallend.

Fall 2: Es gibt nur endlich viele Aussichtsstellen. Sei n_1 die kleinste natürliche Zahl, die größer als alle Aussichtsstellen ist. Ist $n_k \geq n_1$ gewählt, so ist n_k keine Aussichtsstelle; also gibt es $m > n_k$ mit $a_m > a_{n_k}$, und n_{k+1} sei das kleinste solche m (Satz 1.16). Dann ist $n_{k+1} > n_k \geq n_1$, und $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$. Die Teilfolge ist streng monoton wachsend. □

Der Beweis benutzt von K nur, dass $\leq$ eine totale Ordnung ist; das Lemma gilt in jeder total geordneten Menge. Aufgabe R6 führt die Konstruktion an Beispielen aus.

Beispiel ($\mathbb{Q}$). In $\mathbb{Q}$ gilt die Eigenschaft (I) nicht. Setze $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ und, mit $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$, falls $m_n^2 \geq 2$, und $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$ sonst; das ist die Halbierung der Leitfrage. Alle a_n, b_n sind rational, und durch Induktion gilt $a_n^2 < 2 \leq b_n^2$: Für $n = 1$ ist $1 < 2 \leq 4$, und die Regel ersetzt b_n nur durch ein m_n mit

$m_n^2 \geq 2$ und a_n nur durch ein m_n mit $m_n^2 < 2$. Ferner ist $1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 2$ und $b_n - a_n = 2^{1-n}$. Weil $\mathbb{Q}$ archimedisch ist (Lemma 2.13), gilt nach Lemma 5.4 und Lemma 2.16 (2) $b_n - a_n = 2 \cdot 2^{-n} \to 0$. Läge ein $x \in \mathbb{Q}$ in allen Intervallen, so wäre $a_n^2 \leq x^2 \leq b_n^2$ (Hilfsaussage in Abschnitt 2.2), und weil auch 2 in $[a_n^2, b_n^2]$ liegt,

$$|x^2 - 2| \leq b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) \leq 8 \cdot 2^{-n}$$

für alle n. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 5.4 ein n mit $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{8}$; also ist $|x^2 - 2| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, und damit $x^2 = 2$ (sonst wähle $\varepsilon = |x^2 - 2|$). Das widerspricht Satz 2.9. Dass in $\mathbb{Q}$ auch die übrigen vier Eigenschaften scheitern, zeigt (G1) in Abschnitt 5.6.

5.3 Von der Supremumseigenschaft zum Satz von Bolzano-Weierstraß

Satz 5.8 ((S) ⇒ (M)). Hat K die Supremumseigenschaft, so konvergiert jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge gegen das Supremum ihrer Glieder, und jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge gegen das Infimum ihrer Glieder.

Beweis. Sei (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, und sei $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke; es gibt also N mit $a_N > s - \varepsilon$. Für $n \geq N$ folgt $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$, also $|a_n - s| < \varepsilon$. Ist (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt, so wende man das Bewiesene auf $(-a_n)$ an und benutze $\inf A = -\sup(-A)$. □

Für $K = \mathbb{R}$ ist das Satz 4.16 (1) mit seinem Gegenstück für fallende Folgen.

Satz 5.9 ((M) ⇒ (BW)). Hat K die Monotonieeigenschaft, so hat jede beschränkte Folge in K eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Nach Lemma 5.7 hat die Folge eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt, nach (M) also konvergent. □

Beide Beweise benutzen die archimedische Eigenschaft nicht. Einheit 2 hat in der Bemerkung nach Folgerung 2.35 gezeigt, dass sie aus (S) folgt. Sie folgt sogar schon aus (BW):

Satz 5.10 ((BW) ⇒ archimedisch). Hat K die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft, so ist K archimedisch. Folglich ist jeder angeordnete Körper mit (S) oder mit (M) archimedisch.

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ ist in K nach oben beschränkt, etwa durch C. Dann ist die Folge $a_n = n$ beschränkt, denn $0 < n \leq C$. Nach (BW) hat sie eine konvergente Teilfolge (n_k); nach Lemma 5.2 (2) ist diese eine Cauchy-Folge. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es also k mit $|n_{k+1} - n_k| <$

$\frac{1}{2}$. Aber nach Lemma 2.8 ist $n_{k+1}\cdot 1 - n_k \cdot 1 = (n_{k+1} - n_k)\cdot 1$, und das ist nach Folgerung 2.5 mindestens 1. Widerspruch. Der Zusatz folgt aus den Sätzen 5.8 und 5.9. □

5.4 Vom Satz von Bolzano-Weierstraß zur Supremumseigenschaft

Satz 5.11 ((BW) ⇒ (C)). Hat K die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft, so konvergiert jede Cauchy-Folge in K.

Beweis. Eine Cauchy-Folge ist beschränkt (Lemma 5.2 (3)), hat nach (BW) eine konvergente Teilfolge und konvergiert deshalb nach Lemma 5.2 (5) selbst. □

Satz 5.12 ((C) ⇒ (I)). Ist K Cauchy-vollständig, so hat jede Intervallschachtelung in K genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich $\lim a_n = \lim b_n$.

Beweis. Sei $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung. Für $m \geq n$ ist $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$, also $0 \leq a_m - a_n \leq b_n - a_n$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle N mit $b_n - a_n < \varepsilon$ für $n \geq N$; für $m \geq n \geq N$ ist dann $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge und konvergiert nach (C) gegen ein $x \in K$. Für festes n gilt $a_n \leq a_m \leq b_n$ für alle $m \geq n$; Lemma 2.16 (4) mit $N_0 = n$ liefert $a_n \leq x \leq b_n$. Also liegt x in allen Intervallen, und nach Lemma 5.6 ist es der einzige solche Punkt und zugleich der Grenzwert von (b_n). □

Bis hierher ist die archimedische Eigenschaft nicht benutzt worden. Im letzten Schritt wird sie gebraucht.

Satz 5.13 ((I) und archimedisch ⇒ (S)). Ist K archimedisch und hat die Intervallschachtelungseigenschaft, so hat K die Supremumseigenschaft.

Beweisidee. Man halbiert ein Intervall, dessen rechter Endpunkt eine obere Schranke ist und dessen linker es nicht ist, und behält immer die Hälfte mit derselben Eigenschaft. Der gemeinsame Punkt aller Intervalle ist das Supremum. Dass die Längen gegen null gehen, ist die Aussage $2^{-n} \to 0$, und für sie wird die archimedische Eigenschaft gebraucht. Es ist der Beweis von Satz 2.34; dort lieferte die Cauchy-Vollständigkeit den gemeinsamen Punkt, hier liefert ihn (I).

Beweis. Sei $A \subseteq K$ nicht leer und nach oben beschränkt. Wähle $x_0 \in A$ und eine obere Schranke b_1 von A, und setze $a_1 = x_0 - 1$. Rekursiv sei $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m_n], & \text{falls } m_n \text{ obere Schranke von } A \text{ ist,} \\ [m_n, b_n], & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Fallunterscheidung ist eindeutig, die Folge nach dem Rekursionssatz wohldefiniert. Für alle n gilt

$$(*) \qquad b_n \text{ ist obere Schranke von } A, \quad a_n \text{ ist keine obere Schranke von } A,$$

denn für $n = 1$ ist $x_0 > a_1$, und die Fallunterscheidung erhält beide Eigenschaften. Aus $(*)$ folgt $a_n < b_n$: Da a_n keine obere Schranke ist, gibt es $y \in A$ mit $a_n < y \le b_n$. Also ist $a_n < m_n < b_n$, daher $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$ und $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, also

$$b_n - a_n = 2^{1-n}(b_1 - a_1) = 2(b_1 - a_1)\,2^{-n}.$$

Weil K archimedisch ist, gilt $2^{-n} \to 0$ nach Lemma 5.4, nach Lemma 2.16 (2) mit dem konstanten Faktor $2(b_1 - a_1)$ also $b_n - a_n \to 0$. Nach (I) gibt es ein s in allen Intervallen.

s ist obere Schranke: Angenommen, es gibt $y \in A$ mit $y > s$. Wähle n mit $b_n - a_n < y - s$. Wegen $a_n \le s$ folgt $b_n < a_n + (y - s) \le y$, und b_n wäre keine obere Schranke, im Widerspruch zu $(*)$.

s ist die kleinste obere Schranke: Sei $t < s$. Wähle n mit $b_n - a_n < s - t$. Dann ist $a_n > b_n - (s - t) \ge s - (s - t) = t$. Weil a_n keine obere Schranke ist, gibt es $y \in A$ mit $y > a_n > t$; also ist auch t keine obere Schranke. □

Satz 5.14 (Hauptsatz: Gleichwertigkeit der Vollständigkeitsformen). Für einen angeordneten Körper K sind gleichwertig:

1. K hat die Supremumseigenschaft (S).
2. K hat die Monotonieeigenschaft (M).
3. K hat die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft (BW).
4. K ist archimedisch und Cauchy-vollständig (C).
5. K ist archimedisch und hat die Intervallschachtelungseigenschaft (I).

Insbesondere sind für einen archimedisch angeordneten Körper die vier Eigenschaften (S), (I), (BW) und (C) gleichwertig.

Beweis. (1)⇒(2) ist Satz 5.8, (2)⇒(3) ist Satz 5.9. (3)⇒(4): Archimedisch nach Satz 5.10, Cauchy-vollständig nach Satz 5.11. (4)⇒(5) nach Satz 5.12. (5)⇒(1) ist Satz 5.13. □

Bemerkung (die Rolle der archimedischen Eigenschaft). Der Ringschluss benutzt die archimedische Eigenschaft an genau einer Stelle: im Beweis von Satz 5.13, für $b_n - a_n \to 0$. Alle anderen Schritte gelten in jedem angeordneten Körper. Die Eigenschaften (S), (M) und (BW) enthalten die archimedische Eigenschaft bereits (Satz 5.10), die Eigenschaften (C) und (I) nicht. Dass das kein Mangel des Beweises ist, zeigt (G2): Es gibt einen nicht archimedischen angeordneten Körper, der Cauchy-vollständig ist und damit nach Satz 5.12 auch (I) hat, in dem aber (S), (M) und (BW) falsch sind. Die Formulierung „$\mathbb{R}$ ist ein vollständiger angeordneter Körper“ ist deshalb nur dann eindeutig, wenn man sagt, welche Vollständigkeit gemeint ist: Mit (S) genügt sie allein, mit (C) braucht sie den Zusatz „archimedisch“.

Zur Übersicht die Körper dieser Einheit:

Körper	archimedisch	(S)	(M)	(BW)	(C)	(I)
$\mathbb{Q}$	ja	nein	nein	nein	nein	nein
$\mathbb{R}$	ja	ja	ja	ja	ja	ja
$\mathbb{R}((t))$	nein	nein	nein	nein	ja	ja

Für $\mathbb{Q}$ siehe (G1), für $\mathbb{R}$ Folgerung 5.15, für $\mathbb{R}((t))$ Satz 5.10, Satz 5.12 und (G2). In $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung; dort haben nur (C) und (BW) einen Sinn, und beide gelten (Satz 5.21). Die Richtung (C) $\Rightarrow$ (I) gilt in jedem angeordneten Körper (Satz 5.12); ob umgekehrt (I) ohne archimedische Eigenschaft schon (C) liefert, wird hier nicht untersucht.

Zurück zur Leitfrage. Die vier Beobachtungen über die Halbierung von $[1, 2]$ hängen nach Satz 5.14 zusammen. Weil $\mathbb{Q}$ archimedisch ist, genügt es, eine von ihnen nachzurechnen: Das Beispiel am Ende von Abschnitt 5.2 zeigt, dass (I) in $\mathbb{Q}$ scheitert, und damit scheitern (S), (M), (BW) und (C) ebenfalls. (G1) rechnet die vier Beobachtungen der Leitfrage an den dort genannten Objekten einzeln nach. Ohne die archimedische Eigenschaft trennen sich die Gestalten genau an der Stelle, die die Bemerkung nennt: (C) und (I) können gelten, während (S), (M) und (BW) scheitern.

Folgerung 5.15 (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). In $\mathbb{R}$ gelten alle fünf Eigenschaften. Ausgeschrieben:

1. *Satz von Bolzano-Weierstraß:* Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.
2. *Cauchy-Kriterium:* Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
3. *Intervallschachtelungsprinzip:* Jede Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ hat genau einen gemeinsamen Punkt.

Beweis. $\mathbb{R}$ hat die Supremumseigenschaft (Satz 2.34); Satz 5.14 liefert den Rest. Die Richtung „konvergent $\Rightarrow$ Cauchy-Folge“ in (2) ist Lemma 5.2 (2), die Eindeutigkeit in (3) Lemma 5.6. □

Das Cauchy-Kriterium (2) stand schon als Satz 4.31 zur Verfügung, und die Einheiten 2 und 4 sind bereits Stücke des Ringschlusses gegangen. Einheit 2 hat für $\mathbb{R}$ zuerst (C) bewiesen (Satz 2.33) und daraus (S) gewonnen (Satz 2.34). Jener Beweis halbiert Intervalle, benutzt die archimedische Eigenschaft, damit die Längen gegen null gehen, und nimmt den gemeinsamen Grenzwert der Endpunkte; er ist der Weg (C) $\Rightarrow$ (I) $\Rightarrow$ (S) der Sätze 5.12 und 5.13, in einem Zug geführt. Umgekehrt hat Satz 4.31 in seinem zweiten Beweis aus (S) über den Limes superior wieder (C) gewonnen.

Bemerkung (Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$). Nach Satz 2.41 ist jeder archimedisch angeordnete, Cauchy-vollständige Körper auf genau eine Weise zu $\mathbb{R}$ isomorph. Nach Satz 5.14 sind

das genau die angeordneten Körper mit (S), mit (M) oder mit (BW), ebenso die archimedischen mit (I); für (S) führt das der Absatz nach Satz 2.41 aus. Welche der Gestalten man als Axiom an den Anfang stellt, ist deshalb für alles Weitere gleichgültig, ebenso, ob man $\mathbb{R}$ wie in Einheit 2 aus Cauchy-Folgen oder auf einem anderen Weg konstruiert, etwa über Dedekindsche Schnitte (diese Konstruktion wird hier nicht ausgeführt; Aufgabe V2 zeigt, dass die Schnitteigenschaft zu (S) gleichwertig ist). Ohne die archimedische Eigenschaft gilt das nicht: Der Körper aus (G2) ist Cauchy-vollständig, aber nicht zu $\mathbb{R}$ isomorph, denn ein Isomorphismus angeordneter Körper überträgt die archimedische Eigenschaft.

5.5 Häufungswerte und zwei weitere Beweise des Satzes von Bolzano-Weierstraß

Von nun an ist der Grundkörper $\mathbb{R}$ oder, wo gesagt, $\mathbb{C}$; wie in Einheit 4 steht $\mathbb{K}$ für einen von beiden. Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist bisher über die monotone Teilfolge bewiesen (Lemma 5.7 und Satz 5.9). Dieser Abschnitt stellt zwei weitere Wege daneben, jeden von einer anderen Gestalt der Vollständigkeit aus. Dafür brauchen wir Häufungswerte aus Einheit 4.

Definition 5.16 (Erinnerung). Wie in Definition 4.23 heißt $h \in \mathbb{K}$ *Häufungswert* der Folge (a_n) in $\mathbb{K}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem N ein $n \geq N$ mit $|a_n - h| < \varepsilon$ gibt, wenn also $|a_n - h| < \varepsilon$ für unendlich viele n gilt.

Ein Häufungswert der Folge ist etwas anderes als ein Häufungspunkt der Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$: Die konstante Folge $a_n = 1$ hat den Häufungswert 1, ihre Wertemenge $\{1\}$ hat keinen Häufungspunkt (Definition 7.1; Vorgriff).

Satz 4.24 (2) hat gezeigt, dass der Grenzwert einer Teilfolge ein Häufungswert ist. Das folgende Lemma liefert die Umkehrung. Sie steht in Einheit 4 als Satz 4.34; der Beweis steht hier noch einmal, weil an ihr hängt, dass aus „jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert“ die Aussage „jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge“ wird.

Lemma 5.17. h ist genau dann Häufungswert der Folge (a_n) in $\mathbb{K}$, wenn eine Teilfolge von (a_n) gegen h konvergiert.

Beweis. Ist h Grenzwert einer Teilfolge, so ist h nach Satz 4.24 (2) ein Häufungswert. Sei umgekehrt h ein Häufungswert. Sei n_1 der kleinste Index mit $|a_{n_1} - h| < 1$ und, wenn n_k gewählt ist, n_{k+1} der kleinste Index $n > n_k$ mit $|a_n - h| < \frac{1}{k+1}$; beide existieren nach Definition 5.16 und Satz 1.16. Dann ist $|a_{n_k} - h| < \frac{1}{k}$, und wegen $\frac{1}{k} \to 0$ (Lemma 5.4 und Satz 2.29) folgt $a_{n_k} \to h$ nach Satz 4.8 (1). □

Der zweite Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß geht von der Intervallschachte-

lung aus.

Satz 5.18 (Bolzano-Weierstraß durch Intervallhalbierung). Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungswert.

Beweis. Sei $|a_n| \le C$ für alle n. Setze $[\alpha_1, \beta_1] = [-C, C]$; dieses Intervall enthält a_n für unendlich viele n, nämlich für alle. Enthält $[\alpha_k, \beta_k]$ die Glieder a_n für unendlich viele n, so sei $\mu_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$. Mindestens eine der Hälften $[\alpha_k, \mu_k]$, $[\mu_k, \beta_k]$ enthält a_n für unendlich viele n, denn sonst enthielte $[\alpha_k, \beta_k]$ nur endlich viele. Man nimmt die linke, wenn sie diese Eigenschaft hat, sonst die rechte. Es entsteht eine Intervallschachtelung mit $\beta_k - \alpha_k = 2^{1-k} \cdot 2C \to 0$ (Lemma 5.4, Lemma 2.16 (2)), deren Intervalle jeweils unendlich viele Folgenglieder enthalten. Nach Folgerung 5.15 gibt es h in allen Intervallen. Zu $\varepsilon > 0$ wähle k mit $\beta_k - \alpha_k < \varepsilon$; dann ist $[\alpha_k, \beta_k] \subseteq (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$, und für unendlich viele n gilt $|a_n - h| < \varepsilon$. □

Mit Lemma 5.17 hat die Folge also eine konvergente Teilfolge. Dieser Beweis zeigt (I) ⇒ (BW) in $\mathbb{R}$ direkt und benutzt die archimedische Eigenschaft wieder bei $2^{1-k} \to 0$. Der Satz trägt die Namen von Bernard Bolzano und Karl Weierstraß. Das Halbierungsverfahren begegnet in Einheit 7 noch einmal, beim Nullstellensatz von Bolzano (Satz 7.15).

Der dritte Beweis steht schon in Einheit 4: Nach Folgerung 4.27 ist $\limsup a_n$ ein Häufungswert jeder beschränkten reellen Folge, nach Lemma 5.17 also Grenzwert einer Teilfolge. Dieser Weg benutzt (S) für die Suprema $\sigma_n = \sup\{a_k : k \ge n\}$ und (M) für ihre Konvergenz (Definition 4.25), und er sagt zusätzlich, welcher Häufungswert gefunden wird. In der Sprache der Teilfolgen lautet Folgerung 4.27 so.

Satz 5.19 (Limes superior als größter Teilfolgengrenzwert). Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Es gibt eine Teilfolge, die gegen $\limsup a_n$ konvergiert, und eine, die gegen $\liminf a_n$ konvergiert. Für jede konvergente Teilfolge (a_{n_k}) gilt

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Insbesondere ist $\limsup a_n$ der größte und $\liminf a_n$ der kleinste Häufungswert.

Beweis. Nach Folgerung 4.27 sind $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ Häufungswerte, nach Lemma 5.17 also Grenzwerte von Teilfolgen. Der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge ist nach Satz 4.24 (2) ein Häufungswert und liegt nach Folgerung 4.27 zwischen $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$. Die letzte Aussage ist Folgerung 4.27 selbst. □

Zwischenbilanz. Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist jetzt auf drei Wegen bewiesen, und jeder geht von einer anderen Gestalt der Vollständigkeit aus. Der erste (Lemma 5.7 und Satz 5.9) sucht eine monotone Teilfolge und braucht (M). Der zweite (Satz 5.18) fängt unendlich viele Glieder in immer kürzeren Intervallen und braucht (I) und die archimedische Eigenschaft. Der dritte (Folgerung 4.27 mit Lemma 5.17, zusammengefasst

in Satz 5.19) nimmt den Limes superior und braucht (S) und (M). Der erste Beweis ist der kürzeste, der zweite arbeitet allein mit Intervallen, und der dritte sagt, welcher Häufungswert gefunden wird.

Folgerung 5.20. Eine beschränkte reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie genau einen Häufungswert hat, und genau dann, wenn $\limsup a_n = \liminf a_n$ gilt. In diesem Fall ist der Grenzwert dieser Häufungswert.

Beweis. Konvergiert $a_n \to a$, so ist a nach Satz 4.24 (3) der einzige Häufungswert. Habe umgekehrt (a_n) genau einen Häufungswert h, und angenommen, (a_n) konvergiert nicht gegen h. Nach Regel 1.3 gibt es $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem N ein $n \geq N$ mit $|a_n - h| \geq \varepsilon$ existiert. Sei n_1 der kleinste solche Index und n_{k+1} der kleinste Index $n > n_k$ mit $|a_n - h| \geq \varepsilon$. Die Teilfolge (a_{n_k}) ist beschränkt und hat nach Folgerung 5.15 eine konvergente Teilfolge $a_{n_{k_j}} \to h'$. Diese ist auch eine Teilfolge von (a_n); nach Satz 4.24 (2) ist h' ein Häufungswert von (a_n). Nach Lemma 2.16 (3) und (5) gilt $|a_{n_{k_j}} - h| \to |h' - h|$, und aus $|a_{n_{k_j}} - h| \geq \varepsilon$ für alle j folgt mit Lemma 5.2 (6) $|h' - h| \geq \varepsilon$. Also ist $h' \neq h$, ein Widerspruch. Die zweite Gleichwertigkeit ist Satz 4.28. □

Die Voraussetzung „beschränkt“ ist nötig; siehe (G8). Neu gegenüber Einheit 4 ist die erste Gleichwertigkeit. Ihr Beweis benutzt die Anordnung nur über die reelle Folge $(|a_{n_{k_j}} - h|)$ und den Satz von Bolzano-Weierstraß; Aufgabe B2 überträgt sie mit Satz 5.21 auf beschränkte komplexe Folgen, für die Limes superior und Limes inferior keinen Sinn haben.

In $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung (Satz 3.16), also weder Supremum noch Intervalle noch monotone Folgen. Zwei Gestalten der Vollständigkeit sprechen aber nur über Abstände und haben deshalb auch in $\mathbb{C}$ einen Sinn: das Cauchy-Kriterium und der Satz von Bolzano-Weierstraß. Das Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$ kennen wir aus Satz 4.31; neu ist Bolzano-Weierstraß. Gebraucht wird beides unter anderem für komplexe Reihen in Einheit 6.

Satz 5.21 (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$). Eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Konvergenz, Cauchy-Folgen und Beschränktheit in $\mathbb{C}$ sind wie in Einheit 4 erklärt (Definition 4.2, Definition 4.6, Definition 4.29), mit dem komplexen Betrag und reellem $\varepsilon > 0$.

Beweis. Die erste Aussage ist Satz 4.31. Ihr Beweis dort benutzt dasselbe wie der folgende: Für $z = x + iy$ ist $|x| \leq |z|$ und $|y| \leq |z|$ (Satz 3.9 (3)), und eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren (Satz 4.5).

Sei (z_n) beschränkt und $z_n = x_n + iy_n$. Nach Satz 3.9 (3) sind (x_n) und (y_n) beschränkt. Nach Folgerung 5.15 gibt es eine Teilfolge mit $x_{n_k} \to x$. Die Folge (y_{n_k}) ist beschränkt

und hat ihrerseits eine Teilfolge $y_{n_{k_j}} \to y$; dabei gilt auch $x_{n_{k_j}} \to x$ (Satz 4.24 (1)). Nach Satz 4.5 konvergiert $z_{n_{k_j}} \to x + iy$. □

5.6 Gegenbeispiele

(G1) $\mathbb{Q}$: archimedisch, aber in keiner Gestalt vollständig. $\mathbb{Q}$ ist archimedisch (Lemma 2.13), und (I) scheitert nach dem Beispiel am Ende von Abschnitt 5.2. Die vier Beobachtungen der Leitfrage im Einzelnen: Die linken Endpunkte a_n der dortigen Halbierung bilden eine monoton wachsende, beschränkte Folge in $\mathbb{Q}$. Sie ist eine Cauchy-Folge, denn für $m \geq n$ ist $0 \leq a_m - a_n \leq b_n - a_n = 2^{1-n}$. Sie hat keine in $\mathbb{Q}$ konvergente Teilfolge und damit auch keinen Grenzwert in $\mathbb{Q}$: Konvergierte eine Teilfolge gegen $x \in \mathbb{Q}$, so nach Lemma 5.2 (5) die ganze Folge, und wegen $a_n \leq a_m \leq b_n$ für $m \geq n$ läge x nach Lemma 2.16 (4) in allen Intervallen $[a_n, b_n]$, im Widerspruch zum Beispiel. Diese eine Folge widerlegt also (C), (M) und (BW). Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}$ hat dieselben oberen Schranken wie die Menge $A = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0, \ x^2 < 2\}$ aus Satz 2.11, denn jedes ihrer Elemente mit $x < 0$ liegt unter $0 \in A$; nach Satz 2.11 hat sie deshalb in $\mathbb{Q}$ kein Supremum, und (S) scheitert. Die archimedische Eigenschaft allein macht also nichts vollständig.

(G2) Ein Cauchy-vollständiger Körper ohne archimedische Eigenschaft. Sei $K = \mathbb{R}((t))$ die Menge der formalen Laurentreihen

$$x = \sum_{k \geq k_0} c_k t^k, \qquad k_0 \in \mathbb{Z}, \ c_k \in \mathbb{R},$$

also der Folgen $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ reeller Zahlen, bei denen nur endlich viele c_k mit negativem k von null verschieden sind. Addition ist gliedweise erklärt, Multiplikation durch $\big(\sum c_k t^k\big)\big(\sum d_k t^k\big) = \sum_k \big(\sum_{i+j=k} c_i d_j\big) t^k$, wobei die innere Summe endlich ist. *Ohne Beweis* benutzen wir, dass K damit ein Körper ist; das ist eine Aufgabe der Algebra. Für $x \neq 0$ sei $v(x)$ der kleinste Index k mit $c_k \neq 0$ und $c_{v(x)}$ der *Leitkoeffizient*. Man nennt x *positiv*, wenn der Leitkoeffizient positiv ist.

Anordnung. Für $x \neq 0$ ist genau eines von x, $-x$ positiv. Sind x, y positiv, so auch xy, denn $v(xy) = v(x) + v(y)$ mit dem Leitkoeffizienten $c_{v(x)} d_{v(y)} > 0$; und $x + y$, denn sein Leitkoeffizient ist der von x oder von y oder, bei $v(x) = v(y)$, deren Summe. Mit „$x < y$, wenn $y - x$ positiv ist“ wird K ein angeordneter Körper; die reellen Zahlen sind die Reihen $c_0 t^0$ und behalten ihre Anordnung.

Nicht archimedisch. Das Element t ist positiv, und $\frac{1}{n} - t$ hat den Leitkoeffizienten $\frac{1}{n} > 0$ bei t^0. Also ist $0 < t < \frac{1}{n}$ für alle n; gleichwertig ist $t^{-1} > n$ für alle n, und $\mathbb{N}$ ist in K beschränkt. Nach Satz 5.10 hat K also weder (S) noch (M) noch (BW). Konkret: Die Folge $a_n = n$ ist beschränkt und monoton; sie konvergiert nicht, denn wegen $|a_{n+1} - a_n| = 1$ ist sie keine Cauchy-Folge (Lemma 5.2 (2)). Die beschränkte Menge $\mathbb{N}$ hat kein Supremum (Bemerkung nach Folgerung 2.35).

Man sieht hier, woran der Beweis von Satz 5.13 scheitert. Für $A = \mathbb{N}$ wähle man $x_0 = 1$, also $a_1 = 0$, und die obere Schranke $b_1 = t^{-1}$. Der Mittelpunkt $\frac{1}{2}t^{-1}$ ist wieder eine obere Schranke, denn $\frac{1}{2}t^{-1} - n$ hat den Leitkoeffizienten $\frac{1}{2} > 0$ bei t^{-1}; ebenso jeder weitere Mittelpunkt $2^{-n}t^{-1}$. Das Verfahren behält also immer die linke Hälfte, und es entstehen die Intervalle $[0,\ 2^{1-n}t^{-1}]$. Ihre Längen $2^{1-n}t^{-1}$ sind alle größer als 1, denn $2^{1-n}t^{-1} - 1$ hat den Leitkoeffizienten $2^{1-n} > 0$ bei t^{-1}, und gehen nicht gegen null: Die Folge (2^{-n}) ist in K keine Nullfolge, denn 2^n ist eine natürliche Zahl und deshalb $2^{-n} > t$ für alle n. Die Intervalle schrumpfen, ohne sich zusammenzuziehen, und (I) ist auf sie nicht anwendbar.

Cauchy-vollständig. Beweisidee. „Klein“ heißt in K, dass die ersten Koeffizienten verschwinden: Aus $|x| < t^m$ folgt, dass alle Koeffizienten unterhalb von t^m null sind, und umgekehrt genügt dafür, dass alle Koeffizienten bis einschließlich t^m null sind. Eine Cauchy-Folge hält deshalb ihre Koeffizienten einen nach dem anderen fest, und der Grenzwert ist die Reihe aus den festgehaltenen Koeffizienten. Die Toleranzen t^m statt $\frac{1}{n}$ sind der Grund, warum das ohne archimedische Eigenschaft gelingt.

Zunächst drei Beobachtungen über ε-Umgebungen. (a) Ist $x = 0$ oder $v(x) > m$, so gilt $|x| < t^m$, denn $t^m - |x|$ hat den Leitkoeffizienten 1 bei t^m. (b) Ist $x \neq 0$ und $|x| < t^m$, so ist $v(x) \geq m$, denn bei $v(x) < m$ hätte $|x| - t^m$ den positiven Leitkoeffizienten $|c_{v(x)}|$. (c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{Z}$ mit $t^m < \varepsilon$: Mit $m = v(\varepsilon) + 1$ hat $\varepsilon - t^m$ den Leitkoeffizienten von ε.

Sei nun (x_n) eine Cauchy-Folge in K und $c_k(x)$ der k-te Koeffizient von x. Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ gibt es nach der Cauchy-Bedingung mit $\varepsilon = t^{m+1} > 0$ ein N mit $|x_p - x_q| < t^{m+1}$ für $p, q \geq N$; sei N_m das kleinste solche N (Satz 1.16), so dass keine Auswahl nötig ist. Für $p, q \geq N_m$ ist nach (b) also $x_p = x_q$ oder $v(x_p - x_q) \geq m + 1$. In beiden Fällen stimmen die Koeffizienten $c_k(x_p)$ mit $k \leq m$ für alle $p \geq N_m$ überein. Es ist $N_0 \leq N_1 \leq \dots$, denn wegen $t^{m+1} - t^{m+2} = t^{m+1}(1-t) > 0$ erfüllt jedes N, das die Bedingung zu $m+1$ erfüllt, auch die zu m. Für $k \leq m$ sei c_k der gemeinsame Wert der $c_k(x_p)$, $p \geq N_m$; er hängt nicht von der Wahl von $m \geq k$ ab, und für $k < 0$ ist $c_k = c_k(x_{N_0})$, also nur für endlich viele negative k von null verschieden. Damit ist $x = \sum c_k t^k$ ein Element von K. Für $p \geq N_m$ stimmen x_p und x in allen Koeffizienten mit $k \leq m$ überein, also ist $x_p = x$ oder $v(x_p - x) > m$, nach (a) somit $|x_p - x| < t^m$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle m mit $t^m < \varepsilon$ (nach (c); ohne Einschränkung $m \geq 0$, denn für ganze Zahlen $m' \geq m$ ist $t^m - t^{m'} = t^m(1 - t^{m'-m}) \geq 0$); dann ist $|x_p - x| < \varepsilon$ für $p \geq N_m$. Also konvergiert $x_p \to x$.

Bis auf die Körperaxiome ist damit bewiesen: K ist Cauchy-vollständig, hat nach Satz 5.12 auch (I), ist aber nicht archimedisch und hat nicht (S). Die Voraussetzung „archimedisch“ in Satz 5.13 und in den Teilen (4) und (5) von Satz 5.14 kann nicht entfallen. Bemerkenswert ist auch, was eine Intervallschachtelung in K verlangt: Die Intervalle $[0, \frac{1}{n}]$ sind geschachtelt und haben die gemeinsamen Punkte 0, t, t^2, ..., aber ihre Längen gehen *nicht* gegen null, denn $\frac{1}{n} > t$ für alle n. Die Bedingung $b_n - a_n \to 0$

ist in K viel schärfer als in $\mathbb{R}$. Aufgabe V4 setzt die Untersuchung von K fort.

(G3) Offene Intervalle. In $\mathbb{R}$ sind die Intervalle $(0, \frac{1}{n})$ geschachtelt, und ihre Längen gehen gegen null; ihr Durchschnitt ist leer (Einheit 1, Abschnitt 1.4, mit Satz 2.29). Im Beweis von Satz 5.12 liegt der Grenzwert 0 der linken Endpunkte nicht in den Intervallen.

(G4) Unbeschränkte Intervalle. Die Mengen $[n, \infty)$ sind abgeschlossen und geschachtelt, haben aber leeren Durchschnitt, denn zu jedem x gibt es $n > x$. Sie sind keine Intervalle $[a_n, b_n]$ im Sinn von (I).

(G5) Längen, die nicht gegen null gehen. Für $[a_n, b_n] = [-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$ ist der Durchschnitt das Intervall $[0, 1]$. Die Existenz eines gemeinsamen Punktes bleibt in $\mathbb{R}$ richtig (Aufgabe V1), die Eindeutigkeit aus Lemma 5.6 nicht.

(G6) Unbeschränkte Folgen. Die Folge $a_n = n$ hat keine konvergente Teilfolge: Jede Teilfolge ist wegen $n_k \geq k$ unbeschränkt, nach Lemma 5.2 (2) und (3) also nicht konvergent. Bolzano-Weierstraß braucht die Beschränktheit.

(G7) Kleine Schritte sind keine Cauchy-Bedingung. Das Beispiel $a_n = \sqrt{n}$ steht in Einheit 4 unter (G6); Aufgabe B3 (b) gibt ein zweites mit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Die Cauchy-Bedingung verlangt $|a_m - a_n| < \varepsilon$ für *alle* $m, n \geq N$, nicht nur für benachbarte Indizes.

(G8) Ein Häufungswert genügt ohne Beschränktheit nicht. Sei $a_n = n$, wenn n eine Zweierpotenz 2^k mit $k \in \mathbb{N}_0$ ist, und $a_n = 0$ sonst; die Folge beginnt mit $1, 2, 0, 4, 0, 0, 0, 8, 0, \ldots$ Für jedes ungerade $n \geq 3$ ist $a_n = 0$, also ist 0 ein Häufungswert. Sei $h \neq 0$ und $\delta = \frac{|h|}{2}$. Die Glieder 0 haben von h den Abstand $|h| > \delta$. Aus $|2^k - h| < \delta$ folgt $2^k < |h| + \delta = \frac{3}{2}|h|$, wegen $2^k \geq 1 + k$ (Satz 1.24 mit $x = 1$) also $k < \frac{3}{2}|h|$; das trifft nur für endlich viele $k \in \mathbb{N}_0$ zu. Also gilt $|a_n - h| < \delta$ nur für endlich viele n; h ist kein Häufungswert, und 0 ist der einzige. Trotzdem konvergiert die Folge nicht: Wegen $a_{2^k} = 2^k \geq 1 + k$ ist sie unbeschränkt (Satz 2.29), nach Lemma 5.2 (2) und (3) also nicht konvergent. Im Beweis von Folgerung 5.20 fehlt dann die Beschränktheit der Teilfolge (a_{n_k}): Mit $h = 0$ und $\varepsilon = 1$ sind die Indizes n_k gerade die Zweierpotenzen, $n_k = 2^{k-1}$ und $a_{n_k} = 2^{k-1}$.

5.7 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 ($\sqrt{2}$ als Supremum). Sei $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 < 2\}$. Wir führen den Beweis von Satz 5.13 für A aus, mit $b_1 = 2$ (obere Schranke, denn aus $x > 2$ folgt $x^2 > 4$) und, abweichend von der Wahl $a_1 = x_0 - 1$ im Beweis, mit $a_1 = 1$; das ist ebenfalls keine obere Schranke, da $1{,}25 \in A$. In jedem Schritt ist der Mittelpunkt $m > 0$ genau dann obere Schranke von A, wenn $m^2 \geq 2$ ist. Ist nämlich $m^2 \geq 2$, so folgt aus $x > m$, dass $x^2 > m^2 \geq 2$. Ist $m^2 < 2$, so liegt mit $\delta = \min\{1, \frac{2-m^2}{2(2m+1)}\}$ auch $m + \delta$ in A, denn $(m+\delta)^2 \leq m^2 + \delta(2m+1) < 2$; also ist m keine obere Schranke.

n	a_n	b_n	m_n	m_n^2
1	1	2	1,5	2,25
2	1	1,5	1,25	1,5625
3	1,25	1,5	1,375	1,890625
4	1,375	1,5	1,4375	2,06640625
5	1,375	1,4375	1,40625	1,9775390625
6	1,40625	1,4375	1,421875	2,021728515625

Es folgt $[a_7, b_7] = [1{,}40625;\ 1{,}421875]$. Der gemeinsame Punkt s ist $\sup A$. Er erfüllt $s^2 = 2$: Aus $a_n \leq s \leq b_n$ und $a_n^2 < 2 \leq b_n^2$ folgt $|s^2 - 2| \leq b_n^2 - a_n^2 \leq 4(b_n - a_n) \to 0$. Das ist ein zweiter Existenzbeweis für $\sqrt{2}$ neben Satz 2.39; mit x^3 statt x^2 führt Aufgabe R1 ihn für $\sqrt[3]{3}$ aus.

Für die Cauchy-Folgen-Konstruktion aus Einheit 2 ist die Folge (a_n) ein Repräsentant von $\sqrt{2}$: Sie ist eine rationale Cauchy-Folge, und ihre Klasse ist die reelle Zahl, gegen die sie in $\mathbb{R}$ konvergiert (Lemma 2.32).

Beispiel 2 (Konvergenz ohne bekannten Grenzwert). Das Cauchy-Kriterium beweist Konvergenz, bevor man den Grenzwert kennt. Ein häufiges Werkzeug dafür ist das folgende Lemma.

Lemma 5.22 (kontrahierende Folgen). Sei (a_n) eine reelle oder komplexe Folge, und es gebe q mit $0 \leq q < 1$ und

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q\,|a_{n+1} - a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist (a_n) eine Cauchy-Folge, also konvergent, und für ihren Grenzwert a gilt mit $d = |a_2 - a_1|$

$$|a - a_n| \leq \frac{d\,q^{n-1}}{1-q} \quad \text{für alle } n.$$

Beweis. Durch Induktion ist $|a_{k+1} - a_k| \leq q^{k-1}d$. Für $m > n$ folgt mit der Dreiecksungleichung für endliche Summen (Folgerung 3.24, für reelle Glieder ebenso Einheit 1,

Aufgabe B8 (a)) und der geometrischen Summe (Satz 1.13)

$$|a_m - a_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \le d \sum_{k=n}^{m-1} q^{k-1} = d\,q^{n-1}\,\frac{1-q^{m-n}}{1-q} \le \frac{d\,q^{n-1}}{1-q}.$$

Wegen $q^{n-1} \to 0$ (Lemma 5.4) und Lemma 2.16 (2) ist (a_n) eine Cauchy-Folge; nach Folgerung 5.15 beziehungsweise Satz 5.21 konvergiert sie. Lässt man in der Abschätzung $m \to \infty$ gehen, so liefert Lemma 2.16 (4) mit $N_0 = n+1$ die Fehlerschranke, denn $|a_m - a_n| \to |a - a_n|$ nach der Dreiecksungleichung (Satz 1.23 beziehungsweise Satz 3.10). □

Sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Die ersten Glieder sind

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{5}{8},\ \tfrac{8}{13},\ \dots$$

Durch Induktion gilt $\frac{1}{2} \le a_n \le 1$: Für $n = 1$ ist das richtig, und aus $\frac{1}{2} \le a_n \le 1$ folgt $\frac{3}{2} \le 1 + a_n \le 2$, also $\frac{1}{2} \le a_{n+1} \le \frac{2}{3}$. Damit ist

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{1+a_n}\right| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{(1+a_n)(1+a_{n+1})} \le \frac{4}{9}\,|a_{n+1} - a_n|.$$

Nach Lemma 5.22 konvergiert (a_n) gegen ein a mit $\frac{1}{2} \le a \le 1$. Wegen $a_{n+1} \to a$ (Satz 4.24 (1)) folgt aus $a_{n+1}(1+a_n) = 1$ mit den Rechenregeln (Satz 4.9) $a(1+a) = 1$, also $a^2 + a - 1 = 0$ und wegen $a > 0$

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Die Fehlerschranke ist $|a - a_n| \le \frac{(1/2)(4/9)^{n-1}}{5/9} = \frac{9}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$; für $n = 6$ ergibt sie etwa 0,016, während der wahre Fehler $|a - \frac{8}{13}|$ etwa 0,0027 beträgt. Wichtig ist die Reihenfolge des Schlusses: Erst sichert das Cauchy-Kriterium die Existenz des Grenzwerts, dann bestimmt die Gleichung $a(1+a) = 1$ seinen Wert. Ohne den ersten Schritt wäre der zweite wertlos; für $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n$ liefert dieselbe Rechnung aus $b = 2b$ den falschen „Grenzwert“ 0.

Die Rekursion $a_{n+1} = f(a_n)$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sucht einen Punkt mit $f(a) = a$, einen *Fixpunkt*. Dass die Abstände aufeinanderfolgender Glieder mindestens um einen festen Faktor $q < 1$ schrumpfen, ist der Kern des Banachschen Fixpunktsatzes, der in späteren Vorlesungen in vollständigen metrischen Räumen bewiesen wird. Er benutzt von der Vollständigkeit die Gestalt (C).

Beispiel 3 (Dezimalbrüche). Sei $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ziffern $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Setze

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} d_k\,10^{-k}, \qquad b_n = a_n + 10^{-n}.$$

Dann ist $a_{n+1} = a_n + d_{n+1}10^{-n-1} \geq a_n$ und $b_{n+1} = a_n + (d_{n+1}+1)10^{-n-1} \leq a_n + 10 \cdot 10^{-n-1} = b_n$. Mit $b_n - a_n = 10^{-n} \to 0$ ist $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung; ihr gemeinsamer Punkt $x \in [0,1]$ ist die Zahl $0{,}d_1d_2d_3\ldots$. Umgekehrt hat jedes $x \in [0,1)$ eine solche Darstellung. Sei $\lfloor y \rfloor$ der ganze Teil von y (Lemma 2.30); es gilt $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$. Man setzt $d_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x \rfloor$. Mit $u = 10^{n-1}x$ ist $10\lfloor u \rfloor \leq 10u < 10\lfloor u \rfloor + 10$, also $10\lfloor u \rfloor \leq \lfloor 10u \rfloor \leq 10\lfloor u \rfloor + 9$ und $d_n \in \{0, \ldots, 9\}$. Die Summe $a_n = \sum_{k \leq n} d_k 10^{-k}$ ist eine Teleskopsumme und ergibt wegen $\lfloor x \rfloor = 0$ genau $a_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$; daraus folgt $a_n \leq x < a_n + 10^{-n} = b_n$. Also liegt x in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ und ist nach Lemma 5.6 ihr gemeinsamer Punkt, das heißt $x = 0{,}d_1d_2d_3\ldots$. Die Ziffernfolge $9, 9, 9, \ldots$ liefert dagegen $a_n = 1 - 10^{-n}$, $b_n = 1$ und den Punkt 1; deshalb beschränkt sich die Umkehrung auf $x \in [0,1)$. Verschiedene Ziffernfolgen können dieselbe Zahl liefern, etwa $0{,}5000\ldots$ und $0{,}4999\ldots$ (Aufgabe R3). Einheit 2, Aufgabe V6, hat die Dezimalnäherungen $\lfloor 10^n x \rfloor / 10^n$ schon von der Seite der Konstruktion aus betrachtet. In $\mathbb{Q}$ würde die erste Richtung scheitern: Nicht jede Ziffernfolge bestimmt eine rationale Zahl.

Beispiel 4 (Häufungswerte bestimmen). Sei $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{2^n+1}$, also $a_1 = -\frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{4}{5}$, $a_3 = -\frac{8}{9}$, $a_4 = \frac{16}{17}$, … Wegen $1 - \frac{2^n}{2^n+1} = \frac{1}{2^n+1}$ ist $a_n - (-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n+1}$, also $|a_n - (-1)^n| = \frac{1}{2^n+1} < 2^{-n}$. Für gerade Indizes heißt das $|a_{2m} - 1| < 2^{-2m}$, für ungerade $|a_{2m-1} + 1| < 2^{-(2m-1)}$. Die rechten Seiten sind Teilfolgen der Nullfolge (2^{-n}) (Lemma 5.4 mit Satz 2.29, Lemma 5.2 (4)); nach Satz 4.8 (1) gilt also $a_{2m} \to 1$ und $a_{2m-1} \to -1$, und 1 und -1 sind Häufungswerte. Andere gibt es nicht: Nach Lemma 5.17 ist jeder Häufungswert h Grenzwert einer Teilfolge. Diese enthält unendlich viele gerade oder unendlich viele ungerade Indizes, und die entsprechende Teilfolge konvergiert gegen h (Lemma 5.2 (4)) und zugleich gegen 1 beziehungsweise -1; also ist $h \in \{1, -1\}$. Nach Satz 5.19 ist $\limsup a_n = 1$ und $\liminf a_n = -1$; bestimmt wurden beide über Teilfolgen, ohne die Suprema σ_n zu bilden. Hier fallen Supremum und Limes superior zusammen: Wegen $|a_n| = 1 - \frac{1}{2^n+1} < 1$ ist 1 eine obere Schranke der Glieder, und weil $a_{2m} \to 1$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Glied größer als $1 - \varepsilon$; nach Lemma 2.36 (1) ist $\sup\{a_n\} = 1$, und kein Glied nimmt diesen Wert an. Ebenso ist $\inf\{a_n\} = -1$. Bei der Folge aus Einheit 4, Beispiel 4, ist es beim Infimum anders: Dort ist $\inf\{a_n\} = a_1 = \frac{1}{2}$ kleiner als $\liminf a_n = 1$ und wird angenommen. Dass ein Supremum, das von keinem Glied angenommen wird, stets mit dem Limes superior übereinstimmt, zeigt Aufgabe B1 (b).

5.8 Ausblick

- **Reihen (Einheit 6).** Das Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$ (Satz 4.31) wird zum Cauchy-Kriterium für Reihen; aus ihm folgt, dass absolut konvergente Reihen konvergieren. Das Leibniz-Kriterium wird mit einer Intervallschachtelung bewiesen.
- **Stetigkeit (Einheit 7).** Der Zwischenwertsatz beruht auf (S) oder (I); in $\mathbb{Q}$ ist er falsch, denn $x \mapsto x^2 - 2$ wechselt auf $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ das Vorzeichen ohne Nullstelle.
- **Kompaktheit (Einheit 8).** Bolzano-Weierstraß ist der Kern der Folgenkompaktheit beschränkter abgeschlossener Mengen und damit des Satzes von Heine-Borel, des Satzes vom Maximum und der gleichmäßigen Stetigkeit stetiger Funktionen auf $[a, b]$. Einheit 8 beweist die Kompaktheit von $[a, b]$ mit der Supremumseigenschaft; ihre Aufgabe V2 gibt einen Beweis mit Intervallschachtelung.
- **Integral (Einheiten 12 und 13).** Ober- und Unterintegral sind Infimum und Supremum; ohne (S) gäbe es sie nicht.
- **Roter Faden.** Jede spätere Einheit weist aus, an welcher Stelle eine der fünf Eigenschaften eingeht. Die Monotonieeigenschaft hat schon in Einheit 4 die Zahl e geliefert.
- **Metrische Räume (spätere Vorlesungen).** (C) und (BW) haben ohne Anordnung einen Sinn; in metrischen Räumen fallen sie auseinander: Cauchy-Vollständigkeit heißt dort Vollständigkeit, die Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft beschränkter Mengen gilt dort im Allgemeinen nicht, zum Beispiel in keinem unendlichdimensionalen normierten Raum.

Zum Vergleich.[1] Die Gleichwertigkeit der Vollständigkeitsformen gehört zum Grundbestand jeder Analysis-Vorlesung. In O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, Springer Spektrum 2016, folgt das Vollständigkeitsaxiom in § 5 (S. 49–61) auf die Folgen in § 4, wie hier Einheit 5 auf Einheit 4; Supremum und Limes superior stehen dort in § 9 (S. 90–103). Forster nimmt die Cauchy-Vollständigkeit als Axiom und zeigt ihre Gleichwertigkeit mit dem Intervallschachtelungsprinzip; Satz 5.12 und der Beweis von Satz 5.18 gehen den klassischen Weg wie dort Satz 2 und Satz 6. Dass das Monotonieprinzip ohne weiteres Axiom die archimedische Eigenschaft und das Intervallschachtelungsprinzip liefert, ist dort Aufgabe 5.11; hier folgt es aus den Sätzen 5.9 bis 5.12. Die erste Gleichwertigkeit in Folgerung 5.20 ist dort Aufgabe 5.8. Aufgabe V2 behandelt die Schnitteigenschaft, die dort in Aufgabe 9.13 als Dedekindsches Schnittaxiom formuliert ist. Im *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage, Vieweg+Teubner 2011, ist die Existenz einer monotonen Teilfolge Aufgabe 5 F; der Beweis von Lemma 5.7 über Indizes, nach denen kein größeres Glied folgt, entspricht dem zweiten Beweis in der Lösung dort (S. 85). Eigene Wege geht die Einheit mit dem Ringschluss über fünf

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Eigenschaften in einem beliebigen angeordneten Körper, mit der Untersuchung der archimedischen Eigenschaft und dem Gegenbeispiel $\mathbb{R}((t))$, mit den drei Beweisen des Satzes von Bolzano-Weierstraß und mit den durchgerechneten Beispielen.

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 5

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Sei $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^3 < 3\}$. Führen Sie das Halbierungsverfahren aus dem Beweis von Satz 5.13 mit $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ fünf Schritte lang aus und geben Sie $[a_6, b_6]$ an. Begründen Sie, dass ein Mittelpunkt $m > 0$ genau dann obere Schranke von A ist, wenn $m^3 \geq 3$ gilt. Nach wie vielen Halbierungen ist die Intervalllänge erstmals kleiner als 10^{-3}?

R2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $r_n \in \{0, 1, 2\}$ der Rest von n bei Division durch 3 und $a_n = r_n + \frac{1}{n}$. Bestimmen Sie alle Häufungswerte, $\limsup a_n$, $\liminf a_n$, $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Werden Supremum und Infimum angenommen?

R3. Bestimmen Sie den gemeinsamen Punkt der Intervallschachtelung aus Abschnitt 5.7, Beispiel 3, für die Ziffernfolgen

(a) $3, 3, 3, \ldots$,

(b) $4, 9, 9, 9, \ldots$,

(c) $5, 0, 0, 0, \ldots$.

Berechnen Sie dazu a_n geschlossen. Was zeigen (b) und (c)?

R4. Sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$. Berechnen Sie $a_2, \ldots, a_5$ als Brüche. Zeigen Sie mit Lemma 5.22, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert. Geben Sie die Fehlerschranke aus Lemma 5.22 für a_5 an und vergleichen Sie sie mit dem tatsächlichen Fehler.

R5. Sei $c = \frac{1+i}{2}$, $z_1 = 0$ und $z_{n+1} = c\, z_n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Berechnen Sie $z_2, \ldots, z_5$ in der Form $x + iy$.

(b) Zeigen Sie mit Lemma 5.22, dass (z_n) konvergiert, bestimmen Sie den Grenzwert w und geben Sie die Fehlerschranke aus Lemma 5.22 an.

(c) Zeigen Sie $z_n - w = c^{n-1}(z_1 - w)$ und berechnen Sie $|z_n - w|$ genau. Ab welchem n ist der tatsächliche Fehler kleiner als 10^{-3}, ab welchem n garantiert das die Schranke aus (b)?

R6. (*Aussichtsstellen.*) Bestimmen Sie für die folgenden Folgen alle Aussichtsstellen im Sinn des Beweises von Lemma 5.7, entscheiden Sie, welcher Fall des Beweises eintritt, und geben Sie die dort konstruierte monotone Teilfolge an.

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

(b) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$,

(c) $a_n = (-1)^n$.

(d) Warum ist die Teilfolge in Fall 2 stets streng monoton wachsend, in Fall 1 aber nur monoton fallend? Zeigen Sie, dass die Folge aus (c) keine streng monotone Teilfolge besitzt.

Stufe B – Beweisen

B1. Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge, $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ wie in Definition 4.25 und $L = \limsup a_n$.

(a) Zeigen Sie $L \leq s$.

(b) Es gelte $a_n < s$ für alle n, das Supremum werde also von keinem Glied angenommen. Zeigen Sie $\sigma_n = s$ für alle n und folgern Sie $L = s$.

(c) Konstruieren Sie unter der Voraussetzung von (b), ohne Folgerung 4.27 und Satz 5.19 zu benutzen, eine streng monoton wachsende Teilfolge mit Grenzwert s.

(d) Zeigen Sie an der Folge aus Aufgabe R2, dass $L < s$ vorkommt. Geben Sie eine Folge an, deren Supremum angenommen wird und mit dem Limes superior übereinstimmt. Was folgt aus (b) für eine Folge mit $L < s$?

B2. (*Ein Häufungswert in* $\mathbb{C}$.) Häufungswerte komplexer Folgen sind wie in Definition 4.23 erklärt; Lemma 5.17 gilt für sie.

(a) Zeigen Sie: Eine beschränkte Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie genau einen Häufungswert hat.

(b) Welche der beiden Gleichwertigkeiten aus Folgerung 5.20 hat in $\mathbb{C}$ keinen Sinn, und welcher Satz ersetzt im Beweis von (a) den Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen?

(c) Sei $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Zeigen Sie $\zeta^2 = i$ und bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (ζ^n). Konvergiert sie?

B3. (*Kleine Schritte und Cauchy-Folgen.*)

(a) Sei (a_n) eine reelle Folge mit $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ für alle n. Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert. (Hinweis: Für $k \geq 2$ ist $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die Bedingung $|H_{n+1} - H_n| \leq \frac{1}{n}$ erfüllt, aber keine Cauchy-Folge ist.

B4. Zeigen Sie mit dem Intervallschachtelungsprinzip, dass $[0,1]$ nicht abzählbar ist: Zu jeder Folge (x_n) reeller Zahlen gibt es ein $x \in [0,1]$, das von allen x_n verschieden ist. (Hinweis: Dritteln Sie.) An welcher Stelle geht die Vollständigkeit ein?

B5. Sei (a_n) eine reelle Folge und H die Menge ihrer Häufungswerte. Zeigen Sie: Ist (h_k) eine Folge in H mit $h_k \to h$, so ist $h \in H$.

B6. (*Teilfolgenkriterium.*) Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie: Genau dann gilt $a_n \to a$, wenn jede Teilfolge von (a_n) ihrerseits eine gegen a konvergente Teilfolge besitzt. Zeigen Sie an $a_n = (-1)^n$, dass die Aussage falsch wird, wenn man „gegen a konvergente" durch „konvergente" ersetzt.

Stufe V – Vertiefen

V1. (*Geschachtelte Intervalle ohne Längenbedingung.*) Ein angeordneter Körper K hat die Eigenschaft (NI), wenn für jede Folge von Intervallen $[a_n, b_n] \subseteq K$ mit $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ ein Element in allen Intervallen liegt; über die Längen wird nichts verlangt.

(a) Zeigen Sie: Aus (S) folgt (NI).

(b) Zeigen Sie: Ist K archimedisch und hat (NI), so hat K die Eigenschaft (S).

(c) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{R}((t))$ aus (G2) die Eigenschaft (NI) nicht hat. Betrachten Sie $[a_n, b_n] = [n, \frac{1}{n}t^{-1}]$.

V2. (*Dedekindsche Schnitte.*) Ein angeordneter Körper K hat die Schnitteigenschaft (D), wenn gilt: Ist $K = L \cup R$ mit nichtleeren Mengen L, R und $l < r$ für alle $l \in L$, $r \in R$, so gibt es ein $c \in K$ mit $l \leq c \leq r$ für alle $l \in L$, $r \in R$. Zeigen Sie, dass (D) und (S) gleichwertig sind.

V3. Zeigen Sie: Jede reelle Folge besitzt eine Teilfolge, die konvergiert oder bestimmt gegen $+\infty$ oder bestimmt gegen $-\infty$ divergiert (Definition 4.13).

V4. (*Infinitesimale in* $\mathbb{R}((t))$.) Sei $K = \mathbb{R}((t))$ der angeordnete Körper aus (G2).

(a) Zeigen Sie: Die Folge $(\frac{1}{n})$ ist in K monoton fallend und nach unten beschränkt, aber keine Cauchy-Folge. Warum widerspricht das nicht der Cauchy-Vollständigkeit von K, und welche der fünf Eigenschaften aus Definition 5.5 verletzt diese Folge?

(b) Zeigen Sie, dass (t^n) in K eine Nullfolge ist, (2^{-n}) dagegen nicht.

(c) Sei $I = \{x \in K : |x| < \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, ohne Satz 5.10 zu benutzen, dass I nicht leer und nach oben beschränkt ist, aber kein Supremum hat. (Hinweis: Mit x liegt auch $2x$ in I.)

(d) Zeigen Sie, dass zwischen 0 und t keine rationale Zahl liegt. Satz 2.31 gilt also in K nicht.

V5. (*Dichtheit kennzeichnet archimedische Körper.*) Sei K ein angeordneter Körper; $\mathbb{Q}$ ist nach Lemma 2.8 als Teilmenge von K aufgefasst.

(a) Zeigen Sie: K ist genau dann archimedisch, wenn es zu je zwei Elementen $x < y$ in K ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$ gibt.

(b) Sei K archimedisch und $x \in K$. Zeigen Sie, dass die Folge $r_k = \frac{\lfloor kx \rfloor + 1}{k}$ rationaler Zahlen in K gegen x konvergiert; dabei ist $\lfloor kx \rfloor$ die ganze Zahl aus Lemma 2.30.

Lösungen

Lösung R1. Begründung des Kriteriums: Ist $m^3 \geq 3$ und $x > m > 0$, so ist $x^3 > m^3 \geq 3$ (Lemma 2.38 (1)), also $x \notin A$; m ist obere Schranke. Ist $m^3 < 3$, so ist für $0 < \delta \leq 1$

$$(m+\delta)^3 = m^3 + \delta(3m^2 + 3m\delta + \delta^2) \leq m^3 + \delta(3m^2 + 3m + 1),$$

und mit $\delta = \min\{1, \frac{3-m^3}{2(3m^2+3m+1)}\}$ folgt $(m+\delta)^3 < 3$. Also liegt $m + \delta > m$ in A, und m ist keine obere Schranke. Ferner ist $a_1 = 1$ keine obere Schranke ($1{,}25^3 < 3$) und $b_1 = 2$ eine ($2^3 = 8$).

n	a_n	b_n	m_n	m_n^3
1	1	2	1,5	3,375
2	1	1,5	1,25	1,953125
3	1,25	1,5	1,375	2,599609375
4	1,375	1,5	1,4375	2,970458984375
5	1,4375	1,5	1,46875	3,168426513671875

Also $[a_6, b_6] = [1{,}4375;\ 1{,}46875]$. Die Länge nach n Halbierungen ist 2^{-n}. Wegen $2^9 = 512 < 1000 < 1024 = 2^{10}$ ist sie nach 10 Halbierungen erstmals kleiner als 10^{-3}. Zur Kontrolle: Der gemeinsame Punkt ist $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44225$.

Lösung R2. Die Teilfolgen zu den drei Restklassen sind

$$a_{3m} = \frac{1}{3m} \to 0, \qquad a_{3m+1} = 1 + \frac{1}{3m+1} \to 1, \qquad a_{3m+2} = 2 + \frac{1}{3m+2} \to 2,$$

mit $m \in \mathbb{N}$ im ersten und $m \in \mathbb{N}_0$ in den beiden anderen Fällen. Nach Lemma 5.17 sind $0, 1, 2$ Häufungswerte. Weitere gibt es nicht: Ist h ein Häufungswert, so konvergiert nach Lemma 5.17 eine Teilfolge gegen h, und unendlich viele ihrer Indizes liegen in einer Restklasse; die zugehörige Teilfolge konvergiert gegen h (Lemma 5.2 (4)) und gegen 0, 1 oder 2, also ist $h \in \{0, 1, 2\}$. Nach Satz 5.19 ist $\limsup a_n = 2$ und $\liminf a_n = 0$.

Wertemenge: In der Klasse $r_n = 2$ ist $a_n = 2 + \frac{1}{n} \le 2 + \frac{1}{2}$ mit Gleichheit bei $n = 2$; in der Klasse $r_n = 1$ ist $a_n \le 1 + 1 = 2$; in der Klasse $r_n = 0$ ist $a_n \le \frac{1}{3}$. Also $\sup\{a_n\} = \max\{a_n\} = a_2 = \frac{5}{2}$. Alle a_n sind positiv, und $a_{3m} = \frac{1}{3m} \to 0$; zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein Glied kleiner als ε, und $\inf\{a_n\} = 0$. Das Infimum wird nicht angenommen, weil kein Glied null ist.

Lösung R3. (a) Mit der geometrischen Summe (Satz 1.13) ist

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 10^{-k} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - 10^{-n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\big(1 - 10^{-n}\big).$$

Also $a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}10^{-n} \le \frac{1}{3} \le \frac{1}{3} + \frac{2}{3}10^{-n} = b_n$. Der gemeinsame Punkt ist $\frac{1}{3}$; nach Lemma 5.6 ist er der einzige.

(b) Für $n \ge 2$ ist $a_n = \frac{4}{10} + \sum_{k=2}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{4}{10} + \frac{9}{100} \cdot \frac{1 - 10^{-(n-1)}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} - 10^{-n} = \frac{1}{2} - 10^{-n}$; für $n = 1$ gilt dieselbe Formel, denn $a_1 = \frac{4}{10}$. Also $[a_n, b_n] = [\frac{1}{2} - 10^{-n}, \frac{1}{2}]$, gemeinsamer Punkt $\frac{1}{2}$.

(c) $a_n = \frac{1}{2}$, $[a_n, b_n] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 10^{-n}]$, gemeinsamer Punkt $\frac{1}{2}$.

(b) und (c) zeigen, dass die Abbildung von Ziffernfolgen auf Zahlen nicht injektiv ist: $0{,}4999\ldots = 0{,}5000\ldots$. Die Konstruktion mit $\lfloor 10^n x \rfloor$ aus Beispiel 3 liefert für $x = \frac{1}{2}$ die Folge $5, 0, 0, \ldots$. Allgemein liefert sie nie eine Ziffernfolge, die ab einer Stelle nur aus Neunen besteht. Wäre nämlich $d_k = 9$ für alle $k > N$, so ergäbe dieselbe Rechnung wie in (b) für $n > N$

$$a_n = a_N + \sum_{k=N+1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = a_N + 10^{-N} - 10^{-n}.$$

Mit $y = a_N + 10^{-N}$ ist dann $b_n = a_n + 10^{-n} = y$ für alle $n > N$. Beispiel 3 liefert $a_n \le x < b_n$, also $y - 10^{-n} \le x < y$ und $0 < y - x \le 10^{-n}$ für alle $n > N$. Das widerspricht $10^{-n} \to 0$ (Lemma 5.4).

Lösung R4. $a_2 = 3$, $a_3 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, $a_4 = 2 + \frac{3}{7} = \frac{17}{7}$, $a_5 = 2 + \frac{7}{17} = \frac{41}{17}$.

Durch Induktion ist $a_n > 0$ für alle n und daher $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n} > 2$; also $a_n \ge 2$ für $n \ge 2$. Für $n \ge 2$ gilt

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| = \frac{|a_n - a_{n+1}|}{a_n a_{n+1}} \le \frac{1}{4}|a_{n+1} - a_n|.$$

Die Folge $b_n = a_{n+1}$ erfüllt also die Voraussetzung von Lemma 5.22 mit $q = \frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert; damit konvergiert (a_n) gegen denselben Grenzwert a. Wegen $b_n \geq 2$ für alle n ist nach Lemma 5.2 (6) $a \geq 2$, insbesondere $a \neq 0$. Aus $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}$ folgt mit den Rechenregeln (Satz 4.9) $a = 2 + \frac{1}{a}$, also $a^2 - 2a - 1 = 0$ und $a = 1 \pm \sqrt{2}$. Wegen $a \geq 2$ ist $a = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41421$.

Fehlerschranke: Für (b_n) ist $d = |b_2 - b_1| = |a_3 - a_2| = \frac{2}{3}$ und $q = \frac{1}{4}$, also

$$|a - a_{n+1}| = |a - b_n| \leq \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{9} \cdot 4^{-(n-1)}.$$

Für $a_5 = b_4$ ergibt das $\frac{8}{9 \cdot 64} = \frac{1}{72} \approx 0{,}0139$. Der tatsächliche Fehler ist $1 + \sqrt{2} - \frac{41}{17} = \frac{17\sqrt{2} - 24}{17} \approx 0{,}00245$. Die Schranke ist grob, aber sie ist bewiesen und ohne Kenntnis von a berechenbar.

Lösung R5. (a) Es ist $z_2 = 1$ und

$$z_3 = \tfrac{1+i}{2} + 1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i, \qquad z_4 = \tfrac{(1+i)(3+i)}{4} + 1 = \tfrac{2+4i}{4} + 1 = \tfrac{3}{2} + i, \qquad z_5 = \tfrac{(1+i)(3+2i)}{4} + 1 = \tfrac{1+5i}{4} + 1 = \tfrac{5}{4} + \tfrac{5}{4}i.$$

(b) Es ist $|c|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, also $|c| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $z_{n+2} - z_{n+1} = c\,(z_{n+1} - z_n)$, nach Satz 3.9 (2) also

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|z_{n+1} - z_n| \quad \text{für alle } n.$$

Lemma 5.22 mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ liefert die Konvergenz, $z_n \to w$. Aus $z_{n+1} = cz_n + 1$ folgt mit den Rechenregeln (Satz 4.9) $w = cw + 1$, also

$$w = \frac{1}{1-c} = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1 + i.$$

Mit $d = |z_2 - z_1| = 1$, $q^{n-1} = (\sqrt{2})^{1-n}$ und $\frac{1}{1-q} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ lautet die Fehlerschranke

$$|w - z_n| \leq (2 + \sqrt{2})\,(\sqrt{2})^{1-n}.$$

(c) Es ist $z_{n+1} - w = cz_n + 1 - (cw + 1) = c\,(z_n - w)$; durch Induktion folgt $z_n - w = c^{n-1}(z_1 - w) = -c^{n-1}(1 + i)$. Nach Satz 3.9 (2) und Folgerung 3.23 ist

$$|z_n - w| = |c|^{n-1}\,|1 + i| = (\sqrt{2})^{1-n}\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{2-n}.$$

Der Fehler fällt streng. Für $n = 22$ ist er $(\sqrt{2})^{-20} = 2^{-10} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$, für $n = 21$ ist er $\frac{\sqrt{2}}{1024} > 10^{-3}$, denn $\sqrt{2} > 1{,}024$. Ab $n = 22$ ist der tatsächliche Fehler also kleiner als 10^{-3}. Die Schranke aus (b) ist für $n = 25$ gleich $(2 + \sqrt{2})\,2^{-12} = \frac{2+\sqrt{2}}{4096} < \frac{4{,}096}{4096} = 10^{-3}$, weil $\sqrt{2} < 2{,}096$, und für $n = 24$ gleich $\frac{2+\sqrt{2}}{2048\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2048} > 10^{-3}$, weil $\sqrt{2} > 1{,}048$. Da die Schranke mit n fällt, garantiert sie die Genauigkeit ab $n = 25$. Hier gilt die Kontraktionsbedingung mit Gleichheit; die Schranke ist deshalb nur um den festen Faktor $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ zu groß und kostet drei Schritte.

Lösung R6. (a) Ist n gerade, so ist $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Für $m > n$ ist $a_m < 0 < a_n$, falls m ungerade, und $a_m = \frac{1}{m} \le \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n}$, falls m gerade. Also ist jedes gerade n eine Aussichtsstelle. Ist n ungerade, so ist $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} > 0 > a_n$, also ist n keine. Es gibt unendlich viele Aussichtsstellen (Fall 1); die Aufzählung liefert $n_k = 2k$ und die streng fallende Teilfolge $a_{2k} = \frac{1}{2k}$.

(b) Wegen $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$ ist kein Index eine Aussichtsstelle (Fall 2). Jede natürliche Zahl ist größer als alle Aussichtsstellen, also ist $n_1 = 1$; n_{k+1} ist der kleinste Index $m > n_k$ mit $a_m > a_{n_k}$, also $n_{k+1} = n_k + 1$. Es folgt $n_k = k$: Die konstruierte Teilfolge ist die ganze Folge.

(c) Für gerades n ist $a_n = 1 \ge a_m$ für alle m; jedes gerade n ist Aussichtsstelle. Für ungerades n ist $a_{n+1} = 1 > -1 = a_n$; es ist keine. Fall 1 liefert $n_k = 2k$ und die konstante Teilfolge $1, 1, 1, \dots$, die monoton fallend, aber nicht streng monoton fallend ist.

(d) In Fall 2 ist n_k keine Aussichtsstelle. Nach Regel 1.3 heißt das: Es gibt ein $m > n_k$ mit $a_m > a_{n_k}$, und n_{k+1} wird unter diesen m gewählt; die Ungleichung ist streng. In Fall 1 liefert die Definition der Aussichtsstelle nur $a_{n_{k+1}} \le a_{n_k}$. Die Folge aus (c) nimmt nur die Werte 1 und -1 an. Die Glieder einer streng monotonen Teilfolge sind paarweise verschieden; schon $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}$ wären drei verschiedene Werte. Also besitzt sie keine streng monotone Teilfolge, und Lemma 5.7 lässt sich nicht zu „streng monoton“ verschärfen.

Lösung B1. (a) Es ist $\sigma_1 = s$, und nach Satz 5.8 ist $L = \lim \sigma_n = \inf\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \le \sigma_1 = s$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\{a_k : k \ge n\} \subseteq \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist $\sigma_n \le s$. Angenommen, $\sigma_n < s$. Setze $u = \max\{a_1, \dots, a_{n-1}, \sigma_n\}$ (für $n = 1$ ist $u = \sigma_1$). Nach Voraussetzung ist $a_k < s$ für $k < n$, und $\sigma_n < s$; also ist $u < s$. Aber u ist eine obere Schranke aller Glieder: Für $k < n$ ist $a_k \le u$, für $k \ge n$ ist $a_k \le \sigma_n \le u$. Das widerspricht $s = \sup\{a_n\}$. Also ist $\sigma_n = s$ für

alle n, und $L = \lim \sigma_n = s$.

(c) Setze $n_1 = 1$. Ist n_k gewählt, so sei $u_k = \max\{a_{n_k}, s - \frac{1}{k}\}$. Wegen $a_{n_k} < s$ ist $u_k < s = \sigma_{n_k+1}$ nach (b); also ist u_k keine obere Schranke von $\{a_m : m > n_k\}$. Sei n_{k+1} der kleinste Index $m > n_k$ mit $a_m > u_k$ (Satz 1.16). Dann gilt

$$n_{k+1} > n_k, \qquad a_{n_{k+1}} > a_{n_k}, \qquad s - \frac{1}{k} < a_{n_{k+1}} < s.$$

Die Teilfolge ist streng monoton wachsend, und $|a_{n_{k+1}} - s| < \frac{1}{k}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \varepsilon$ (Satz 2.29); für $k > M$ ist $|a_{n_k} - s| < \frac{1}{k-1} \le \frac{1}{M} < \varepsilon$. Also $a_{n_k} \to s$. Insbesondere ist s ein Häufungswert (Satz 4.24 (2)), in Übereinstimmung mit (b) und Satz 5.19. Jeder Schritt ist durch den kleinsten Index festgelegt; eine Auswahl wird nicht gebraucht.

(d) Für die Folge aus R2 ist $s = a_2 = \frac{5}{2}$ und $L = 2 < s$ (Lösung R2). Für $a_n = (-1)^n$ ist $s = 1 = a_2$, $\sigma_n = 1$ für alle n und $L = 1 = s$. Aus (b) folgt durch Kontraposition: Ist $L < s$, so wird das Supremum angenommen, ist also das Maximum der Folge. Der Limes superior vergisst endlich viele Glieder; ein Supremum, das größer ist als er, kann nur von einem Glied herrühren.

Lösung B2. (a) „⇒“: Konvergiert $z_n \to z$, so ist z nach Satz 4.24 (3) der einzige Häufungswert.

„⇐“: Sei h der einzige Häufungswert, und angenommen, (z_n) konvergiert nicht gegen h. Nach Regel 1.3 gibt es $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem N ein $n \ge N$ mit $|z_n - h| \ge \varepsilon$ existiert. Sei n_1 der kleinste solche Index und n_{k+1} der kleinste Index $n > n_k$ mit $|z_n - h| \ge \varepsilon$. Die Teilfolge (z_{n_k}) ist beschränkt und hat nach Satz 5.21 eine konvergente Teilfolge $z_{n_{k_j}} \to h'$. Weil $(n_{k_j})_j$ streng wachsend ist, ist das eine Teilfolge von (z_n), und h' ist nach Satz 4.24 (2) ein Häufungswert von (z_n). Nach Satz 3.10 ist $\big||u| - |v|\big| \le |u - v|$ für $u, v \in \mathbb{C}$. Mit $u = z_{n_{k_j}} - h$ und $v = h' - h$ ergibt das

$$\big|\,|z_{n_{k_j}} - h| - |h' - h|\,\big| \le |z_{n_{k_j}} - h'| \to 0,$$

die reelle Folge $\big(|z_{n_{k_j}} - h|\big)_j$ konvergiert also gegen $|h' - h|$. Alle ihre Glieder sind $\ge \varepsilon$; nach Lemma 5.2 (6) ist $|h' - h| \ge \varepsilon$, also $h' \ne h$. Das widerspricht der Eindeutigkeit des Häufungswerts.

(b) Die Gleichwertigkeit mit $\limsup a_n = \liminf a_n$ hat in $\mathbb{C}$ keinen Sinn: Limes superior und Limes inferior sind über Suprema und Infima erklärt, und auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Anordnung (Satz 3.16). Die Gleichwertigkeit mit „genau ein Häufungswert“ überträgt sich, weil ihr Beweis nur den Satz von Bolzano-Weierstraß braucht; an seine Stelle tritt Satz 5.21.

(c) Es ist $\zeta^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$, also $\zeta^4 = -1$ und $\zeta^8 = 1$. Damit ist $\zeta^{n+8} = \zeta^n$; die Folge durchläuft periodisch die acht Werte

$$1, \quad \tfrac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad i, \quad \tfrac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad -1, \quad \tfrac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad -i, \quad \tfrac{1-i}{\sqrt{2}},$$

die nach Real- und Imaginärteil paarweise verschieden sind. Jeder dieser Werte ζ^r ($0 \le r \le 7$) wird für alle $n = r + 8j$ angenommen, also für unendlich viele n, und ist Häufungswert. Ist h keiner dieser Werte, so ist $\delta = \min_{0\le r\le 7} |h - \zeta^r| > 0$ und $|\zeta^n - h| \ge \delta$ für alle n; h ist kein Häufungswert. Die Folge ist beschränkt ($|\zeta^n| = |\zeta|^n = 1$ nach Folgerung 3.23) und hat acht Häufungswerte; nach (a) konvergiert sie nicht.

Lösung B3. (a) Für $k \ge 2$ ist $k(k-1) \le k^2$, also nach (O6)

$$\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Für $m > n \ge 2$ folgt mit der Dreiecksungleichung und der Teleskopsumme

$$|a_m - a_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \le \sum_{k=n}^{m-1} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m-1} < \frac{1}{n-1}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Lemma 5.4 ein $N \ge 2$ mit $\frac{1}{N-1} < \varepsilon$. Für $m > n \ge N$ ist dann $|a_m - a_n| < \frac{1}{n-1} \le \frac{1}{N-1} < \varepsilon$, und für $m = n$ ist nichts zu zeigen. Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge und konvergiert nach dem Cauchy-Kriterium (Folgerung 5.15).

(b) $|H_{n+1} - H_n| = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$. Andererseits ist

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

für alle n, weil jeder der n Summanden mindestens $\frac{1}{2n}$ ist. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es also kein N mit $|H_m - H_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \ge N$; man wähle $n = N$, $m = 2N$. Die Folge ist keine Cauchy-Folge und divergiert. Der Unterschied zu (a): Die Summen $\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k^2}$ bleiben nach der Rechnung in (a) unter 1, die Summen $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$ wachsen über jede Schranke, denn die monoton wachsende Folge (H_n) konvergierte sonst nach Satz 5.8 und wäre nach Lemma 5.2 (2) eine Cauchy-Folge. Ob kleine Schritte zu einer Cauchy-Folge führen, entscheidet die Summe der Schrittweiten, nicht die einzelne Schrittweite. Einheit 6 nimmt das als Divergenz der harmonischen Reihe wieder auf (Satz 6.6).

Lösung B4. Setze $I_0 = [0,1]$. Ist $I_{n-1} = [\alpha, \beta]$ mit $\ell = \beta - \alpha$ gewählt, so zerlege man es in die drei abgeschlossenen Drittel

$$[\alpha, \alpha + \tfrac{\ell}{3}], \qquad [\alpha + \tfrac{\ell}{3}, \alpha + \tfrac{2\ell}{3}], \qquad [\alpha + \tfrac{2\ell}{3}, \beta].$$

Ein Punkt liegt in höchstens zweien davon, denn das erste und das dritte Drittel sind disjunkt. Also liegt x_n in mindestens einem Drittel nicht; I_n sei das am weitesten links gelegene solche Drittel. Dann ist $I_n \subseteq I_{n-1}$, $x_n \notin I_n$ und die Länge von I_n ist $3^{-n} \leq 2^{-n} \to 0$. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15) gibt es x in allen I_n, insbesondere $x \in [0,1]$. Für jedes n ist $x \in I_n$ und $x_n \notin I_n$, also $x \neq x_n$.

Die Vollständigkeit geht genau bei der Existenz von x ein. In $\mathbb{Q}$ gelingt die Konstruktion ebenso, mit rationalen Endpunkten, aber der gemeinsame Punkt kann fehlen; das muss so sein, denn $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist abzählbar (Einheit 2). Damit ist Satz 2.47 ein zweites Mal bewiesen, diesmal ohne Ziffernentwicklung und ohne Satz 2.46. Die Rolle der Diagonale übernimmt die Wahl von I_n: Das n-te Intervall schließt das n-te Glied der Liste aus.

Lösung B5. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Wähle k mit $|h_k - h| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da h_k Häufungswert ist, gibt es $n \geq N$ mit $|a_n - h_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $|a_n - h| \leq |a_n - h_k| + |h_k - h| < \varepsilon$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also unendlich viele n mit $|a_n - h| < \varepsilon$, und $h \in H$ nach Definition 5.16. (In der Sprache von Einheit 8: H ist abgeschlossen.)

Lösung B6. „⇒“: Konvergiert $a_n \to a$, so konvergiert jede Teilfolge gegen a (Satz 4.24 (1)); sie ist also ihre eigene gegen a konvergente Teilfolge.

„⇐“: Angenommen, $a_n \not\to a$. Nach Regel 1.3 gibt es $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem N ein $n \geq N$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$ existiert. Sei n_1 der kleinste solche Index und n_{k+1} der kleinste Index $n > n_k$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$; so entsteht eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$ für alle k. Nach Voraussetzung hat sie eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})$ mit $a_{n_{k_j}} \to a$. Das widerspricht $|a_{n_{k_j}} - a| \geq \varepsilon$ für alle j.

Zum Zusatz: Jede Teilfolge von $\big((-1)^n\big)$ ist beschränkt und hat nach Bolzano-Weierstraß (Folgerung 5.15) eine konvergente Teilfolge; trotzdem konvergiert $\big((-1)^n\big)$ nicht, denn die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k-1}) konvergieren gegen 1 und -1 (Satz 4.24 (1)). Auf „gegen dasselbe a“ kann man also nicht verzichten.

Lösung V1. (a) Für alle n, m gilt $a_n \leq b_m$: Bei $n \leq m$ ist $a_n \leq a_m \leq b_m$, bei $n > m$ ist $a_n \leq b_n \leq b_m$. Die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist also nicht leer und durch jedes b_m nach oben beschränkt. Nach (S) existiert $x = \sup_n a_n$, und es gilt $a_n \leq x$ für alle n und $x \leq b_m$ für alle m, weil jedes b_m obere Schranke ist. Also liegt x in allen Intervallen.

(b) Eine Intervallschachtelung ist insbesondere eine Folge geschachtelter Intervalle; (NI) liefert also (I). Mit der archimedischen Eigenschaft folgt (S) aus Satz 5.13.

(c) Bezeichnungen wie in (G2). Die Intervalle sind geschachtelt: $a_n = n$ wächst; $b_n - b_{n+1} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)t^{-1}$ hat den positiven Leitkoeffizienten $\frac{1}{n(n+1)}$, also fällt b_n; und $b_n - a_n = \frac{1}{n}t^{-1} - n$ hat den Leitkoeffizienten $\frac{1}{n} > 0$ bei t^{-1}, also $a_n < b_n$.

Angenommen, x liegt in allen Intervallen. Dann ist $x \geq 1 > 0$; sei $v = v(x)$ und $c > 0$ der Leitkoeffizient.

- Ist $v \geq 1$, so ist $1 - x$ positiv (Leitkoeffizient 1 bei t^0), also $x < 1 = a_1$. Widerspruch.
- Ist $v = 0$, so wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > c$; dann hat $n - x$ den Leitkoeffizienten $n - c > 0$ bei t^0, also $x < n = a_n$. Widerspruch.
- Ist $v = -1$, so wähle n mit $\frac{1}{n} < c$ (Satz 2.29); dann hat $x - b_n$ den Leitkoeffizienten $c - \frac{1}{n} > 0$ bei t^{-1}, also $x > b_n$. Widerspruch.
- Ist $v \leq -2$, so hat $x - b_1 = x - t^{-1}$ den Leitkoeffizienten $c > 0$ bei t^v, also $x > b_1$. Widerspruch.

Also ist der Durchschnitt leer, und (NI) gilt nicht, obwohl $\mathbb{R}((t))$ nach (G2) die Eigenschaft (I) hat. (NI) ist demnach eine echt stärkere Forderung als (I); die Längen $b_n - a_n$ dieses Beispiels gehen nicht gegen null.

Lösung V2. (S) $\Rightarrow$ (D): Sei $K = L \cup R$ wie angegeben. L ist nicht leer und durch jedes $r \in R$ nach oben beschränkt. Sei $c = \sup L$. Dann ist $l \leq c$ für alle $l \in L$, und weil jedes $r \in R$ obere Schranke von L ist, gilt $c \leq r$.

(D) $\Rightarrow$ (S): Sei $A \subseteq K$ nicht leer und nach oben beschränkt. Sei R die Menge der oberen Schranken von A und $L = K \setminus R$. R ist nicht leer nach Voraussetzung; L ist nicht leer, denn für $x_0 \in A$ ist $x_0 - 1$ keine obere Schranke. Ist $l \in L$ und $r \in R$, so gibt es $y \in A$ mit $y > l$, und $r \geq y > l$. Nach (D) gibt es c mit $l \leq c \leq r$ für alle $l \in L$, $r \in R$.

c ist obere Schranke von A: Sonst gäbe es $y \in A$ mit $y > c$. Dann ist $\frac{c+y}{2} < y$, also $\frac{c+y}{2}$ keine obere Schranke, das heißt $\frac{c+y}{2} \in L$ und damit $\frac{c+y}{2} \leq c$, also $y \leq c$. Widerspruch. Weil $c \leq r$ für jede obere Schranke r gilt, ist $c = \sup A$.

Bemerkenswert: Keine der beiden Richtungen benutzt die archimedische Eigenschaft. Ein Körper mit (D) hat nach dem Bewiesenen (S) und ist deshalb nach Satz 5.10 und Satz 5.14 automatisch archimedisch; einen direkten Schluss von (S) auf die archimedische Eigenschaft gibt die Bemerkung nach Folgerung 2.35.

Lösung V3. Nach Lemma 5.7 hat (a_n) eine monotone Teilfolge (a_{n_k}); sei sie etwa monoton wachsend (der fallende Fall geht durch Übergang zu $(-a_n)$ in diesen über). Ist sie nach oben beschränkt, so konvergiert sie nach (M), die in $\mathbb{R}$ gilt (Satz 5.8). Ist sie nicht nach oben beschränkt, so gibt es zu jedem C ein k_0 mit $a_{n_{k_0}} > C$, und wegen der

Monotonie gilt $a_{n_k} \geq a_{n_{k_0}} > C$ für alle $k \geq k_0$; die Teilfolge divergiert bestimmt gegen $+\infty$. Eine monoton fallende, nach unten unbeschränkte Teilfolge divergiert ebenso bestimmt gegen $-\infty$.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist der Spezialfall, in dem die Beschränktheit die beiden letzten Möglichkeiten ausschließt.

Lösung V4. (a) Es ist $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ eine positive reelle Zahl, also auch in K positiv (die reellen Zahlen behalten nach (G2) ihre Anordnung); ferner $\frac{1}{n} > 0$. Keine Cauchy-Folge: Für $\varepsilon = t > 0$ und jedes N ist

$$\left|\frac{1}{N} - \frac{1}{2N}\right| = \frac{1}{2N} > t,$$

denn $\frac{1}{2N} - t$ hat den Leitkoeffizienten $\frac{1}{2N} > 0$ bei t^0. Also gibt es zu $\varepsilon = t$ kein passendes N. Das widerspricht (C) nicht: (C) sagt nur, dass Cauchy-Folgen konvergieren. Die Folge ist monoton und beschränkt, konvergiert aber nicht, denn eine konvergente Folge wäre nach Lemma 5.2 (2) eine Cauchy-Folge. Sie verletzt also (M), wie es nach Satz 5.10 und Satz 5.14 sein muss. Sie verletzt auch (BW): Für $k \neq l$ ist $\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_l}$ eine von null verschiedene reelle Zahl, ihr Betrag r also eine positive reelle Zahl; nach Satz 2.29 gibt es j mit $\frac{1}{j} < r$, und nach (G2) ist $t < \frac{1}{j}$, also $r > t$. Mit $\varepsilon = t$ ist deshalb keine Teilfolge eine Cauchy-Folge, und nach Lemma 5.2 (2) konvergiert keine. (C) verletzt sie nicht, weil sie keine Cauchy-Folge ist, und (S) und (I) sprechen über Mengen und Intervalle, nicht über diese Folge.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Nach (G2), Beobachtung (c), gibt es $m \in \mathbb{Z}$ mit $t^m < \varepsilon$; nach dem Schluss des Beweises der Cauchy-Vollständigkeit in (G2) ist $t^{m'} \leq t^m$ für $m' \geq m$, man darf also $m \geq 1$ annehmen. Für $n \geq m$ ist $0 < t^n \leq t^m < \varepsilon$. Also $t^n \to 0$. Dagegen ist 2^{-n} eine positive reelle Zahl und deshalb $2^{-n} > t$ für alle n; mit $\varepsilon = t$ ist $|2^{-n} - 0| \geq \varepsilon$ für alle n, und (2^{-n}) ist keine Nullfolge. Ob eine Folge in K eine Nullfolge ist, hängt davon ab, dass ε alle positiven Elemente von K durchläuft; der Zusatz von Lemma 5.4 braucht die archimedische Eigenschaft.

(c) Es ist $t \in I$, denn $0 < t < \frac{1}{n}$ für alle n nach (G2). Die Zahl 1 ist obere Schranke: Für $x \in I$ ist $x \leq |x| < \frac{1}{1}$. Ist $x \in I$, so ist $|x| < \frac{1}{2n}$ für alle n, also $|2x| = 2|x| < \frac{1}{n}$ für alle n, und $2x \in I$.

Angenommen, $s = \sup I$ existiert. Dann ist $s \geq t > 0$. Liegt s in I, so liegt auch $2s$ in I, und $2s > s$ widerspricht der Schrankeneigenschaft von s. Liegt s nicht in I, so gibt es wegen $|s| = s$ ein n mit $s \geq \frac{1}{n}$. Für jedes $x \in I$ ist dann $x \leq |x| < \frac{1}{2n} \leq \frac{s}{2}$; also ist $\frac{s}{2} < s$ eine obere Schranke, ein Widerspruch. Somit hat I kein Supremum, und K verletzt (S) an einer ausdrücklich angegebenen Menge.

(d) Jede rationale Zahl $r > 0$ lässt sich als $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ schreiben; dann ist $r \geq \frac{1}{q}$ nach (O2), und $\frac{1}{q} > t$ nach (G2). Zwischen 0 und t liegt also keine rationale Zahl. Satz 2.31 setzt die archimedische Eigenschaft voraus; ohne sie ist er falsch.

Lösung V5. (a) „⇒“: Das ist Satz 2.31; nach dem Zusatz dort gelten Aussage und Beweis wörtlich in jedem archimedisch angeordneten Körper. „⇐“: Sei K nicht archimedisch. Nach dem Absatz nach Definition 2.14 gibt es ein $t \in K$ mit $0 < t < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung gibt es $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < t$. Schreibe $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$; wegen $p \geq 1$ (Folgerung 2.5) und $\frac{1}{q} > 0$ ist $r \geq \frac{1}{q} > t$ nach (O2). Das widerspricht $r < t$.

(b) Sei $m_k = \lfloor kx \rfloor$, also $m_k \leq kx < m_k + 1$ nach Lemma 2.30, angewandt in K. Dann ist $kx < m_k + 1 \leq kx + 1$, nach Multiplikation mit $\frac{1}{k} > 0$ also $x < r_k \leq x + \frac{1}{k}$ und $|r_k - x| \leq \frac{1}{k}$. Wegen $\frac{1}{k} \to 0$ in K (Lemma 5.4) und Lemma 2.16 (2) gilt $r_k \to x$. Die Folge ist durch eine Vorschrift festgelegt; eine Auswahl wird nicht gebraucht. Für den nicht archimedischen Körper $\mathbb{R}((t))$ zeigt V4 (d) ausdrücklich, dass die Dichtheit aus (a) verletzt ist.

EINHEIT 6

Reihen

Leitfrage

Die Summe

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

hat, wie sich in Abschnitt 6.4 zeigt, einen Wert S zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{6}$. Man ordne dieselben Summanden anders an: auf jeden positiven Summanden folgen zwei negative,

$$T = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Jeder Summand von S kommt in T genau einmal vor. Fasst man in T jeweils den positiven Summanden mit dem ersten negativen danach zusammen, so steht da $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$, also die Hälfte von S. Abschnitt 6.8 macht das genau: $T = \frac{1}{2}S \neq S$. Bei unendlich vielen Summanden ist das Kommutativgesetz also nicht selbstverständlich. **Was bedeutet eine unendliche Summe, und unter welchen Bedingungen darf man mit ihr rechnen wie mit einer endlichen?** Die Antwort dieser Einheit: Eine Reihe ist die Folge ihrer Partialsummen. Für *absolut* konvergente Reihen darf man die Summanden beliebig umordnen und zwei Reihen nach Cauchy ausmultiplizieren; für nur bedingt konvergente gilt beides im Allgemeinen nicht.

Voraussetzungen. Aus Einheit 1: geometrische Summe (Satz 1.13), Binomialsatz (Satz 1.20), Dreiecksungleichung (Satz 1.23), Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24), Satz 1.25 ($ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$), Wohlordnung (Satz 1.16), Umkehrabbildung (Satz 1.10), der Rekursionssatz und das allgemeine Kommutativgesetz endlicher Summen (Abschnitt 1.6). Aus Einheit 2: $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper mit Supremumseigenschaft (Satz 2.29, Satz 2.34) und die Existenz des Infimums (Folgerung 2.35); der ganze Teil $\lfloor x \rfloor$ (Lemma 2.30); die Aufzählung einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ der Größe nach (Beweis von Lemma 2.43); die erweiterte Zahlengerade (Definition 2.37); zu jedem $c \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x \geq 0$ mit $x^k = c$, geschrieben $c^{1/k}$ oder $\sqrt[k]{c}$ (Satz 2.39). Aus Einheit 3: $\mathbb{C}$ mit Betrag (Satz 3.9), $|z^n| = |z|^n$ (Folgerung 3.23) und die Dreiecksungleichung für endliche Summen (Folgerung 3.24); geometrische Summe und Binomialsatz gelten in

$\mathbb{C}$ (Abschnitt 3.1). Aus Einheit 4: Grenzwerte reeller und komplexer Folgen, $q^n \to 0$ für $|q| < 1$ (Satz 4.4), Real- und Imaginärteil (Satz 4.5), Beschränktheit konvergenter Folgen (Satz 4.7), Rechenregeln (Satz 4.9), Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.10), Einschließung (Satz 4.11), $\sqrt[n]{c} \to 1$ und $\sqrt[n]{n} \to 1$ (Satz 4.12), bestimmte Divergenz (Satz 4.14), das Monotonieprinzip (Satz 4.16), die Zahl e (Satz 4.18, Definition 4.19), ihre Darstellung als Summe mit Restabschätzung (Satz 4.20) und ihre Irrationalität (Satz 4.21), Teilfolgen (Satz 4.24), Limes superior und Limes inferior (Definition 4.25, Satz 4.28) und das Cauchy-Kriterium in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (Satz 4.31). Aus Einheit 5: das Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3), Lemma 5.6). Die Nummern 6.25 bis 6.27 stehen außerhalb der Zählfolge: Lemma 6.25 und Satz 6.26 in Abschnitt 6.4, Folgerung 6.27 in Abschnitt 6.5, jeweils dort, wo sie gebraucht werden.

Alle Folgen und Reihen dieser Einheit sind komplex, wenn nichts anderes gesagt ist; reelle sind ein Sonderfall. Wo die Anordnung gebraucht wird (Leibniz, Riemann, Verdichtung), steht „reell“ ausdrücklich da.

6.1 Reihen und ihr Wert

Eine Summe endlich vieler Zahlen ist in Einheit 1 rekursiv erklärt: Man addiert eine Zahl nach der anderen und ist nach endlich vielen Schritten fertig. Bei unendlich vielen Summanden wird man nie fertig; „alle addieren“ ist zunächst keine Vorschrift, sondern ein Wunsch. Wie leicht man sich dabei täuscht, zeigt $1-1+1-1+\dots$: Klammert man $(1-1)+(1-1)+\dots$, so ergibt sich 0, klammert man $1-(1-1)-(1-1)-\dots$, so ergibt sich 1. Erklärt sind nur die endlichen Summen der ersten Glieder. Man fragt deshalb, ob sie sich einem Wert nähern. Bei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ sind das die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots$, allgemein $1-2^{-n}$, und sie streben gegen 1; diese Zahl soll der Wert der Summe heißen.

Definition 6.1. Sei $(a_k)_{k\geq m}$ eine Folge komplexer Zahlen, $m \in \mathbb{N}_0$. Die Folge der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad (n \geq m)$$

heißt die *Reihe* mit den *Gliedern* a_k und wird mit $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Die Reihe *konvergiert*, wenn (s_n) konvergiert; dann bezeichnet $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ auch den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$, den *Wert* der Reihe. Andernfalls *divergiert* sie.

Das Zeichen $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ hat also zwei Bedeutungen: die Folge (s_n) und, falls sie konvergiert, ihren Grenzwert. Der Zusammenhang entscheidet. Eine Reihe ist nichts anderes als eine Folge; umgekehrt ist jede Folge (s_n) die Partialsummenfolge der Reihe mit $a_m = s_m$ und $a_k = s_k - s_{k-1}$ für $k > m$. Der Wert einer Reihe ist kein Ergebnis unendlich vieler Additionen, sondern ein Grenzwert endlicher. Damit ist auch das Beispiel $1-1+1-1+\dots$ entschieden: Die Partialsummen $1, 0, 1, 0, \dots$ konvergieren nicht, die Reihe hat keinen Wert. Die beiden Klammerungen erzeugen andere Reihen; wann

Klammern den Wert erhalten, klärt Aufgabe B3.

Satz 6.2 (geometrische Reihe). Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Beweis. Für $q \neq 1$ ist $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ nach Satz 1.13, der nach Abschnitt 3.1 auch für komplexes q gilt. Für $|q| < 1$ gilt $q^{n+1} \to 0$ nach Satz 4.4 (2), also $s_n \to \frac{1}{1-q}$ nach Satz 4.9. Sei $|q| \geq 1$. Dann ist $|s_{n+1} - s_n| = |q^{n+1}| = |q|^{n+1} \geq 1$ für alle n (Folgerung 3.23). Konvergierte (s_n) gegen s, so auch (s_{n+1}), und nach Satz 4.9 (1) wäre $s_{n+1} - s_n \to s - s = 0$. Also divergiert die Reihe. □

Beispiel (Teleskopreihe). Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (Einheit 1, Abschnitt 1.11, Beispiel 2), also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Allgemein konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1})$ genau dann, wenn (b_k) konvergiert, und hat dann den Wert $b_1 - \lim b_k$.

Satz 6.3 (Rechenregeln). Seien $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent und $c \in \mathbb{C}$.

1. $\sum(a_k + b_k)$ und $\sum ca_k$ konvergieren, mit $\sum(a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k$ und $\sum ca_k = c \sum a_k$.
2. Stimmen die Glieder zweier Reihen $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=m}^{\infty} a'_k$ für alle $k \geq p$ überein, so konvergieren entweder beide oder keine von beiden; über die Konvergenz entscheiden endlich viele Glieder nicht. Insbesondere konvergiert $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ für ein (jedes) $p \geq m$ konvergiert, und dann ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k = \sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{\infty} a_k$.
3. Ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent, so bilden die *Reste* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ eine Nullfolge.
4. Eine komplexe Reihe $\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum \operatorname{Re} a_k$ und $\sum \operatorname{Im} a_k$ konvergieren.

Beweis. (1) Die Partialsummen sind Summen beziehungsweise Vielfache der Partialsummen; es gilt Satz 4.9 (1). (2) Unterscheiden sich (a_k) und (a'_k) nur für Indizes $k < p$, so unterscheiden sich die Partialsummen für $n \geq p$ um die feste Zahl $d = \sum_{k=m}^{p-1}(a_k - a'_k)$; eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie es nach Addition einer Konstanten tut. Die Gleichung ist der Grenzübergang in $s_n = \sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{n} a_k$. (3) Nach (2) ist $r_n = s - s_n$ mit $s = \sum a_k$, und $s_n \to s$. (4) Die Partialsummen von $\sum \operatorname{Re} a_k$ sind die Realteile der Partialsummen von $\sum a_k$, ebenso für die Imaginärteile; es gilt Satz 4.5. □

Für das Produkt zweier Reihen gibt es keine so einfache Regel; ihm ist Abschnitt 6.6 gewidmet.

Satz 6.4 (Cauchy-Kriterium für Reihen). Die Reihe $\sum a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt mit

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{p} a_k\Big| < \varepsilon \quad \text{für alle } p > n \geq N.$$

Beweis. Es ist $\sum_{k=n+1}^{p} a_k = s_p - s_n$. Die Bedingung sagt, dass (s_n) eine Cauchy-Folge ist (der Fall $p = n$ ist trivial, der Fall $p < n$ folgt durch Vertauschen). Nach dem Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$ (Satz 4.31) ist das gleichwertig mit der Konvergenz von (s_n). □

Das Kriterium erlaubt, Konvergenz zu beweisen, ohne den Wert zu kennen; fast alle folgenden Kriterien beruhen darauf, und damit auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. In $\mathbb{Q}$ wäre etwa $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ keine konvergente Reihe (Satz 4.21).

Folgerung 6.5. Konvergiert $\sum a_k$, so gilt $a_k \to 0$.

Beweis. $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to s - s = 0$; oder: Satz 6.4 mit $p = n + 1$. □

Die Umkehrung ist falsch:

Satz 6.6 (harmonische Reihe). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{k} \to 0$.

Beweis. Für jedes n ist $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ist die Bedingung von Satz 6.4 also für kein N erfüllt. □

Wendet man die Abschätzung des Beweises auf $n = 1, 2, 4, \ldots, 2^{m-1}$ an, so erhält man $s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$. Umgekehrt hat der Block der Indizes von 2^j bis $2^{j+1} - 1$ genau 2^j Summanden, jeder höchstens 2^{-j}; also ist $s_n \leq m + 1$ für $n < 2^{m+1}$. Die Partialsummen wachsen über jede Schranke, aber nur etwa so schnell wie die Stellenzahl von n im Zweiersystem. Für $s_n > 10$ braucht man nach der oberen Schranke mindestens $2^{10} = 1024$ Summanden; eine Rechnung mit exakten Brüchen ergibt, dass s_n die Zahl 10 erst bei $n = 12\,367$ übersteigt. Numerische Experimente hätten die Divergenz kaum nahegelegt.

6.2 Nichtnegative Glieder und absolute Konvergenz

Satz 6.7. Eine Reihe $\sum a_k$ mit reellen Gliedern $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist. In diesem Fall ist ihr Wert das Supremum der Partialsummen.

Beweis. Wegen $a_k \geq 0$ wächst (s_n) monoton. Nach dem Monotonieprinzip (Satz 4.16) konvergiert (s_n) genau dann, wenn sie beschränkt ist, und dann gegen das Supremum ihrer Glieder; andernfalls gilt $s_n \to \infty$. □

Für eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern schreibt man deshalb $\sum a_k < \infty$ für „konvergent“; divergiert sie, so streben die Partialsummen gegen $+\infty$ (Satz 4.16 (2)).

Satz 6.7 macht Reihen mit nichtnegativen Gliedern übersichtlich: Es kommt nur darauf an, ob die Partialsummen beschränkt bleiben, und das zeigt man durch Vergleich mit einer bekannten Reihe. Bei wechselnden Vorzeichen oder komplexen Gliedern fehlt dieser Hebel. Dort können sich große Glieder gegenseitig aufheben, und ob sie es tun, kann von der Reihenfolge abhängen, wie die Leitfrage zeigt. Naheliegend ist, die Vorzeichen zu vergessen und nur die Beträge zu betrachten. Konvergiert die Reihe der Beträge, so ist das Aufheben für die Konvergenz gar nicht nötig. Diese Eigenschaft erhält einen Namen; Abschnitt 6.5 zeigt, dass sie genau die Bedingung ist, nach der die Leitfrage fragt (Folgerung 6.27).

Definition 6.8. Die Reihe $\sum a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |a_k|$ konvergiert.

Satz 6.9. Jede absolut konvergente Reihe konvergiert, und

$$\Big|\sum_{k=m}^{\infty} a_k\Big| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung für endliche Summen (Folgerung 3.24) ist $|\sum_{k=n+1}^{p} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{p} |a_k|$. Erfüllt $\sum |a_k|$ das Cauchy-Kriterium, so also auch $\sum a_k$. Die Ungleichung gilt für alle Partialsummen, $|s_n| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$, und überträgt sich nach Satz 4.10 auf den Grenzwert, weil $|s_n| \to |s|$ (Satz 4.9 (3)). □

Die Umkehrung ist falsch: Die alternierende harmonische Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ konvergiert (Abschnitt 6.4), die Reihe ihrer Beträge ist die harmonische Reihe und divergiert (Satz 6.6).

Satz 6.10 (Majoranten- und Minorantenkriterium). Seien (a_k) komplex und (b_k) reell, und es gebe N mit $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq N$.

1. Konvergiert $\sum b_k$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut. ($\sum b_k$ heißt *Majorante*.)

2. Divergiert $\sum |a_k|$, so divergiert $\sum b_k$. Insbesondere: Ist $0 \le c_k \le a_k$ reell für $k \ge N$ und divergiert $\sum c_k$, so divergiert $\sum a_k$. ($\sum c_k$ heißt *Minorante*.)

Beweis. (1) Nach Satz 6.3 (2) genügt es, die Reihen ab $k = N$ zu betrachten. Dort ist $\sum_{k=N}^{n} |a_k| \le \sum_{k=N}^{n} b_k \le \sum_{k=N}^{\infty} b_k$, wobei die letzte Ungleichung wegen $b_k \ge |a_k| \ge 0$ gilt; die Partialsummen von $\sum |a_k|$ sind beschränkt, und Satz 6.7 liefert die Behauptung. (2) ist die Kontraposition von (1); für den Zusatz wende man (2) auf c_k und $b_k = a_k$ an. □

Beispiel. Für $k \ge 2$ ist $\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Die Teleskopreihe $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$ hat den Wert 1. Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, mit Wert höchstens 2. (Der Wert ist $\frac{\pi^2}{6}$; das wird in diesem Kurs nicht bewiesen.)

Der Vergleich mit $\sum \frac{1}{k}$ und $\sum \frac{1}{k^2}$ entscheidet viele Fälle. Allgemeiner gilt:

Satz 6.11 (Verdichtungssatz). Sei $(a_k)_{k\ge1}$ reell, monoton fallend und $a_k \ge 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j}$ konvergiert.

Beweisidee. Man fasst die Glieder in Blöcke mit den Indizes von 2^j bis $2^{j+1}-1$ zusammen. Jeder Block hat 2^j Glieder, und wegen der Monotonie liegt jedes zwischen dem letzten Glied des Blocks und dem ersten.

Beweis. Seien $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $t_m = \sum_{j=0}^{m} 2^j a_{2^j}$. Beide Folgen wachsen monoton; nach Satz 6.7 genügt es, die Beschränktheit zu vergleichen.

Abschätzung nach oben: Für $n \le 2^{m+1} - 1$ ist wegen $a_k \ge 0$

$$s_n \le \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k \le \sum_{j=0}^{m} 2^j a_{2^j} = t_m,$$

weil der j-te Block 2^j Glieder hat, jedes höchstens a_{2^j}. Ist (t_m) beschränkt, so auch (s_n), denn zu jedem n gibt es m mit $n < 2^{m+1}$ (etwa $m = n$, da $2^{n+1} > n$).

Abschätzung nach unten:

$$s_{2^m} = a_1 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \ge a_1 + \sum_{j=1}^{m} 2^{j-1} a_{2^j} \ge \frac{1}{2} t_m,$$

weil der j-te Block hier 2^{j-1} Glieder hat, jedes mindestens a_{2^j}. Ist (s_n) beschränkt, so auch (t_m). □

Folgerung 6.12. Für $s \in \mathbb{N}$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ genau dann, wenn $s \ge 2$.

Beweis. Die Glieder k^{-s} fallen monoton und sind positiv. Es ist $2^j(2^j)^{-s} = (2^{1-s})^j$; die verdichtete Reihe ist die geometrische Reihe mit $q = 2^{1-s}$. Sie konvergiert genau dann, wenn $2^{1-s} < 1$, also $s \geq 2$ (Satz 6.2). □

Dieselbe Rechnung gilt für jedes reelle $s > 0$, sobald Potenzen mit reellen Exponenten und die Regel $(2^j)^{-s} = (2^{-s})^j$ zur Verfügung stehen (Einheit 9): Dann konvergiert $\sum k^{-s}$ genau für $s > 1$. Ebenso entscheidet der Verdichtungssatz über $\sum \frac{1}{k \ln k}$, die divergiert, und $\sum \frac{1}{k(\ln k)^2}$, die konvergiert, sobald der Logarithmus zur Verfügung steht (Einheit 9). Einheit 13 gewinnt beide Ergebnisse und die Aussage für reelle s noch einmal aus dem Integralkriterium (Folgerung 13.17). Aufgabe R5 behandelt zwei Reihen derselben Art ohne Logarithmus.

Bemerkung (Grenzwertvergleich). Seien $a_k, b_k > 0$ und $\frac{a_k}{b_k} \to c$ mit $c > 0$. Dann konvergieren $\sum a_k$ und $\sum b_k$ entweder beide oder keine. Denn es gibt N mit $|\frac{a_k}{b_k} - c| < \frac{c}{2}$ für $k \geq N$, also $\frac{c}{2} b_k \leq a_k \leq 2c\, b_k$; nach Satz 6.10 ist jeweils die eine Reihe bis auf einen Faktor Majorante der anderen. So folgt etwa die Konvergenz von $\sum \frac{k+1}{k^3+1}$ aus $\frac{k+1}{k^3+1} \Big/ \frac{1}{k^2} = \frac{k^3+k^2}{k^3+1} \to 1$ und Folgerung 6.12. Man rechnet damit nur das Verhalten der Glieder für große k aus und überlässt den Rest einer bekannten Reihe.

6.3 Wurzel- und Quotientenkriterium

Beide Kriterien vergleichen mit der geometrischen Reihe. Sie verlangen weniger Einfallsreichtum als die Wahl einer Majorante, entscheiden dafür aber weniger Fälle.

Das Wurzelkriterium verlangt k-te Wurzeln aus den Gliedern. Damit man sie bei Gliedern auswerten kann, in denen Konstanten oder Potenzen von k als Faktoren stehen, braucht man zwei Grenzwerte aus Einheit 4.

Lemma 6.13. (a) Für jedes $c > 0$ gilt $c^{1/k} \to 1$. (b) Es gilt $k^{1/k} \to 1$.

Beweis. Das sind die Teile (2) und (3) von Satz 4.12. □

Für $a_k = c\, k^m q^k$ mit $c > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{C}$ ist $\sqrt[k]{|a_k|} = c^{1/k}\,(k^{1/k})^m\,|q|$, denn beide Seiten sind nichtnegativ und haben die k-te Potenz $|a_k|$ (Eindeutigkeit in Satz 2.39). Nach Lemma 6.13 und Satz 4.9 folgt $\sqrt[k]{|a_k|} \to |q|$: Konstanten und Potenzen von k ändern am Ausgang des Wurzelkriteriums nichts.

Satz 6.14 (Wurzelkriterium). Sei (a_k) eine komplexe Folge.

1. Gibt es $q < 1$ und N mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für alle $k \geq N$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut.
2. Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k, so divergiert $\sum a_k$.

Insbesondere sei $\rho = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0,\infty]$; nach Definition 4.25 ist $\rho = \infty$, wenn die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})$ unbeschränkt ist, und sonst $\rho = \inf_n \sigma_n$ mit den Endstück-Suprema $\sigma_n = \sup_{k\ge n} \sqrt[k]{|a_k|}$. Für $\rho < 1$ konvergiert $\sum a_k$ absolut, für $\rho > 1$ divergiert sie.

Beweis. (1) Für $k \ge N$ ist $|a_k| \le q^k$; die geometrische Reihe $\sum q^k$ ist eine Majorante (Satz 6.2, Satz 6.10). (2) Dann ist $|a_k| \ge 1$ für unendlich viele k, (a_k) ist keine Nullfolge, und Folgerung 6.5 liefert die Divergenz.

Zum Zusatz: Sei $\rho < 1$ und $q = \frac{1+\rho}{2}$, also $\rho < q < 1$. Dann ist die Folge beschränkt, und die Endstück-Suprema σ_n fallen gegen $\rho = \inf_n \sigma_n$. Es gibt also N mit $\sigma_N < q$, und für $k \ge N$ ist $\sqrt[k]{|a_k|} \le \sigma_N < q$; Teil (1) gilt. Sei $\rho > 1$. Ist die Folge beschränkt, so ist $\sigma_n \ge \rho > 1$ für jedes n; die Zahl 1 ist also keine obere Schranke von $\{\sqrt[k]{|a_k|} : k \ge n\}$, und es gibt $k \ge n$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$. Ist sie unbeschränkt, so ist auch jedes Endstück unbeschränkt (sonst wäre das Maximum seiner Schranke und der endlich vielen übrigen Glieder eine Schranke der ganzen Folge), und wieder gibt es zu jedem n ein $k \ge n$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$. In beiden Fällen gilt Teil (2). □

Satz 6.15 (Quotientenkriterium). Sei (a_k) eine komplexe Folge mit $a_k \ne 0$ für alle $k \ge N_0$.

1. Gibt es $q < 1$ und $N \ge N_0$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q$ für alle $k \ge N$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut.
2. Gibt es $N \ge N_0$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ für alle $k \ge N$, so divergiert $\sum a_k$.

Insbesondere seien $\lambda = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in [0,\infty]$ wie im Wurzelkriterium und $\mu = \liminf_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in [0,\infty]$ (Definition 4.25). Die Quotientenfolge ist durch 0 nach unten beschränkt; mit den Endstück-Infima $\tau_n = \inf_{k\ge n} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ ist $-\tau_n = \sup_{k\ge n}\left(-\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$ (Folgerung 2.35), und Definition 4.25 gibt $\mu = \sup_{n\ge N_0} \tau_n$, bei unbeschränkten τ_n also $\mu = \infty$. Für $\lambda < 1$ konvergiert $\sum a_k$ absolut, für $\mu > 1$ divergiert sie.

Beweis. (1) Durch Induktion ist $|a_k| \le |a_N| q^{k-N}$ für $k \ge N$. Die Reihe $\sum_{k\ge N} |a_N| q^{k-N}$ ist das $|a_N|$-fache der geometrischen Reihe und konvergiert (Satz 6.2, Satz 6.3 (1), (2)); nach Satz 6.10 konvergiert $\sum a_k$ absolut. (2) Dann ist $|a_k| \ge |a_N| > 0$ für $k \ge N$; die Glieder bilden keine Nullfolge.

Zum Zusatz: Ist $\lambda < 1$, so liefert dasselbe Argument wie beim Wurzelkriterium ein $N \ge N_0$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le \frac{1+\lambda}{2}$ für $k \ge N$, und (1) gilt. Sei $\mu > 1$. Die Infima τ_n existieren, weil die Quotienten positiv sind. Wähle r mit $1 < r < \mu$ (etwa $r = 2$ im Fall $\mu = \infty$). Weil

r keine obere Schranke der τ_n ist, gibt es $N \geq N_0$ mit $\tau_N > r$, also $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq \tau_N > 1$ für $k \geq N$, und (2) gilt. □

Bemerkung (Grenzen der beiden Kriterien). (a) Teil (1) des Quotientenkriteriums verlangt eine feste Schranke $q < 1$; $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$ allein genügt nicht (G3). (b) Ist $\lim|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1$ oder $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, so entscheidet dieser Grenzwert allein nichts (G4); Teil (1) ist dann nicht anwendbar, Teil (2) zeigt höchstens noch Divergenz, etwa für $a_k = 1$. Aufgabe R2 (b) zeigt eine Reihe, bei der der Quotient gegen 1 geht, die Glieder eine Nullfolge bilden und erst ein Vergleich entscheidet. (c) Das Wurzelkriterium ist stärker: Aus $\limsup|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$ folgt $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ (Aufgabe V1), aber nicht umgekehrt (Abschnitt 6.8, Beispiel 3). Das Quotientenkriterium ist dafür oft leichter auszurechnen, etwa bei Fakultäten.

Beispiel (Exponentialreihe). Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ absolut. Für $z = 0$ ist das klar. Für $z \neq 0$ sind alle Glieder von null verschieden, und $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \frac{|z|}{k+1}$. Diese Quotienten streben nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.9 gegen 0; als konvergente Folge sind sie beschränkt (Satz 4.7), nach Satz 4.28 ist also auch ihr Limes superior $\lambda = 0 < 1$. Der Zusatz zum Quotientenkriterium liefert die absolute Konvergenz. Der Wert dieser Reihe ist die Exponentialfunktion, mit der Einheit 9 beginnt.

6.4 Alternierende Reihen

Alle Kriterien der Abschnitte 6.2 und 6.3 beweisen absolute Konvergenz; sie sehen nur die Beträge $|a_k|$. Für die Reihe S der Leitfrage helfen sie nicht: Die Beträge ihrer Glieder bilden die harmonische Reihe, und die divergiert. Konvergiert S trotzdem, dann nur, weil sich positive und negative Glieder gegenseitig aufheben. Das Leibniz-Kriterium erfasst den einfachsten Fall dieses Aufhebens: Die Vorzeichen wechseln regelmäßig, und die Beträge fallen gegen null.

Satz 6.16 (Leibniz-Kriterium). Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_k \to 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$, und für den Wert s und die Partialsummen s_n gilt

$$|s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Genauer liegt s für jedes n zwischen s_n und s_{n+1}.

Beweisidee. Die Partialsummen springen abwechselnd nach oben und unten, mit immer kleineren Sprüngen. Die geraden fallen, die ungeraden wachsen, und die Intervalle zwischen ihnen bilden eine Intervallschachtelung.

Beweis. Aus $a_k \downarrow 0$ (die Folge (a_k) fällt monoton gegen 0) folgt $a_k \geq 0$ (Satz 4.10). Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist

$$s_{2m+2} = s_{2m} - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \leq s_{2m}, \qquad s_{2m+3} = s_{2m+1} + (a_{2m+2} - a_{2m+3}) \geq s_{2m+1},$$

und $s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \leq s_{2m}$. Die Intervalle $I_m = [s_{2m+1}, s_{2m}]$ sind also geschachtelt, und ihre Längen a_{2m+1} gehen gegen null. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3)) gibt es genau ein s in allen I_m, und $s_{2m} \to s, s_{2m+1} \to s$ (Lemma 5.6). Dann konvergiert $s_n \to s$: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es M mit $|s_{2m} - s| < \varepsilon$ und $|s_{2m+1} - s| < \varepsilon$ für $m \geq M$, also $|s_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq 2M$.

Fehlerabschätzung: Für $n = 2m$ ist $s \in I_m$, also $s_{n+1} \leq s \leq s_n$ und $|s - s_n| \leq s_{2m} - s_{2m+1} = a_{n+1}$. Für $n = 2m + 1$ ist $s \in I_{m+1} \subseteq [s_{2m+1}, s_{2m+2}]$, also $s_n \leq s \leq s_{n+1}$ und $|s - s_n| \leq s_{2m+2} - s_{2m+1} = a_{n+1}$. □

Der Beweis ist eine direkte Anwendung einer der vier Gestalten der Vollständigkeit. In $\mathbb{Q}$ gilt das Kriterium nicht: Die Glieder können rational sein, der Wert nicht. Ein Beispiel ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$, das nach Satz 4.21 irrational ist (Aufgabe R4).

Beispiel (alternierende harmonische Reihe). $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ konvergiert nach Leibniz (mit $a_k = \frac{1}{k+1}$, $k \geq 0$). Ihr Wert S liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen, insbesondere zwischen $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ und $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Nach Satz 6.6 konvergiert sie nicht absolut. (Es ist $S = \ln 2$; das beweist Satz 11.10 (4), auf anderem Weg noch einmal Abschnitt 14.11, Beispiel 2. Hier wird das nicht benutzt.)

Definition 6.17. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt *bedingt konvergent*.

Die alternierende harmonische Reihe ist bedingt konvergent. Der nächste Abschnitt zeigt, dass der Unterschied zwischen absoluter und bedingter Konvergenz genau der Unterschied ist, auf den die Leitfrage zielt.

Das Leibniz-Kriterium ist ein Sonderfall eines Kriteriums, das auch für komplexe Reihen gilt. Sein Werkzeug ist eine Umformung, die für Summen leistet, was später die partielle Integration für Integrale leistet.

Lemma 6.25 (Abelsche partielle Summation). Seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ komplexe Zahlen, $A_0 = 0$ und $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ für $1 \leq k \leq n$. Dann gilt für $0 \leq m < n$

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_m b_{m+1} + \sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Beweis. Mit $a_k = A_k - A_{k-1}$ und der Indexverschiebung $k \mapsto k+1$ in der zweiten Summe ist

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

Man trennt in der ersten Summe den Summanden $k = n$ ab, in der zweiten den Summanden $k = m$, und fasst die übrigen Summanden mit gleichem k zusammen. □

Satz 6.26 (Dirichlet-Kriterium). Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine komplexe Folge mit beschränkten Partialsummen, $|A_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq M$ für alle n, und sei $(b_k)_{k\geq 1}$ reell, monoton fallend mit $b_k \to 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Beweis. Aus $b_k \downarrow 0$ folgt $b_k \geq 0$ (Satz 4.10) und $b_k - b_{k+1} \geq 0$. Nach Lemma 6.25 und der Dreiecksungleichung ist für $n > m \geq 0$

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\Big| \leq Mb_n + Mb_{m+1} + M\sum_{k=m+1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) = 2Mb_{m+1},$$

denn die letzte Summe ist eine Teleskopsumme mit dem Wert $b_{m+1} - b_n$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $2Mb_{m+1} < \varepsilon$ für $m \geq N$, und Satz 6.4 liefert die Konvergenz. □

Mit $a_k = (-1)^{k+1}$ sind die Partialsummen 1 oder 0, und man erhält die Konvergenzaussage des Leibniz-Kriteriums; die Fehlerschranke liefert dieser Weg nicht. Mit $a_k = z^k$ für $|z| = 1$, $z \neq 1$, sind die Partialsummen nach der geometrischen Summe durch $\frac{2}{|1-z|}$ beschränkt; daraus folgt die Konvergenz von $\sum \frac{z^k}{k}$ (Aufgabe V4). Lemma 6.25 trägt auch den Abelschen Grenzwertsatz (Einheit 14, Satz 14.22).

Bemerkung (Allgemeinheit). Der Beweis braucht von (b_k) nur $b_k \to 0$ und die Konvergenz von $\sum |b_k - b_{k+1}|$: Dann ist die linke Seite höchstens $M|b_n| + M|b_{m+1}| + M\sum_{k>m}|b_k - b_{k+1}|$, und das wird für große m klein. In dieser Form darf (b_k) komplex sein.

6.5 Umordnungen

Definition 6.18. Ist $\sigma\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv, so heißt $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Jedes Glied kommt in der Umordnung genau einmal vor; nur die Reihenfolge ist anders. Für endliche Summen ändert das nichts (allgemeines Kommutativgesetz, Einheit 1, Abschnitt 1.6). Für eine Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ erklärt man Umordnungen ebenso mit Bijektionen der Menge $\{k \in \mathbb{Z} : k \geq m\}$ auf sich; mit der Verschiebung $k \mapsto k - m$ führt man das auf den Fall $m = 0$ zurück, und die folgenden Sätze gelten für jedes m.

Satz 6.19 (Umordnungssatz). Ist $\sum a_k$ absolut konvergent, so ist jede Umordnung absolut konvergent und hat denselben Wert.

Beweisidee. Nach endlich vielen Gliedern der Umordnung sind die ersten N Glieder der ursprünglichen Reihe alle verbraucht; der Unterschied besteht dann nur aus Gliedern mit großem Index, deren Beträge zusammen klein sind.

Beweis. Sei $s = \sum a_k$, $\alpha = \sum |a_k|$ und σ bijektiv. Die Partialsummen von $\sum_j |a_{\sigma(j)}|$ sind durch α beschränkt, denn $\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \subseteq \{0, \dots, K\}$ mit $K = \max_{j \le n} \sigma(j)$ und daher $\sum_{j=0}^{n} |a_{\sigma(j)}| \le \sum_{k=0}^{K} |a_k| \le \alpha$. Nach Satz 6.7 konvergiert die Umordnung absolut.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 6.3 (3), angewandt auf $\sum |a_k|$, gibt es N mit $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$; dann ist auch $|s - \sum_{k=0}^{N} a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ nach Satz 6.9. Sei $J = \max\{\sigma^{-1}(0), \dots, \sigma^{-1}(N)\}$. Für $n \ge J$ enthält $\{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$ alle Indizes $0, \dots, N$, und

$$\sum_{j=0}^{n} a_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{N} a_k = \sum_{k \in F_n} a_k, \qquad F_n = \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\} \setminus \{0, \dots, N\}.$$

Alle Indizes in F_n sind größer als N, also ist der Betrag dieser Summe nach Folgerung 3.24 höchstens $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zusammen ist $|\sum_{j=0}^{n} a_{\sigma(j)} - s| < \varepsilon$ für $n \ge J$. □

Für bedingt konvergente Reihen gilt das Gegenteil, und zwar in schärfster Form.

Lemma 6.20. Sei $\sum a_k$ eine bedingt konvergente reelle Reihe, $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$ und $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$. Dann divergieren $\sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$. Insbesondere gibt es unendlich viele k mit $a_k \ge 0$ und unendlich viele mit $a_k < 0$.

Beweis. Es ist $a_k = a_k^+ - a_k^-$ und $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$. Konvergierte $\sum a_k^+$, so auch $\sum a_k^- = \sum(a_k^+ - a_k)$ und damit $\sum |a_k|$ (Satz 6.3 (1)); das widerspricht der Annahme. Ebenso für $\sum a_k^-$. Gäbe es nur endlich viele k mit $a_k \ge 0$, so hätte $\sum a_k^+$ nur endlich viele von null verschiedene Glieder und konvergierte; entsprechend für $a_k < 0$. □

Die positiven Glieder allein haben also eine unendliche Summe, die negativen ebenso, und die Konvergenz von $\sum a_k$ beruht darauf, dass sich beide in der gegebenen Reihenfolge gegenseitig aufheben.

Satz 6.21 (Riemannscher Umordnungssatz). Sei $\sum a_k$ eine bedingt konvergente reelle Reihe und $c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Umordnung von $\sum a_k$ mit dem Wert c.

Beweisidee. Man nimmt nichtnegative Glieder in ihrer Reihenfolge, bis die Summe c übersteigt, dann negative, bis sie wieder höchstens c ist, und so fort. Das geht, weil beide Vorräte unbeschränkte Summen haben, und es konvergiert gegen c, weil die Glieder gegen null gehen.

Beweis. Seien $p_0 < p_1 < \dots$ die Indizes k mit $a_k \ge 0$ und $q_0 < q_1 < \dots$ die mit $a_k < 0$, der Größe nach aufgezählt; beide Mengen sind nach Lemma 6.20 unendlich und zerlegen $\mathbb{N}_0$. Die Umordnung wird rekursiv festgelegt, und zwar mit dem Rekursionssatz (Abschnitt 1.6) für Tripel $(T, r, r') \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$: T ist die bisherige Summe, r und r' zählen die schon verwendeten p- und q-Indizes; die Aufzählung der Größe nach ist die

aus dem Beweis von Lemma 2.43. Es wird nichts ausgewählt. Seien $T_{-1} = 0$ und, wenn $\sigma(0), \dots, \sigma(j-1)$ und $T_{j-1} = \sum_{i<j} a_{\sigma(i)}$ bestimmt sind:

- ist $T_{j-1} \le c$, so sei $\sigma(j)$ der erste noch nicht verwendete Index p_r;
- ist $T_{j-1} > c$, so sei $\sigma(j)$ der erste noch nicht verwendete Index $q_{r'}$.

Dann ist $T_j = T_{j-1} + a_{\sigma(j)}$. Die p-Indizes werden in ihrer Reihenfolge verwendet, ebenso die q-Indizes; σ ist injektiv.

Beide Sorten kommen unendlich oft vor. Würden ab einer Stelle j_0 nur noch p-Indizes gewählt, so wäre $T_j \le c$ für alle $j \ge j_0 - 1$, und $T_j - T_{j_0}$ wäre eine Partialsumme eines Endstücks von $\sum a_k^+$; diese sind nach Lemma 6.20 und Satz 6.3 (2) unbeschränkt. Widerspruch. Würden ab einer Stelle nur noch q-Indizes gewählt, so wäre $T_j > c$ für alle späteren j, während T_j um Partialsummen eines Endstücks von $\sum a_k^-$ fällt, die ebenfalls unbeschränkt sind. Widerspruch. Also wird jedes p_r und jedes q_r einmal verwendet, und σ ist surjektiv, also bijektiv.

Konvergenz gegen c. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_k \to 0$ gibt es K mit $|a_k| < \varepsilon$ für $k \ge K$. Da σ bijektiv ist, gibt es J mit $\sigma(j) \ge K$ für alle $j > J$ (man nehme $J = \max(\{0\} \cup \{\sigma^{-1}(k) : k < K\})$). Weil beide Sorten unendlich oft vorkommen, gibt es Indizes $J < j < j'$ mit $T_{j-1} > c$ und $T_{j'-1} \le c$. Sei j_1 der kleinste Index $\ge j$ mit $T_{j_1} \le c$; dann ist $J < j_1 < j'$ und $T_{j_1-1} > c \ge T_{j_1}$, also $\sigma(j_1)$ ein q-Index und $0 \le c - T_{j_1} < T_{j_1-1} - T_{j_1} = -a_{\sigma(j_1)} < \varepsilon$. Also $|T_{j_1} - c| < \varepsilon$.

Für $j \ge j_1$ gilt $|T_j - c| < \varepsilon$, durch Induktion: Gelte es für j. Ist $T_j \le c$, so ist $a_{\sigma(j+1)} \in [0, \varepsilon)$ und $c - \varepsilon < T_j \le T_{j+1} < c + \varepsilon$. Ist $T_j > c$, so ist $a_{\sigma(j+1)} \in (-\varepsilon, 0)$ und $c - \varepsilon < T_{j+1} < T_j < c + \varepsilon$. Also $T_j \to c$. □

Ebenso gibt es Umordnungen, deren Partialsummen gegen $+\infty$ streben (Aufgabe V3). Satz 6.21 trägt den Namen Bernhard Riemanns. Zusammen mit Satz 6.19 kennzeichnet er die absolute Konvergenz, und zwar auch für komplexe Reihen:

Folgerung 6.27. Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ komplexer Zahlen sind gleichwertig:

1. $\sum a_k$ konvergiert absolut.
2. Jede Umordnung von $\sum a_k$ konvergiert, und alle haben denselben Wert.

Beweis. (1) ⇒ (2) ist Satz 6.19. (2) ⇒ (1): Mit der identischen Umordnung konvergiert $\sum a_k$, nach Satz 6.3 (4) also auch $\sum \operatorname{Re} a_k$ und $\sum \operatorname{Im} a_k$. Angenommen, $\sum |a_k|$ divergiert. Wegen $|a_k| \le |\operatorname{Re} a_k| + |\operatorname{Im} a_k|$ (Satz 3.9 (4)) divergiert dann nach Satz 6.3 (1) und Satz 6.10 eine der Reihen $\sum |\operatorname{Re} a_k|$, $\sum |\operatorname{Im} a_k|$. Ist es die zweite, so ersetze man a_k durch $-ia_k$; wegen $\operatorname{Re}(-ia_k) = \operatorname{Im} a_k$ und $\sum_j (-i) a_{\sigma(j)} = -i \sum_j a_{\sigma(j)}$ (Satz 6.3 (1)) ändert das an (2) nichts. Also ist $\sum \operatorname{Re} a_k$ bedingt konvergent, und nach Satz 6.21 gibt es Umordnungen σ, σ' mit $\sum_j \operatorname{Re} a_{\sigma(j)} = 0$ und $\sum_j \operatorname{Re} a_{\sigma'(j)} = 1$. Nach (2) konvergieren $\sum_j a_{\sigma(j)}$ und $\sum_j a_{\sigma'(j)}$ gegen denselben Wert s; nach Satz 6.3 (4) und Satz 4.5 ist dann

$\operatorname{Re} s = 0$ und $\operatorname{Re} s = 1$. Widerspruch. □

Absolute Konvergenz ist also genau die Konvergenz, die von der Reihenfolge nicht abhängt. Mit Aufgabe V3 kommt man sogar ohne die Bedingung „denselben Wert“ aus: Eine Umordnung, unter der die Partialsummen der Realteile gegen $+\infty$ streben, divergiert. Welche Werte die konvergenten Umordnungen einer bedingt konvergenten komplexen Reihe haben können, beantwortet der Satz von Lévy und Steinitz (ohne Beweis): Ihre Menge ist eine Gerade oder ganz $\mathbb{C}$. Dass Umordnungen, die jedes Glied nur um beschränkt viele Plätze verschieben, den Wert jeder konvergenten Reihe erhalten, zeigt Aufgabe V5.

6.6 Das Cauchy-Produkt

Multipliziert man zwei endliche Summen $\sum_{k=0}^{N} a_k$ und $\sum_{l=0}^{N} b_l$ aus, so entstehen alle Produkte $a_k b_l$. Bei Reihen muss man die unendlich vielen Produkte in eine Reihenfolge bringen. Ordnet man nach $k+l$, wie beim Ausmultiplizieren von Polynomen, so erhält man:

Definition 6.22. Das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Satz 6.23 (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen mit den Werten A und B. Dann ist ihr Cauchy-Produkt absolut konvergent mit dem Wert AB.

Beweisidee. Die Partialsumme $C_N = \sum_{n \le N} c_n$ ist die Summe der $a_k b_l$ über das Dreieck $k + l \le N$, das Produkt $A_N B_N$ der Partialsummen die über das Quadrat $k, l \le N$. Das Quadrat liegt im doppelt so großen Dreieck $k+l \le 2N$. Was dieses Dreieck mehr enthält, hat einen Index größer als N und wird durch die Reste der beiden Betragsreihen klein.

Beweis. Seien $A_N = \sum_{k=0}^{N} a_k$ und $B_N = \sum_{l=0}^{N} b_l$, ferner $\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ und $\beta = \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|$ mit den Resten $\rho_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|$ und $\rho'_N = \sum_{l=N+1}^{\infty} |b_l|$; nach Satz 6.3 (3) gilt $\rho_N \to 0$ und $\rho'_N \to 0$. Nach dem Distributivgesetz und dem allgemeinen Kommutativgesetz ist

$$C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{\substack{k,l \ge 0 \\ k+l \le N}} a_k b_l, \qquad A_N B_N = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} a_k b_l.$$

Absolute Konvergenz: Nach Folgerung 3.24 ist $|c_n| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$. Da alle Summan-

den $|a_k||b_l|$ nichtnegativ sind und aus $k+l \le N$ folgt, dass $k, l \le N$, ist

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \le \sum_{\substack{k,l\ge 0 \\ k+l\le N}} |a_k||b_l| \le \Big(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\Big)\Big(\sum_{l=0}^{N} |b_l|\Big) \le \alpha\beta,$$

und nach Satz 6.7 konvergiert $\sum c_n$ absolut, nach Satz 6.9 also auch (C_N).

Wert: Aus $k, l \le N$ folgt $k + l \le 2N$. Daher ist $C_{2N} - A_N B_N$ die Summe der $a_k b_l$ über die Paare mit $k + l \le 2N$, für die $k > N$ oder $l > N$ gilt; beides zugleich ist wegen $k + l \le 2N$ unmöglich. Im ersten Fall ist $N < k \le 2N$ und $l < N$, im zweiten $k < N$ und $N < l \le 2N$. Nach Folgerung 3.24 ist also

$$|C_{2N} - A_N B_N| \le \sum_{k=N+1}^{2N} |a_k| \sum_{l=0}^{N} |b_l| + \sum_{k=0}^{N} |a_k| \sum_{l=N+1}^{2N} |b_l| \le \rho_N \beta + \alpha \rho'_N.$$

Die rechte Seite strebt gegen 0, und $A_N B_N \to AB$ (Satz 4.9 (2)); also $C_{2N} \to AB$. Da (C_N) konvergiert und (C_{2N}) eine Teilfolge ist, folgt $C_N \to AB$ (Satz 4.24 (1)). □

Der Beweis benutzt von den Gliedern nur die Dreiecksungleichung, das Distributivgesetz und $|a_k b_l| = |a_k|\,|b_l|$; er gilt für reelle und komplexe Reihen gleichermaßen. Für die Voraussetzungen gibt es drei Stufen. Sind beide Reihen absolut konvergent, so gilt Satz 6.23. Ist eine absolut und die andere nur konvergent, so konvergiert das Cauchy-Produkt noch gegen AB, im Allgemeinen aber nicht absolut (Satz von Mertens, Aufgabe V2). Sind beide nur bedingt konvergent, so kann das Cauchy-Produkt divergieren (G6); konvergiert es aber, so ist sein Wert wieder AB (Abelscher Produktsatz, Einheit 14, Folgerung 14.23).

Ausblick (Funktionalgleichung). Wendet man Satz 6.23 auf $\sum \frac{z^k}{k!}$ und $\sum \frac{w^l}{l!}$ an, so ist $c_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!}$ nach dem Binomialsatz, der in $\mathbb{C}$ gilt. Die Exponentialreihe verwandelt also Summen in Produkte. Einheit 9 baut darauf die Exponentialfunktion, den Logarithmus und die Winkelfunktionen auf.

Zwischenbilanz: die Antwort auf die Leitfrage. Mit endlichen Summen rechnet man nach drei Gesetzen: Man darf Klammern setzen, Summanden vertauschen und Summen ausmultiplizieren. Für Reihen gilt Folgendes.

- *Gliedweise addieren und mit einer Zahl multiplizieren* darf man bei konvergenten Reihen immer (Satz 6.3 (1)).
- *Klammern setzen* darf man bei jeder konvergenten Reihe, der Wert bleibt (Aufgabe B3 (a)). Klammern *weglassen* darf man nicht ohne Weiteres: $(1-1)+(1-1)+\ldots$ hat den Wert 0, die Reihe $1-1+1-1+\ldots$ divergiert (Aufgabe B3 (b)).
- *Vertauschen* darf man bei absolut konvergenten Reihen ohne Einschränkung (Satz 6.19), und nur bei ihnen (Folgerung 6.27). Bei bedingt konvergenten reellen

Reihen kann eine Umordnung jeden reellen Wert annehmen (Satz 6.21); die Leitfrage zeigt das an einem Beispiel.

- *Ausmultiplizieren* in der Anordnung des Cauchy-Produkts darf man, wenn beide Reihen absolut konvergieren (Satz 6.23), und noch, wenn eine von ihnen absolut konvergiert (Aufgabe V2). Konvergieren beide nur bedingt, so kann das Produkt divergieren (G6).

In diesen Hinsichten verhält sich eine absolut konvergente Reihe wie eine endliche Summe. Der Wert einer bedingt konvergenten Reihe dagegen ist an die Reihenfolge ihrer Glieder gebunden.

6.7 Gegenbeispiele

(G1) Nullfolge ohne Konvergenz. $\sum \frac{1}{k}$ divergiert, obwohl $\frac{1}{k} \to 0$ (Satz 6.6). Folgerung 6.5 ist nur notwendig.

(G2) Leibniz ohne Monotonie. Sei $b_{2m-1} = \frac{1}{m}$ und $b_{2m} = \frac{1}{m^2}$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $b_k \geq 0$ und $b_k \to 0$, aber (b_k) fällt nicht monoton. Die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}b_k$ hat die Partialsummen

$$s_{2M} = \sum_{m=1}^{M}\Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\Big) = \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2} \geq \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} - 2,$$

die nach Satz 6.6 unbeschränkt sind. Die Reihe divergiert. Im Beweis von Satz 6.16 fallen die geraden Partialsummen nicht mehr.

(G3) Quotient kleiner als eins genügt nicht. Für $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \sqrt{\frac{k}{k+1}} < 1$ für alle k (beide Seiten sind nichtnegativ und haben dasselbe Quadrat, Satz 2.39). Wegen $\sqrt{k} \leq k$ ist aber $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$, und $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert (Satz 6.6, Satz 6.10 (2)). Eine feste Schranke $q < 1$ gibt es nicht: Für $0 < q < 1$ ist $\frac{k}{k+1} > q^2$ für alle $k > \frac{q^2}{1-q^2}$, also $\sqrt{\frac{k}{k+1}} > q$ für diese k; für $q \leq 0$ ist nichts zu zeigen.

(G4) Grenzfall eins. Für $a_k = \frac{1}{k}$ und $a_k = \frac{1}{k^2}$ gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ und, nach Lemma 6.13 (b), $\sqrt[k]{a_k} = (k^{1/k})^{-1} \to 1$ beziehungsweise $(k^{1/k})^{-2} \to 1$. Die erste Reihe divergiert, die zweite konvergiert. Der Grenzwert 1 von Quotient oder Wurzel entscheidet also nichts; in beiden Beispielen sind zudem alle Quotienten und für $k \geq 2$ alle Wurzeln kleiner als 1, so dass auch die Teile (2) nicht greifen.

(G5) Umordnung ändert den Wert. Die Leitfrage; ausgerechnet in Abschnitt 6.8, Beispiel 4.

(G6) Cauchy-Produkt zweier bedingt konvergenter Reihen. Sei $H_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$ für $m \in \mathbb{N}$ und

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k+1}, \qquad b_l = \frac{(-1)^l}{H_{l+1}} \qquad (k, l \in \mathbb{N}_0).$$

Die Folge (H_m) wächst streng und ist nach Satz 6.6 unbeschränkt; nach Satz 4.16 (2) und Satz 4.14 (1) fällt $\left(\frac{1}{H_{l+1}}\right)$ streng monoton gegen 0. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergieren also die alternierende harmonische Reihe $\sum a_k$ und die Reihe $\sum b_l$. Absolut konvergiert keine von beiden: Wegen $H_{l+1} \le l+1$ ist $\frac{1}{H_{l+1}} \ge \frac{1}{l+1}$, und $\sum \frac{1}{l+1}$ divergiert. Im Cauchy-Produkt haben alle Summanden von c_n das Vorzeichen $(-1)^k(-1)^{n-k} = (-1)^n$, und wegen $H_{n-k+1} \le H_{n+1}$ ist

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\,H_{n-k+1}} \ge \frac{1}{H_{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{H_{n+1}}{H_{n+1}} = 1.$$

Die Glieder c_n bilden keine Nullfolge, das Cauchy-Produkt divergiert (Folgerung 6.5). Die langsam fallenden Beträge $\frac{1}{H_{l+1}}$ gleichen gerade das Wachstum der harmonischen Summe aus, die in c_n steckt.

(G7) Majorante heißt Schranke für den Betrag. Aus $a_k \le b_k$ und der Konvergenz von $\sum b_k$ folgt nichts: $a_k = -1 \le \frac{1}{k^2}$. Satz 6.10 verlangt $|a_k| \le b_k$.

(G8) Verdichtung ohne Monotonie. Sei $a_k = 0$, wenn k eine Zweierpotenz ist, und $a_k = \frac{1}{k}$ sonst. Die verdichtete Reihe $\sum 2^j a_{2^j}$ hat nur Nullen und konvergiert. Aber $\sum_{k \le n} a_k \ge \sum_{k \le n} \frac{1}{k} - \sum_{j \ge 0} 2^{-j} = \sum_{k \le n} \frac{1}{k} - 2$ ist unbeschränkt. Im Beweis von Satz 6.11 versagt die obere Abschätzung, weil a_{2^j} nicht das größte Glied des Blocks ist.

6.8 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (die Zahl e als Reihe). Einheit 4 hat e als Grenzwert von $(1 + \frac{1}{n})^n$ erklärt (Definition 4.19) und in Satz 4.20 gezeigt, dass auch die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ gegen e streben. In der Sprache dieser Einheit lautet das:

> **Satz 6.24.** Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert absolut und hat den Wert e. Für ihre Reste gilt
>
> $$0 < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \le \frac{1}{n!\,n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$
>
> und e ist irrational.

Beweis. Die Glieder sind positiv; Konvergenz und absolute Konvergenz bedeuten hier dasselbe. Nach Satz 4.20 gilt $s_n \to e$, und nach Satz 6.3 (2) ist der Rest gleich $e - s_n$; Satz 4.20 gibt $0 < e - s_n \le \frac{1}{n!\,n}$. Die Irrationalität ist Satz 4.21. □

Die Konvergenz allein folgt jetzt auch aus dem Quotientenkriterium (Beispiel zur Exponentialreihe in Abschnitt 6.3, $z = 1$); den Wert liefert es nicht. Die Restabschätzung ist ein Vergleich mit einer geometrischen Reihe, und auf ihr beruht die Irrationalität. Zum Rechnen ist die Reihe der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ weit überlegen: Für $n = 9$ ist $\frac{1}{9!\cdot 9} = \frac{1}{3\,265\,920}$, die Partialsumme s_9 liefert e also mit einem Fehler unter 10^{-6}. Die Einschließung $a_n < e < b_n$ aus Satz 4.18 hat dagegen die Breite $b_n - a_n = \frac{a_n}{n} \ge \frac{2}{n}$ und schließt e erst für $n > 2 \cdot 10^6$ auf weniger als 10^{-6} ein. Die Reihe ist zugleich der Wert der Exponentialreihe an der Stelle 1; Einheit 9 setzt dort an.

Beispiel 2 (Quadrat der geometrischen Reihe). Für $|q| < 1$ ist $\sum q^k$ absolut konvergent. Das Cauchy-Produkt mit sich selbst hat die Glieder $c_n = \sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = (n+1)q^n$, also nach Satz 6.23

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Für $q = \frac{1}{2}$ ergibt das $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} = 4$. Die absolute Konvergenz der linken Seite hätte man auch mit dem Quotientenkriterium gesehen ($\frac{n+2}{n+1}|q| \to |q|$); den Wert liefert erst das Produkt.

Beispiel 3 (Wurzel- gegen Quotientenkriterium). Sei $a_k = 2^{(-1)^k - k}$ für $k \in \mathbb{N}$, also $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{16}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, … Die Quotienten sind

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} 2^{-3} = \frac{1}{8}, & k \text{ gerade}, \\ 2^1 = 2, & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Weder gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1$ ab einer Stelle noch $\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$ ab einer Stelle; das Quotientenkriterium entscheidet nichts ($\liminf = \frac{1}{8}$, $\limsup = 2$). Dagegen ist $\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(-1)^k/k}$, und wegen $2^{-1/k} \le 2^{(-1)^k/k} \le 2^{1/k}$ (dabei steht $2^{\pm 1/k}$ für $2^{1/k}$ beziehungsweise $(\frac{1}{2})^{1/k}$, Satz 2.39), Lemma 6.13 (a) mit $c = 2$ und $c = \frac{1}{2}$ und Satz 4.11 folgt $\sqrt[k]{a_k} \to \frac{1}{2}$. Das Wurzelkriterium liefert Konvergenz. (Direkt: $a_k \le 2 \cdot 2^{-k}$.)

Beispiel 4 (die Umordnung der Leitfrage). Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ und $S = \lim s_n$. Die Umordnung T der Leitfrage besteht aus Dreiergruppen

$$\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Sie ist eine Umordnung: Die ungeraden Nenner $2m-1$ treten in ihrer Reihenfolge auf, die geraden Nenner $2j$ als $4m-2$ für ungerades $j = 2m-1$ und als $4m$ für gerades $j = 2m$; jeder kommt genau einmal vor. Wegen $\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{4m-2} = \frac{1}{4m-2}$ ist jede Dreiergruppe gleich

$$\frac{1}{4m-2} - \frac{1}{4m} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\Big).$$

Für die Partialsummen T_n von T gilt also $T_{3M} = \frac{1}{2}s_{2M} \to \frac{1}{2}S$. Ferner unterscheiden sich T_{3M+1} und T_{3M+2} von T_{3M} um höchstens $\frac{1}{2M+1} + \frac{1}{4M+2} \to 0$. Damit konvergiert $T_n \to \frac{1}{2}S$. Weil $S \geq \frac{1}{2}$ nach dem Leibniz-Kriterium, ist $\frac{1}{2}S \neq S$. Das ist kein Widerspruch zu Satz 6.19: Die alternierende harmonische Reihe konvergiert nicht absolut.

Beispiel 5 (g-adische Brüche). Sei $g \geq 2$ eine natürliche Zahl und $(d_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von Ziffern $d_k \in \{0, 1, \dots, g-1\}$. Wegen $0 \leq d_k g^{-k} \leq (g-1)g^{-k}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (g-1)g^{-k} = (g-1) \cdot \frac{1/g}{1-1/g} = 1$$

konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} d_k g^{-k}$ nach Satz 6.10 absolut, und ihr Wert liegt in $[0,1]$. Für $g = 10$ ist das der Dezimalbruch $0{,}d_1d_2d_3\dots$; seine Partialsummen sind die linken Endpunkte der Intervallschachtelung aus Einheit 5, Abschnitt 5.7, Beispiel 3, wo auch gezeigt ist, dass jedes $x \in [0,1)$ so dargestellt werden kann (ebenso Einheit 2, Aufgabe V6). Für $g = 3$ und Ziffern $d_k = 2\varepsilon_k \in \{0, 2\}$ ist der Wert die Zahl $\Phi(\varepsilon)$ aus dem Beweis von Satz 2.47. Verschiedene Ziffernfolgen können denselben Wert haben: Nach derselben Rechnung ist $\sum_{k=2}^{\infty}(g-1)g^{-k} = \frac{1}{g}$, im Zehnersystem also $0{,}0999\dots = 0{,}1000\dots$

Periodische Brüche sind rational. Sei $d_{k+p} = d_k$ für alle $k \geq 1$ mit einer Periode $p \in \mathbb{N}$, und sei $D = \sum_{k=1}^{p} d_k g^{p-k}$. Der j-te Block aus p Gliedern hat die Summe $\sum_{k=(j-1)p+1}^{jp} d_k g^{-k} = g^{-(j-1)p} \sum_{k=1}^{p} d_k g^{-k} = D\, g^{-jp}$. Die Partialsummen der Blockreihe sind eine Teilfolge der Partialsummen der ursprünglichen Reihe (Satz 4.24 (1)), also nach Satz 6.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k g^{-k} = \sum_{j=1}^{\infty} D\, g^{-jp} = D \cdot \frac{g^{-p}}{1-g^{-p}} = \frac{D}{g^p - 1}.$$

Beispiel: $0{,}121212\dots$ hat $g = 10$, $p = 2$, $D = 12$, also den Wert $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Ist die Ziffernfolge erst ab einer Stelle $r+1$ periodisch, so ist der Wert nach Satz 6.3 (1), (2) ein endlicher g-adischer Bruch plus g^{-r} mal dem Wert eines rein periodischen, also ebenfalls rational; etwa $0{,}58333\dots = \frac{58}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{12}$.

Beispiel 6 (Kriterien wählen). Die folgenden Reihen zeigen, welches Kriterium wann greift.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+i)^k}$: Quotient der Beträge $\frac{(k+1)^2}{|1+i|\,k^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(1 + \frac{1}{k}\big)^2 \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ (Folgerung 3.23,

$|1+i| = \sqrt{2}$). Absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium. Das Polynom im Zähler ändert nichts; gegen eine geometrische Folge setzt es sich nie durch.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k\, k!}{(2k)!}$: Quotient $\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{2}{2k+1} \to 0$. Konvergent.
3. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \bigl(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\bigr)$: Es ist $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$; das fällt monoton gegen 0, weil der Nenner monoton wächst und unbeschränkt ist. Nach Leibniz konvergent. Wegen $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \geq \frac{1}{2(k+1)}$ hat die Betragsreihe eine divergente Minorante; die Reihe ist bedingt konvergent. Wurzel- und Quotientenkriterium versagen hier, beide Grenzwerte sind 1.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-k+1}$: Grenzwertvergleich mit $\frac{1}{k^2}$, Quotient $\frac{k^2}{k^2-k+1} \to 1$. Konvergent.

Ein Rezept, das immer entscheidet, gibt es nicht. Die Reihenfolge „Nullfolge? – geometrischer Vergleich (Quotient, Wurzel) – Vergleich mit $\sum k^{-s}$ – Vorzeichenwechsel (Leibniz, Dirichlet)“ erledigt aber die meisten Fälle dieses Kurses.

6.9 Ausblick

- **Potenzreihen (Einheit 14).** Wendet man das Wurzelkriterium auf $\sum c_k z^k$ an, so erhält man den Konvergenzradius $R = 1/\limsup \sqrt[k]{|c_k|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard, Satz 14.15). Innerhalb des Konvergenzkreises konvergiert eine Potenzreihe absolut (Satz 14.14); Umordnen (Satz 6.19) und Ausmultiplizieren (Satz 6.23) sind dort erlaubt.
- **Elementare Funktionen (Einheit 9).** Exponentialfunktion, Sinus und Kosinus werden als Werte absolut konvergenter Reihen definiert; die Funktionalgleichung ist das Cauchy-Produkt aus Abschnitt 6.6.
- **Integralkriterium (Einheit 13, Satz 13.16).** Für fallende $f \geq 0$ konvergiert $\sum f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergiert; der Verdichtungssatz ist ein diskretes Gegenstück dazu.
- **Werte.** Diese Einheit zeigt Konvergenz und Schranken, nur selten Werte. Einheit 13 beweist $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ (Abschnitt 13.10, Beispiel 7), Satz 11.10 (4) beweist $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$; Einheit 14 gibt mit dem Abelschen Grenzwertsatz einen zweiten Beweis (Abschnitt 14.11, Beispiel 2). Den Wert $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ beweist dieser Kurs nicht.
- **Vollständigkeit.** Cauchy-Kriterium, Majorantenkriterium und alle aus ihm abgeleiteten Kriterien beruhen auf der Cauchy-Vollständigkeit (Satz 4.31), das Leibniz-Kriterium auf dem Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15) und Satz 6.7 auf dem Monotonieprinzip (Satz 4.16).

- **Allgemeinheit.** Satz 6.4, Folgerung 6.5, Satz 6.9, Satz 6.10 (1), die Teile (1) von Wurzel- und Quotientenkriterium und Satz 6.19 benutzen vom Betrag nur $|x| \geq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$, $|cx| = |c|\,|x|$ und die Dreiecksungleichung, dazu das Cauchy-Kriterium. Sie gelten deshalb wörtlich für Reihen in jedem vollständigen normierten Raum, etwa in $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Abstand; Satz 6.23 zusätzlich, wenn ein bilineares (also mit der Addition distributives) Produkt mit $|xy| \leq |x|\,|y|$ erklärt ist, etwa für quadratische Matrizen. Die Sätze 6.7, 6.11, 6.16, 6.21 und Lemma 6.20 benutzen die Anordnung und gehören zu $\mathbb{R}$. Folgerung 6.27 bleibt in $\mathbb{R}^n$ richtig, in unendlichdimensionalen vollständigen normierten Räumen nicht: Dort gibt es stets Reihen, deren sämtliche Umordnungen konvergieren, ohne dass die Reihe absolut konvergiert (Satz von Dvoretzky und Rogers). Beide Aussagen über Folgerung 6.27 bleiben hier ohne Beweis.
- **Doppelreihen (ohne Beweis).** Die Aussage von Satz 6.23 ist ein Sonderfall eines allgemeinen Satzes über Doppelfolgen $(a_{kl})_{k,l\geq 0}$ komplexer Zahlen, die *absolut summierbar* sind, das heißt, für die die Summen $\sum_{k,l\leq N} |a_{kl}|$ beschränkt sind. Dann konvergiert für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Reihe $\sum_j a_{\tau(j)}$ absolut, alle mit demselben Wert s; jede Zeilenreihe $\sum_l a_{kl}$ und jede Spaltenreihe $\sum_k a_{kl}$ konvergiert absolut, und $s = \sum_k \sum_l a_{kl} = \sum_l \sum_k a_{kl}$ (großer Umordnungssatz). Sind $\sum a_k$ und $\sum b_l$ absolut konvergent, so ist $(a_k b_l)$ absolut summierbar, denn $\sum_{k,l\leq N} |a_k||b_l| = \big(\sum_{k\leq N} |a_k|\big)\big(\sum_{l\leq N} |b_l|\big) \leq \sum_k |a_k| \cdot \sum_l |b_l|$, und die Doppelsumme ist $\sum_k a_k \sum_l b_l = AB$. Zählt man die Paare Diagonale für Diagonale ab und fasst die Glieder jeder Diagonale $k + l = n$ zusammen (Aufgabe B3 (a)), so erhält man das Cauchy-Produkt. Der allgemeine Satz wird in diesem Kurs weder bewiesen noch gebraucht.

Zum Vergleich.[1] Der Stoff dieser Einheit gehört zum Kern jeder Analysis-Vorlesung. Parallel lesen kann man O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage 2016, § 4 (Reihen, geometrische Reihe), § 5 (b-adische Brüche), § 7 (Konvergenzkriterien für Reihen, Umordnung) und § 8 (Exponentialreihe, Cauchy-Produkt). An Forster lehnen sich an: der Beweis des Leibniz-Kriteriums (Satz 6.16), der wie § 7, Satz 4, mit der Monotonie der geraden und der ungeraden Partialsummen beginnt; die Intervallschachtelung und die Fehlerschranke sind hier hinzugefügt; ferner der Beweis des Umordnungssatzes 6.19, der ε wie § 7, Satz 8, teilt. Der Beweis des Satzes über das Cauchy-Produkt geht hier einen anderen Weg als bei Forster (§ 8, Satz 3). Aufgabe V1 und Beispiel 3 in Abschnitt 6.8 behandeln die Frage von Forsters Aufgabe 7.6, Aufgabe V3 entspricht Aufgabe 7.13 b), Aufgabe V5 (a) Aufgabe 7.12; den Verdichtungssatz und den Riemannschen Umordnungssatz stellt Forster als Aufgaben 7.3 und 7.13 a). Das Gegenbeispiel (G6) folgt in seiner Idee Aufgabe 8.2, mit anderen Reihen; diese Aufgabe steht mit Lösung im Übungsbuch zur Analysis 1 von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage 2011, als Aufgabe 8 B, der Riemannsche Umordnungssatz dort als Aufgabe 7 F.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 6

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Berechnen Sie die Werte der Reihen

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$,

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}\right)}$. Vergleichen Sie mit Aufgabe R2 (d).

R2. Entscheiden Sie, ob die Reihe konvergiert, absolut konvergiert oder divergiert, und nennen Sie das benutzte Kriterium:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} 5^{-k}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} 4^{-k}$ (Hinweis: Untersuchen Sie $2k\binom{2k}{k}4^{-k}$ auf Monotonie.),

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$,

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$,

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$,

(f) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+1} - k\right)$,

(g) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^4+1} - k^2\right)$.

Zeigen Sie in (b) außerdem, dass die Glieder eine Nullfolge bilden. Welche der Prüfungen „Nullfolge? – Quotient – Vergleich“ entscheidet dort?

R3. (a) Wie viele Glieder der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ muss man nach der Fehlerabschätzung des Leibniz-Kriteriums summieren, damit der Fehler kleiner als 10^{-3} ist?
(b) Sei $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ der Rest der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Zeigen Sie

$$\frac{1}{n+1} < r_n < \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie das kleinste n mit $r_n < 10^{-3}$ und vergleichen Sie mit (a).

R4. Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$. Folgern Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$ und begründen Sie, dass dieser Wert irrational ist.

R5. (*Verdichtung ohne Logarithmus.*) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\ell(k)$ die Anzahl der Ziffern von k im Zweiersystem, also $\ell(k) = j + 1$, wenn $j \in \mathbb{N}_0$ und $2^j \le k < 2^{j+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\ell(k)$ dadurch eindeutig bestimmt ist und dass $\ell(k) \le \ell(k')$ für $k \le k'$ gilt.

(b) Entscheiden Sie mit dem Verdichtungssatz, ob $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\ell(k)}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\ell(k)^2}$ konvergieren.

(c) Zeigen Sie, dass für beide Reihen der Quotient aufeinanderfolgender Glieder gegen 1 geht. Was folgt daraus für das Quotientenkriterium?

Stufe B – Beweisen

B1. Sei $a_k \ge 0$ und $\sum a_k$ konvergent.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum a_k^2$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ konvergiert. (Hinweis: Satz 1.25.)

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) falsch ist.

B2. Sei $(a_k)_{k\ge1}$ monoton fallend, $a_k \ge 0$ und $\sum a_k$ konvergent. Zeigen Sie $k\,a_k \to 0$. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Monotonie nicht entbehrlich ist.

B3. (*Klammern setzen.*) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ und $b_j = \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} a_k$ für $j \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Konvergiert $\sum a_k$, so konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ mit demselben Wert.

(b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Umkehrung falsch ist.

(c) Zeigen Sie: Gilt $a_k \to 0$ und $n_j - n_{j-1} \le L$ für alle j mit einem festen L, so folgt aus der Konvergenz von $\sum b_j$ die von $\sum a_k$.

B4. (*Anwendungen des Dirichlet-Kriteriums.*) Sei $(b_k)_{k\geq 1}$ reell, monoton fallend mit $b_k \to 0$.

(a) Die Folge $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ habe die Periode 3, mit $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ und $\varepsilon_3 = -2$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k b_k$ konvergiert.

(b) Die Folge $(\delta_k)_{k\geq 1}$ habe die Periode 3, mit $\delta_1 = \delta_2 = 1$ und $\delta_3 = -1$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k}$ divergiert. Welche Voraussetzung von Satz 6.26 ist verletzt?

(c) (*Abel-Kriterium.*) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente komplexe Reihe und $(c_k)_{k\geq 1}$ eine monotone, beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ konvergiert.

Stufe V – Vertiefen

V1. Sei $a_k \neq 0$ für alle k und die Folge $\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right)$ beschränkt. Zeigen Sie, dass dann auch $(\sqrt[k]{|a_k|})$ beschränkt ist und

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

gilt. Folgern Sie: Wo das Quotientenkriterium in der lim-sup-Form Konvergenz liefert, liefert sie auch das Wurzelkriterium.

V2. (*Satz von Mertens.*) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent mit Wert A und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ konvergent mit Wert B. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt gegen AB konvergiert.

V3. Sei $\sum a_k$ eine bedingt konvergente reelle Reihe. Zeigen Sie, dass es eine Umordnung gibt, deren Partialsummen gegen $+\infty$ streben.

V4. Untersuchen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz. (Hinweis für $|z| = 1$, $z \neq 1$: Satz 6.26.)

V5. (*Umordnungen mit beschränkter Verschiebung.*) Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit Wert s und $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv.

(a) Es gebe ein $L \in \mathbb{N}$ mit $|\sigma(j) - j| \leq L$ für alle j. Zeigen Sie, dass $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\sigma(j)}$ gegen s konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Umordnung T der Leitfrage keine solche Schranke L besitzt.

(c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Bedingung aus (a) nicht notwendig ist: Geben Sie eine Umordnung mit unbeschränkter Verschiebung an, die für *jede* konvergente Reihe den Wert erhält.

Lösungen

Lösung R1. (a) Wegen $k = (k+1) - 1$ ist $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Die Partialsummen sind Teleskopsummen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \to 1,$$

denn $0 < \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{n+1}$, und nach Satz 4.4 (1) und Satz 4.11 gilt $\frac{1}{(n+1)!} \to 0$.

(b) Nach Satz 6.3 (1) und Satz 6.2 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{3}\Big)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}.$$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$ mit $q = -\frac{1}{3}$, also $\frac{-1/3}{4/3} = -\frac{1}{4}$.

(d) Es ist $\sqrt{k(k+1)} = \sqrt{k}\sqrt{k+1}$, denn beide Seiten sind nichtnegativ und haben das Quadrat $k(k+1)$. Wegen $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\big(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\big)}.$$

Die Partialsummen sind $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, und $\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{n+1}} \to 0$ nach Satz 4.12 (1). Der Wert ist 1. In R2 (d) divergiert die Reihe mit den Gliedern $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$; der zusätzliche Faktor $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$, der selbst gegen 0 geht, macht sie konvergent.

Lösung R2. (a) Sei $c_k = \binom{2k}{k} 5^{-k}$. Wegen $\binom{2k+2}{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}\binom{2k}{k}$ ist

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2(2k+1)}{5(k+1)} = \frac{1}{5}\Big(4 - \frac{2}{k+1}\Big) < \frac{4}{5}.$$

Absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium (Satz 6.15 (1)) mit $q = \frac{4}{5}$.

(b) Sei $c_k = \binom{2k}{k} 4^{-k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Wie in (a) ist $\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2k+1}{2k+2} < 1$, aber $\frac{2k+1}{2k+2} \to 1$; eine feste Schranke $q < 1$ gibt es nicht, und der Quotient ist nie ≥ 1. Das Quotientenkriterium entscheidet nicht (vgl. (G3)). Sei $d_k = 2k\, c_k$ für $k \ge 1$. Dann ist $d_1 = 2 \cdot \frac{2}{4} = 1$ und

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{2k+1}{2k} > 1,$$

also $d_k \geq 1$ und $c_k \geq \frac{1}{2k}$ für alle $k \geq 1$. Die Reihe $\sum \frac{1}{2k}$ divergiert (Satz 6.6, Satz 6.3 (1)); nach dem Minorantenkriterium (Satz 6.10 (2)) divergiert $\sum c_k$.

Nullfolge: Sei $e_k = (2k+1)c_k^2$ für $k \geq 0$. Dann ist $e_0 = 1$ und wegen $(2k+2)^2 = (2k+1)(2k+3)+1$

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{2k+3}{2k+1}\Big(\frac{2k+1}{2k+2}\Big)^2 = \frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)^2} < 1,$$

also $e_k \leq 1$ und $0 < c_k \leq \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$. Nach Satz 4.12 (1) und Satz 4.11 gilt $c_k \to 0$. Die notwendige Bedingung (Folgerung 6.5) und das Quotientenkriterium entscheiden also beide nicht; nur der Vergleich entscheidet. Die Glieder liegen zwischen $\frac{1}{2k}$ und $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

(c) $\sqrt[k]{a_k} = \big(\frac{k}{k+1}\big)^k = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \leq \frac{1}{2}$, denn nach Bernoulli ist $(1+\frac{1}{k})^k \geq 1 + k \cdot \frac{1}{k} = 2$. Absolut konvergent nach dem Wurzelkriterium (Satz 6.14 (1)) mit $q = \frac{1}{2}$.

(d) $\sqrt{k(k+1)} \leq \sqrt{(k+1)^2} = k+1$, also $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \frac{1}{k+1}$. Die Reihe $\sum \frac{1}{k+1}$ divergiert (Satz 6.6 und Satz 6.3 (2)); nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe.

(e) Sei $f_k = \frac{k}{k^2+1}$. Wegen $0 < f_k < \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$ ist $f_k \to 0$ (Satz 4.11), und

$$f_k - f_{k+1} = \frac{k\big((k+1)^2+1\big) - (k+1)(k^2+1)}{(k^2+1)\big((k+1)^2+1\big)} = \frac{k^2+k-1}{(k^2+1)\big((k+1)^2+1\big)} > 0$$

für $k \geq 1$. Nach Leibniz konvergiert $\sum (-1)^k f_k$ (das Vorzeichen des ersten Glieds spielt keine Rolle, man betrachte $-\sum (-1)^{k-1} f_k$). Wegen $f_k \geq \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k}$ divergiert $\sum f_k$. Die Reihe ist bedingt konvergent.

(f) Es ist $\sqrt{k^2+1} - k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} > 0$. Mit $b_k = \frac{1}{k}$ ist

$$\frac{\sqrt{k^2+1}-k}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}+k} = \frac{1}{\sqrt{1+k^{-2}}+1} \to \frac{1}{2}$$

nach Satz 4.12 (1) und den Rechenregeln; dabei ist $\sqrt{k^2+1} = k\sqrt{1+k^{-2}}$, weil beide Seiten positiv sind und dasselbe Quadrat haben. Nach dem Grenzwertvergleich (Bemerkung in Abschnitt 6.2) und Satz 6.6 divergiert die Reihe. Ohne Grenzwert: $\sqrt{k^2+1} \leq k+1$ gibt $\sqrt{k^2+1} - k \geq \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{3k}$.

(g) Ebenso ist $0 < \sqrt{k^4+1} - k^2 = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}+k^2} \leq \frac{1}{2k^2}$. Die Reihe $\sum \frac{1}{2k^2}$ ist eine konvergente Majorante (Folgerung 6.12); absolut konvergent. Die Bauart ist dieselbe wie in (f), aber die Differenz ist hier von der Größenordnung $\frac{1}{k^2}$ statt $\frac{1}{k}$.

Lösung R3. (a) Die Beträge $\frac{1}{k^2}$ fallen monoton gegen 0. Nach Satz 6.16 ist der Fehler nach n Gliedern höchstens das nächste Glied $\frac{1}{(n+1)^2}$. Es ist $\frac{1}{(n+1)^2} < 10^{-3}$ genau dann, wenn $(n+1)^2 > 1000$. Wegen $31^2 = 961$ und $32^2 = 1024$ ist das für $n+1 \geq 32$ der Fall: 31 Glieder genügen. Die Abschätzung garantiert es für 30 Glieder nicht.

(b) Für $k \geq 2$ ist $k(k-1) < k^2 < k(k+1)$, nach (O6) also

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Nach dem Teleskopbeispiel in Abschnitt 6.1 ist $\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ und $\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$. Nach Satz 6.3 (1) ist daher

$$r_n - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)}\Big), \qquad \frac{1}{n} - r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2}\Big).$$

Beide Reihen haben positive Glieder; nach Satz 6.7 ist ihr Wert mindestens ihr erstes Glied, also

$$r_n - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} > 0, \qquad \frac{1}{n} - r_n \geq \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2} > 0.$$

Kleinstes n: Für $n = 1000$ ist $r_{1000} < \frac{1}{1000}$. Für $n = 999$ ist $r_{999} > \frac{1}{1000}$, und wegen $r_n = \frac{1}{(n+1)^2} + r_{n+1} > r_{n+1}$ ist dann $r_n > \frac{1}{1000}$ für alle $n \leq 999$. Also ist $n = 1000$ das kleinste. Die alternierende Reihe in (a) braucht für dieselbe Genauigkeit nach der Leibniz-Schranke 31 Glieder; bei $\sum \frac{1}{k^2}$ zeigt die untere Schranke, dass 999 Glieder wirklich nicht genügen. Bei der alternierenden Reihe heben sich die Glieder des Restes weitgehend gegenseitig auf, bei der Reihe mit positiven Gliedern addieren sie sich.

Lösung R4. Beide Reihen konvergieren absolut (Exponentialreihe mit $z = 1$ und $z = -1$). Die Glieder des Cauchy-Produkts sind

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k} = \frac{(1-1)^n}{n!}$$

nach dem Binomialsatz; also $c_0 = 1$ und $c_n = 0$ für $n \geq 1$. Nach Satz 6.23 und Satz 6.24 ist $e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum c_n = 1$, also $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$. Wäre $\frac{1}{e} = \frac{p}{q}$ rational, so wäre $p \neq 0$ und $e = \frac{q}{p}$ rational, im Widerspruch zu Satz 6.24.

Die Reihe hat rationale Glieder, die betragsmäßig monoton gegen 0 fallen; in $\mathbb{Q}$ hätte sie keinen Wert. Das Leibniz-Kriterium braucht die Vollständigkeit.

Lösung R5. (a) Wegen $2^k = (1+1)^k \geq 1+k > k$ (Satz 1.24) ist $M = \{m \in \mathbb{N} : 2^m > k\}$ nicht leer; sei m ihr kleinstes Element (Satz 1.16) und $j = m-1 \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $k < 2^{j+1}$, und $2^j \leq k$: für $j = 0$ wegen $k \geq 1$, für $j \geq 1$, weil $j \notin M$. Eindeutigkeit: Für $j < j'$ ist $2^{j+1} \leq 2^{j'}$, die Mengen $\{k : 2^j \leq k < 2^{j+1}\}$ sind also paarweise disjunkt. Monotonie: Seien $k \leq k'$, $\ell(k) = j+1$, $\ell(k') = j'+1$. Wäre $j' < j$, so wäre $k' < 2^{j'+1} \leq 2^j \leq k$, ein Widerspruch.

(b) Sei $s \in \{1,2\}$ und $a_k = \frac{1}{k\,\ell(k)^s}$. Die Glieder sind positiv, und $k\,\ell(k)^s$ wächst streng, weil k streng und $\ell(k)$ nach (a) monoton wächst; also fällt (a_k) monoton. Wegen $\ell(2^j) = j+1$ lautet die verdichtete Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^s}.$$

Für $s = 1$ ist das die harmonische Reihe, divergent nach Satz 6.6; für $s = 2$ konvergiert sie nach Folgerung 6.12. Nach Satz 6.11 divergiert $\sum \frac{1}{k\,\ell(k)}$, und $\sum \frac{1}{k\,\ell(k)^2}$ konvergiert.

(c) Ist $2^j \leq k < 2^{j+1}$, so ist $2^j < k+1 \leq 2^{j+1} < 2^{j+2}$, also $\ell(k+1) \in \{\ell(k), \ell(k)+1\}$. Daher ist

$$\frac{k}{k+1}\Big(\frac{\ell(k)}{\ell(k)+1}\Big)^s \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1}\Big(\frac{\ell(k)}{\ell(k+1)}\Big)^s < 1.$$

Für $k \geq 2^m$ ist $\ell(k) \geq m+1$ nach (a); also gilt $\ell(k) \to \infty$ und nach Satz 4.14 (1) $\frac{\ell(k)}{\ell(k)+1} = 1 - \frac{1}{\ell(k)+1} \to 1$. Mit Satz 4.9 und Satz 4.11 geht der Quotient gegen 1. Das Quotientenkriterium entscheidet bei keiner der beiden Reihen (Bemerkung nach Satz 6.15, (b)): Eine feste Schranke $q < 1$ gibt es nicht, und der Quotient ist nie ≥ 1. Der Verdichtungssatz entscheidet bei beiden. Die Reihen nehmen die in Abschnitt 6.2 angekündigten Reihen $\sum \frac{1}{k \ln k}$ und $\sum \frac{1}{k(\ln k)^2}$ vorweg, ohne den Logarithmus zu benutzen.

Lösung B1. (a) Nach Folgerung 6.5 gilt $a_k \to 0$; es gibt also N mit $0 \leq a_k \leq 1$ für $k \geq N$, und dort ist $a_k^2 \leq a_k$. $\sum a_k$ ist Majorante (Satz 6.10).

(b) Nach Satz 1.25 mit $a = a_k$, $b = \frac{1}{k^2}$ ist $\frac{a_k}{k^2} \leq \big(\frac{a_k + k^{-2}}{2}\big)^2$. Beide Seiten sind nichtnegativ, und die Quadratwurzel ist monoton, also

$$\frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \frac{1}{2}\Big(a_k + \frac{1}{k^2}\Big).$$

Die rechte Seite ist das Glied einer konvergenten Reihe (Satz 6.3 (1), Folgerung 6.12); sie ist Majorante.

(c) $a_k = \frac{1}{k}$: $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert, $\sum \frac{1}{k}$ nicht.

Lösung B2. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 6.4) gibt es N mit $\sum_{k=m+1}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > m \geq N$. Sei $n \geq 2N+2$ und $m = \lfloor n/2 \rfloor$ (Lemma 2.30). Dann ist $m \geq N$, $n > m$ und $n - m \geq \frac{n}{2}$. Weil die Folge fällt, ist jedes der $n-m$ Glieder $a_{m+1}, \dots, a_n$ mindestens a_n, also

$$\frac{n}{2}\, a_n \leq (n-m)\, a_n \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist $0 \leq n a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq 2N+2$, also $n a_n \to 0$.

Ohne Monotonie: Sei $a_k = \frac{1}{k}$, wenn k eine Quadratzahl ist, und $a_k = 0$ sonst. Dann ist $\sum a_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ konvergent (die Partialsummen sind Partialsummen dieser Reihe, aufgefüllt mit Nullen, also beschränkt), aber $k\, a_k = 1$ für jede Quadratzahl k; also $k a_k \not\to 0$.

Nebenbei folgt noch einmal die Divergenz der harmonischen Reihe: Für $a_k = \frac{1}{k}$ ist $k a_k = 1 \not\to 0$.

Lösung B3. (a) Seien $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $t_J = \sum_{j=1}^{J} b_j$. Dann ist $t_J = s_{n_J - 1}$, und weil $n_J - 1$ streng wächst, ist (t_J) eine Teilfolge von (s_n). Nach Satz 4.24 (1) konvergiert sie gegen denselben Grenzwert.

(b) $a_k = (-1)^k$ und $n_j = 2j$: Dann ist $b_j = 1 - 1 = 0$, $\sum b_j = 0$, aber $\sum (-1)^k$ divergiert, weil die Glieder keine Nullfolge sind.

(c) Sei $t = \sum b_j$. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es genau ein $J \geq 0$ mit $n_J \leq n < n_{J+1}$. Dann ist

$$s_n = t_J + \sum_{k=n_J}^{n} a_k,$$

und die Summe rechts hat höchstens L Glieder, alle mit Index $k \geq n_J \geq J$. Also ist $|s_n - t_J| \leq L \cdot \sup_{k \geq J} |a_k|$. Wegen $n < n_{J+1} \leq (J+1)L$ gilt $J > \frac{n}{L} - 1$; mit $n \to \infty$ geht also $J \to \infty$. Weil $a_k \to 0$, geht $\sup_{k \geq J} |a_k| \to 0$, und $t_J \to t$. Also $s_n \to t$.

Lösung B4. (a) Die Partialsummen $A_n = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ sind $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 0$, und wegen der Periode und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ wiederholen sie sich: $A_{n+3} = A_n$. Also ist $|A_n| \leq 2$ für alle n, und nach Satz 6.26 mit $M = 2$ konvergiert $\sum \varepsilon_k b_k$.

(b) Für $j \in \mathbb{N}$ hat der Block der Indizes $3j-2, 3j-1, 3j$ die Summe

$$\frac{1}{3j-2} + \frac{1}{3j-1} - \frac{1}{3j} \geq \frac{1}{3j-2} \geq \frac{1}{3j},$$

denn $\frac{1}{3j-1} - \frac{1}{3j} > 0$. Für die Partialsummen gilt also $s_{3J} \geq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{j}$, und das ist nach Satz 6.6 und Satz 6.7 unbeschränkt. Eine unbeschränkte Folge konvergiert nicht

(Satz 4.7); die Reihe divergiert. Verletzt ist die Beschränktheit der Partialsummen: $\sum_{k=1}^{3J} \delta_k = J$.

(c) Nach Satz 4.16 konvergiert (c_k) gegen ein $c \in \mathbb{R}$. Ist (c_k) fallend, so setze $b_k = c_k - c$, ist sie wachsend, so $b_k = c - c_k$. In beiden Fällen ist (b_k) monoton fallend mit $b_k \to 0$. Die Partialsummen von $\sum a_k$ konvergieren und sind daher beschränkt (Satz 4.7). Nach Satz 6.26 konvergiert $\sum a_k b_k$. Wegen $a_k c_k = a_k b_k + c\, a_k$ beziehungsweise $a_k c_k = c\, a_k - a_k b_k$ konvergiert $\sum a_k c_k$ nach Satz 6.3 (1).

Lösung V1. Sei $L = \limsup|\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ und $q > L$. Nach Definition 4.25 ist L das Infimum der Endstück-Suprema; es gibt also N mit $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \le q$ für $k \ge N$, und durch Induktion folgt $|a_k| \le |a_N| q^{k-N} = c\, q^k$ für $k \ge N$ mit $c = |a_N| q^{-N} > 0$. Also

$$\sqrt[k]{|a_k|} \le c^{1/k} q \quad (k \ge N).$$

Nach Lemma 6.13 (a) konvergiert $c^{1/k} q \to q$; insbesondere ist die rechte Seite beschränkt, und mit den endlich vielen Gliedern $k < N$ ist $(\sqrt[k]{|a_k|})$ beschränkt. Sei $y_k = c^{1/k} q$ für $k \ge N$. Für $n \ge N$ ist $\sup_{k \ge n} \sqrt[k]{|a_k|} \le \sup_{k \ge n} y_k$, und die rechte Seite konvergiert gegen $\limsup y_k = \lim y_k = q$ (Satz 4.28). Nach Satz 4.10 ist $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \le q$. Da $q > L$ beliebig war, folgt $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} \le L$; wäre der linke Wert größer als L, so wähle man q dazwischen.

Ist nun $L < 1$, so ist auch $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, und das Wurzelkriterium liefert absolute Konvergenz. Beispiel 3 in Abschnitt 6.8 zeigt, dass die Ungleichung strikt sein kann ($\frac{1}{2} < 2$).

Lösung V2. Seien A_N, B_N die Partialsummen, $\beta_n = B_n - B \to 0$ und $C_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$. Vertauschen der endlichen Summen ergibt

$$C_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=k}^{N} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} a_k B_{N-k} = A_N B + R_N, \qquad R_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \beta_{N-k}.$$

Da $A_N B \to AB$, bleibt $R_N \to 0$ zu zeigen. Sei $\alpha = \sum |a_k|$ und β^* eine Schranke für $|\beta_n|$ (konvergente Folgen sind beschränkt, Satz 4.7). Zu $\varepsilon > 0$ wähle L mit $|\beta_n| < \varepsilon$ für $n \ge L$ und K mit $\sum_{k>K} |a_k| < \varepsilon$. Für $N \ge K + L$ ist

$$|R_N| \le \sum_{k=0}^{K} |a_k||\beta_{N-k}| + \sum_{k=K+1}^{N} |a_k||\beta_{N-k}| \le \varepsilon\, \alpha + \beta^* \varepsilon,$$

denn im ersten Teil ist $N - k \ge N - K \ge L$. Also $|R_N| \le (\alpha + \beta^*)\varepsilon$ für $N \ge K + L$, und $R_N \to 0$.

Absolute Konvergenz des Produkts folgt im Allgemeinen nicht: Für $a_0 = 1$, $a_k = 0$ $(k \geq 1)$ ist das Cauchy-Produkt die Reihe $\sum b_l$ selbst; für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+1}$ als $\sum b_l$ konvergiert es also nicht absolut.

Lösung V3. Seien $p_0 < p_1 < \ldots$ die Indizes mit $a_k \geq 0$ und $q_0 < q_1 < \ldots$ die mit $a_k < 0$; beide Mengen sind unendlich, und die Reihen $\sum_r a_{p_r}$ und $\sum_r |a_{q_r}|$ haben unbeschränkte Partialsummen (Lemma 6.20 und Satz 6.7: $\sum_{r=0}^{R} a_{p_r}$ ist die Partialsumme von $\sum a_k^+$ bis zum Index p_R, weil die übrigen Glieder a_k^+ mit $a_k < 0$ null sind, und ebenso ist $\sum_{r=0}^{R} |a_{q_r}|$ die Partialsumme von $\sum a_k^-$ bis zum Index q_R; da diese Partialsummen monoton und unbeschränkt sind und $p_R, q_R \to \infty$, sind es auch die Teilfolgen). Dasselbe gilt für jedes Endstück.

Konstruktion in Stufen $i = 1, 2, 3, \ldots$: In Stufe i nimmt man die nächsten noch unbenutzten p-Indizes, solange die bisherige Summe höchstens i ist; sobald sie i übersteigt, nimmt man den nächsten unbenutzten q-Index und geht zur Stufe $i+1$. Jede Stufe endet nach endlich vielen Schritten, weil die Endstücke von $\sum a_{p_r}$ unbeschränkt sind. In jeder Stufe wird genau ein q-Index verwendet, also alle q_r. Auch alle p_r werden verwendet: Andernfalls kämen ab einer Stufe keine p-Indizes mehr hinzu, die Summe wäre zu Beginn jeder späteren Stufe i größer als i und fiele zugleich von Stufe zu Stufe, was unmöglich ist. Beide Sorten werden in ihrer Reihenfolge verwendet; die entstehende Abbildung σ ist bijektiv.

Divergenz gegen $+\infty$: Wegen $a_k \to 0$ gibt es K mit $|a_k| < 1$ für $k \geq K$. Nach endlich vielen Schritten sind alle Indizes $< K$ verbraucht; sei i_0 eine Stufe, die danach beginnt. Am Ende der Stufe $i \geq i_0$ war die Summe vor dem negativen Glied größer als i, danach also größer als $i-1$. In der Stufe $i+1$ wächst die Summe, bis sie $i+1$ übersteigt, und fällt dann auf einen Wert größer als i. Also sind alle Partialsummen ab dem Ende der Stufe i größer als $i-1$. Da i beliebig groß gewählt werden kann, streben die Partialsummen gegen $+\infty$.

Lösung V4. $|z| < 1$: $\left|\frac{z^k}{k}\right| \leq |z|^k$, die geometrische Reihe ist Majorante; absolut konvergent.

$|z| > 1$: Sei $|z| = 1 + h$ mit $h > 0$. Für $k \geq 2$ ist nach dem Binomialsatz $(1+h)^k \geq \binom{k}{2} h^2$, also $\frac{|z|^k}{k} \geq \frac{(k-1)h^2}{2} \geq 1$ für $k \geq 1 + \frac{2}{h^2}$. Die Glieder bilden keine Nullfolge; divergent.

$z = 1$: die harmonische Reihe, divergent.

$|z| = 1$, $z \neq 1$: Die Beträge der Glieder sind $\frac{1}{k}$; die Reihe konvergiert also nicht absolut. Sie konvergiert aber: Mit $a_k = z^k$ ist nach der geometrischen Summe

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|},$$

und $b_k = \frac{1}{k}$ fällt monoton gegen 0. Nach dem Dirichlet-Kriterium (Satz 6.26) konvergiert $\sum \frac{z^k}{k}$. Für $z = -1$ ist das die (negative) alternierende harmonische Reihe.

Zusammen: absolut konvergent genau für $|z| < 1$, bedingt konvergent genau für $|z| = 1$, $z \neq 1$, sonst divergent. Auf dem Rand $|z| = 1$ kommen also Konvergenz und Divergenz vor; Einheit 14 nimmt das bei Potenzreihen wieder auf (Abschnitt 14.10, (G10)).

Lösung V5. (a) Seien $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{j=0}^{n} a_{\sigma(j)}$, $A = \{0, \dots, n\}$ und $B = \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$. Dann ist

$$T_n - s_n = \sum_{k \in B \setminus A} a_k - \sum_{k \in A \setminus B} a_k.$$

Ist $k \in B \setminus A$, so ist $k = \sigma(j)$ mit $j \leq n < k$, also $k \leq j + L \leq n + L$. Ist $k \in A \setminus B$, so ist $k = \sigma(j)$ für ein j, und $j > n$, weil $k \notin B$; also $k \geq j - L \geq n + 1 - L$. Die disjunkten Mengen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ liegen daher in $\{n - L + 1, \dots, n + L\}$, einer Menge aus $2L$ Zahlen. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Folgerung 6.5 gilt $a_k \to 0$; es gibt K mit $|a_k| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Für $n \geq K + L - 1$ ist dann

$$|T_n - s_n| \leq \sum_{k=n-L+1}^{n+L} |a_k| < 2L\varepsilon.$$

Also $T_n - s_n \to 0$ und $T_n \to s$.

(b) Man zählt die Glieder von S und T ab 0. In T steht das Glied $\frac{1}{2m-1}$ an der Stelle $j = 3m - 3$ (erstes Glied der m-ten Dreiergruppe); in S steht es an der Stelle $k = 2m - 2$. Die Verschiebung ist $(3m-3)-(2m-2) = m-1$ und wächst über jede Schranke. Nach (a) muss das so sein, denn T hat einen anderen Wert als S.

(c) Für $i \geq 2$ ist $2^i + i < 2^{i+1}$, weil $i < 2^i$. Sei σ die Abbildung, die für jedes $i \geq 2$ die Zahlen 2^i und $2^i + i$ vertauscht und alle anderen Zahlen festlässt. Die Paare $\{2^i, 2^i + i\}$ liegen in den disjunkten Blöcken $\{2^i, \dots, 2^{i+1} - 1\}$; σ ist also wohldefiniert, und $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$, also ist σ bijektiv. Die Verschiebung $|\sigma(2^i) - 2^i| = i$ ist unbeschränkt.

Sei $\sum a_k$ konvergent. Für gegebenes n unterscheiden sich A und B wie in (a) nur, wenn ein Paar von n getrennt wird, also $2^i \leq n < 2^i + i$; das geschieht für höchstens ein i, und dann ist $T_n - s_n = a_{2^i+i} - a_{2^i}$. Wegen $n < 2^i + i < 2^{i+1}$ ist $2^i > \frac{n}{2}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle K mit $|a_k| < \varepsilon$ für $k \geq K$; für $n \geq 2K$ ist dann $|T_n - s_n| < 2\varepsilon$. Also $T_n \to s$ für jede konvergente Reihe. In (a) und (c) unterscheiden sich die Indexmengen A und B jeweils nur in beschränkt vielen Elementen; bei T wächst die Zahl der unterschiedlichen Elemente mit n.

Teil III

Stetigkeit

EINHEIT 7

Stetige Funktionen

Leitfrage

Die Funktion $f(x) = x^3 - 2x - 5$ ist an der Stelle 2 negativ, $f(2) = -1$, und an der Stelle 3 positiv, $f(3) = 16$. Jeder, der den Graphen zeichnet, zieht eine Linie von unterhalb der Achse nach oberhalb und schließt: Dazwischen liegt eine Nullstelle. Derselbe Schluss für $g(x) = x^2 - 2$ zwischen 1 und 2 ist in $\mathbb{Q}$ falsch: Dort hat g keine Nullstelle, weil $\sqrt{2}$ nicht rational ist (Satz 2.9). Die Zeichnung sieht in beiden Fällen gleich aus.

Was genau heißt „der Graph hat keinen Sprung", und welche Eigenschaft der reellen Zahlen sorgt dafür, dass eine solche Funktion jeden Zwischenwert annimmt? Die Einheit beantwortet beide Teile. Der erste Teil führt auf den Begriff der Stetigkeit, mit derselben Quantorenform wie die Folgenkonvergenz. Der zweite Teil ist der Zwischenwertsatz; er braucht die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und ist in $\mathbb{Q}$ falsch. Die Antwort ist in Abschnitt 7.3 nach Folgerung 7.16 zusammengefasst. Aus dem Zwischenwertsatz folgen die Sätze über Umkehrfunktionen, mit denen in Einheit 9 der Logarithmus und in dieser Einheit noch einmal die Wurzeln gewonnen werden.

Voraussetzungen. Benutzt werden aus Einheit 1 die Verneinungsregel (Regel 1.3), die Wohlordnung von $\mathbb{N}$ (Satz 1.16), die Fakultät (Definition 1.17), die Dreiecksungleichung (Satz 1.23, mit $||x| - |y|| \leq |x - y|$), ihre Fassung für endliche Summen (Aufgabe B8 (a) der Einheit 1), die Abschätzung aus Aufgabe B8 (b) der Einheit 1, Aufgabe B6 (d) der Einheit 1 und die Anordnungsregeln (O0)–(O6), die nach Folgerung 2.26 in $\mathbb{R}$ gelten. Aus Einheit 2: die Intervalle aus Abschnitt 2.2, die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Satz 2.9), die archimedische Eigenschaft (Satz 2.29), der ganze Teil (Lemma 2.30), die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31), die Supremumseigenschaft (Satz 2.34) mit dem Infimum (Folgerung 2.35), die erweiterte Zahlengerade (Definition 2.37), die Wurzeln (Satz 2.39) sowie die Abzählbarkeit (Definition 2.42, Lemma 2.44, Satz 2.45). Aus Einheit 3 die Kreisscheiben $B_r(a)$ aus Abschnitt 3.3, für die Bemerkung über Funktionen mit komplexen Werten außerdem Satz 3.9 und die Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$ (Satz 3.10). Aus Einheit 4: die Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 4.3), die zwei Grundbeispiele (Satz 4.4), die Häufungswerte (Definition 4.23), die Rechenregeln für Folgen (Satz 4.9), die Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.10), die Einschließung (Satz 4.11) und die bestimmte Divergenz (Definiti-

on 4.13). Aus Einheit 5 das Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3)) zusammen mit Lemma 5.6: Sind $[a_n, b_n]$ Intervalle mit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n \to 0$, so gibt es genau ein ξ, das in allen liegt, und es gilt $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$. Die Nummern 7.28 bis 7.30 stehen in den Abschnitten 7.2 bis 7.4 dort, wo sie gebraucht werden; die Nummern folgen deshalb dort nicht der Reihe nach.

Bemerkung (Auswahl von Folgengliedern). Mehrere Beweise wählen zu jedem n ein Element x_n mit einer Eigenschaft, ohne eine Vorschrift anzugeben (Lemma 7.2, Satz 7.5, Satz 7.10 und die Folgen in (G2) und (G4)). Dass dabei eine Folge entsteht, ist die abzählbare Auswahl, eine schwache Form des Auswahlaxioms (Abschnitt 1.5; vergleiche die Bemerkung „keine Auswahl" nach Satz 2.33). Wir setzen sie ab hier, wie in der Analysis üblich, stillschweigend voraus; wo ein Beweis sie vermeidet, wird das gesagt (Satz 7.23).

Schreibweisen. In dieser Einheit ist $D \subseteq \mathbb{R}$ stets eine nichtleere Menge, der Definitionsbereich, und eine *Funktion* eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ ist wie in Abschnitt 3.3 $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$; wir nennen diese Menge die *δ-Umgebung* von a. Für $E \subseteq D$ bezeichnet $f|_E$ die Einschränkung von f auf E.

7.1 Grenzwerte von Funktionen

Bevor man fragt, ob f an der Stelle a „ohne Sprung" ist, fragt man, welchem Wert sich $f(x)$ nähert, wenn x gegen a geht. Dafür muss man sich a aus D heraus nähern können, und der Wert $f(a)$ selbst soll keine Rolle spielen; a braucht nicht einmal in D zu liegen. Das bekannteste Beispiel ist der Differenzenquotient $\frac{x^2-1}{x-1}$, der an der Stelle 1 nicht erklärt ist.

> **Definition 7.1.** Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von D, wenn jede Umgebung $B_\delta(a)$ einen Punkt von $D \setminus \{a\}$ enthält. Ein Punkt $a \in D$, der kein Häufungspunkt von D ist, heißt *isolierter Punkt* von D.

Beispiele. Jeder Punkt von $[0, 1]$ ist Häufungspunkt von $(0, 1)$; die Punkte 0 und 1 liegen nicht in $(0, 1)$. Die Menge $\mathbb{Z}$ hat keinen Häufungspunkt: Für $k \in \mathbb{Z}$ ist $B_{1/2}(k) \cap \mathbb{Z} = \{k\}$, jeder Punkt von $\mathbb{Z}$ ist also isoliert, und für $x \notin \mathbb{Z}$ enthält $B_\delta(x)$ mit $\delta = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\}$ (Lemma 2.30) keine ganze Zahl. Die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ hat genau den Häufungspunkt 0. Jede reelle Zahl ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$, nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$.

Der Häufungspunkt einer Menge ist vom Häufungswert einer Folge (Definition 4.23) zu unterscheiden: Die konstante Folge (c) hat den Häufungswert c, ihre Wertemenge $\{c\}$ hat aber keinen Häufungspunkt. Der Unterschied liegt darin, dass Definition 7.1 Punkte $x \neq a$ verlangt. Das folgende Lemma verbindet beide Begriffe über Folgen.

Lemma 7.2. Der Punkt a ist genau dann Häufungspunkt von D, wenn es eine Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gibt.

Beweis. Ist a Häufungspunkt, so wähle man zu jedem n ein $x_n \in D \setminus \{a\}$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach der archimedischen Eigenschaft (Satz 2.29) ein N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$; für $n \geq N$ ist dann $|x_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$. Ist umgekehrt (x_n) eine solche Folge und $\delta > 0$, so liegt x_n für große n in $B_\delta(a)$, und $x_n \neq a$. □

Definition 7.3. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D. Man sagt, $f(x)$ *konvergiert für $x \to a$ gegen $c \in \mathbb{R}$*, und schreibt $\lim_{x\to a} f(x) = c$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Die Bedingung $0 < |x-a|$ schließt den Punkt a aus: Der Grenzwert hängt nicht von $f(a)$ ab, und $f(a)$ braucht nicht erklärt zu sein. Dass a ein Häufungspunkt ist, verhindert, dass die Bedingung leer wird; an einem isolierten Punkt wäre jede Zahl c ein Grenzwert.

Beispiel. Für $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist 1 ein Häufungspunkt von D, und für $x \in D$ ist $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$. Also gilt $|\frac{x^2-1}{x-1} - 2| = |x - 1|$, und zu $\varepsilon > 0$ genügt $\delta = \varepsilon$: Es ist $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$. Der Bruch ist in 1 nicht erklärt; der Grenzwert existiert trotzdem.

Lemma 7.4 (Eindeutigkeit). Gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$ und $\lim_{x\to a} f(x) = c'$, so ist $c = c'$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, und seien δ, δ' die zugehörigen Zahlen. Weil a Häufungspunkt ist, gibt es ein $x \in D$ mit $0 < |x-a| < \min\{\delta, \delta'\}$. Für dieses x ist $|c-c'| \leq |c-f(x)|+|f(x)-c'| < 2\varepsilon$. Zu jedem $\eta > 0$ ist also, mit $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$, $|c-c'| < \eta$, und nach Aufgabe B6 (d) der Einheit 1 folgt $c = c'$. □

Hier wird die Voraussetzung, dass a Häufungspunkt ist, an genau einer Stelle gebraucht: für die Existenz des Punktes x.

Satz 7.5 (Folgenkriterium für Grenzwerte). Sei a Häufungspunkt von D. Genau dann gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$, wenn für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ die Folge $(f(x_n))$ gegen c konvergiert.

Beweisidee. Die eine Richtung setzt zwei Definitionen hintereinander. Die andere wird durch Kontraposition geführt: Scheitert die ε-δ-Bedingung, so liefert ihre Verneinung zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ einen schlechten Punkt, und diese Punkte bilden eine Folge.

Beweis. „⇒“: Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$, und sei $\varepsilon > 0$. Zu ε gibt es $\delta > 0$ wie in Definition 7.3, und zu δ gibt es N mit $|x_n - a| < \delta$ für $n \geq N$. Wegen $x_n \neq a$ ist dann $0 < |x_n - a| < \delta$, also $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für $n \geq N$.

„⇐“: Kontraposition. Gelte $\lim_{x\to a} f(x) = c$ nicht. Nach Regel 1.3 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so

dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$ und $|f(x) - c| \geq \varepsilon$ existiert. Wählt man zu $\delta = \frac{1}{n}$ einen solchen Punkt x_n, so liegt (x_n) in $D \setminus \{a\}$, es gilt $x_n \to a$ (wie im Beweis von Lemma 7.2), aber $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$ für alle n; also konvergiert $(f(x_n))$ nicht gegen c. □

Das Folgenkriterium verwandelt jede Aussage über Folgen in eine Aussage über Funktionsgrenzwerte. So erhält man die Rechenregeln ohne neue Abschätzung.

Satz 7.6 (Rechenregeln). Sei a Häufungspunkt von D, seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = c$ und $\lim_{x\to a} g(x) = d$. Dann gilt:

1. $\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = c + d$ und $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = cd$;
2. ist $d \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$;
3. ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$, so ist $c \leq d$;
4. ist $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D\setminus\{a\}$ und ist $c = d$, so gilt $\lim_{x\to a} h(x) = c$.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$; nach Lemma 7.2 gibt es eine, weil a Häufungspunkt ist. Nach Satz 7.5 gilt $f(x_n) \to c$ und $g(x_n) \to d$. Nach den Rechenregeln für Folgen (Satz 4.9) folgt $f(x_n) + g(x_n) \to c + d$, $f(x_n)g(x_n) \to cd$ und im Fall (2) $f(x_n)/g(x_n) \to c/d$. Nach Satz 4.10 folgt aus $f(x_n) \leq g(x_n)$ für alle n die Ungleichung $c \leq d$; das ist (3). Für (4) ist $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$, nach Satz 4.11 also $h(x_n) \to c$. Da in (1), (2) und (4) die Folge (x_n) beliebig war, ergibt Satz 7.5 in der Richtung „⇐“ dort die Behauptung. □

Bemerkung (zu Regel 2). Die Bedingung $g(x) \neq 0$ auf ganz D ist bequem, aber nicht nötig. Aus $d \neq 0$ folgt, dass g in einer Umgebung von a nicht verschwindet: Zu $\varepsilon = \frac{|d|}{2}$ gibt es $\delta > 0$ mit $|g(x) - d| < \frac{|d|}{2}$, also $|g(x)| \geq |d| - |g(x) - d| > \frac{|d|}{2} > 0$, für $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$. Man wendet dann Regel 2 auf $D' = (D \cap B_\delta(a)) \setminus \{a\}$ an. Dort ist $g \neq 0$, der Punkt a ist Häufungspunkt von D' (jeder Punkt von $D \setminus \{a\}$ mit Abstand kleiner als δ von a liegt in D'), und die Einschränkungen von f und g auf D' haben nach Lemma 7.28 (1) in Abschnitt 7.2 weiter die Grenzwerte c und d. Der Quotient hat also auf D' den Grenzwert $\frac{c}{d}$. Auf seinem Definitionsbereich $D'' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ gilt dasselbe: a ist Häufungspunkt von $D'' \supseteq D'$, zu $\varepsilon > 0$ gibt es δ'' für die Einschränkung auf D', und jeder Punkt $x \in D''$ mit $0 < |x - a| < \min\{\delta, \delta''\}$ liegt in D'.

Definition 7.7 (einseitige und uneigentliche Grenzwerte). Sei $f : D \to \mathbb{R}$.

- Ist a Häufungspunkt von $D \cap (a, \infty)$, so heißt c *rechtsseitiger Grenzwert*, geschrieben $\lim_{x\to a+} f(x) = c$ oder $f(a+) = c$, wenn c der Grenzwert der Einschränkung von f auf $D \cap (a, \infty)$ ist. Entsprechend ist der *linksseitige Grenzwert* $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a-)$ mit $D \cap (-\infty, a)$ erklärt.
- Ist D nach oben unbeschränkt, so bedeutet $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$: Zu jedem $\varepsilon > 0$

gibt es ein $R \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x > R$. Entsprechend $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$, wenn D nach unten unbeschränkt ist, mit $x < R$.

- Ist a Häufungspunkt von D, so bedeutet $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$: Zu jedem $K \in \mathbb{R}$ gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > K$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$. Entsprechend mit $-\infty$, einseitig (dann ist a Häufungspunkt von $D \cap (a, \infty)$ beziehungsweise $D \cap (-\infty, a)$) und für $x \to \pm\infty$ (dann ist D nach oben beziehungsweise unten unbeschränkt).

Ausgeschrieben ist $\lim_{x \to a+} f(x) = c$ die Bedingung: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $a < x < a + \delta$. Alle diese Grenzwerte sind eindeutig. Für einseitige Grenzwerte mit reellem Wert ist das Lemma 7.4, angewandt auf die Einschränkung. In den übrigen Fällen geht man wie im Beweis von Lemma 7.4 vor: Wegen der Voraussetzung (Häufungspunkt oder Unbeschränktheit) gibt es zu je zwei Toleranzen einen Punkt $x \in D$, an dem beide Bedingungen zugleich gelten. Für zwei reelle Werte $c \neq c'$ (bei $x \to \pm\infty$) nimmt man $\varepsilon = \frac{1}{2}|c - c'|$ und erhält $|c - c'| < 2\varepsilon$; für c und ∞ nimmt man $\varepsilon = 1$ und $K = c + 1$ und erhält $f(x) < c + 1 < f(x)$; für ∞ und $-\infty$ nimmt man $K = 0$ für beide und erhält $0 < f(x) < 0$. Jedes Mal ist das ein Widerspruch. Das Folgenkriterium gilt sinngemäß, mit demselben Beweis; für $x \to \infty$ betrachtet man Folgen in D mit $x_n \to \infty$ im Sinn von Definition 4.13, und ebenso sind die Werte $\pm\infty$ im Sinn von Definition 4.13 zu lesen.

Beispiel. Für $f(x) = \frac{|x|}{x}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(0+) = 1$ und $f(0-) = -1$; der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht, nach dem folgenden Lemma. Für $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ ist $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Lemma 7.8. Sei a Häufungspunkt sowohl von $D \cap (a, \infty)$ als auch von $D \cap (-\infty, a)$. Dann existiert $\lim_{x \to a} f(x)$ genau dann, wenn $f(a+)$ und $f(a-)$ existieren und übereinstimmen; dann sind alle drei gleich.

Beweis. Existiert $\lim_{x \to a} f(x) = c$, so erfüllt jedes δ aus Definition 7.3 auch die beiden einseitigen Bedingungen. Gelte umgekehrt $f(a+) = f(a-) = c$, und sei $\varepsilon > 0$. Zu ε gibt es δ_+ für die rechte und δ_- für die linke Seite. Für $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$ und $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$ ist entweder $a < x < a + \delta_+$ oder $a - \delta_- < x < a$, in beiden Fällen $|f(x) - c| < \varepsilon$. □

7.2 Stetigkeit

Springt f an der Stelle a, so gibt es nahe bei a Werte $f(x)$, die von $f(a)$ um mehr als einen festen Betrag abweichen. Stetigkeit schließt das aus, und zwar jede Abweichung dieser Art, auch wenn sie nicht wie ein Sprung aussieht (G2, G4). Was ein Sprung genau ist, legt Abschnitt 7.4 im Anschluss an Satz 7.22 fest.

Definition 7.9. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* $a \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Sie heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist. Ist f in a nicht stetig, so heißt a *Unstetigkeitsstelle*.

In Worten: Jede vorgegebene Genauigkeit ε für den Funktionswert lässt sich durch eine hinreichende Genauigkeit δ für das Argument erzwingen. Das δ darf von ε und von a abhängen. Hängt es nur von ε ab, spricht man von gleichmäßiger Stetigkeit (Definition 8.19).

Nichtbeispiel. Sei $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$. Dann ist f in 0 nicht stetig. Nach Regel 1.3 ist zu zeigen: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein x mit $|x| < \delta$ und $|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon$ existiert. Man nimmt $\varepsilon = 1$ und zu gegebenem δ den Punkt $x = -\frac{\delta}{2}$: Es ist $|f(x) - f(0)| = |-1-1| = 2 \geq 1$. Ein einziges solches ε genügt, um die Stetigkeit zu widerlegen.

Stetigkeit ist eine Eigenschaft im Punkt, und sie hängt vom Definitionsbereich ab. An einem isolierten Punkt von D ist jede Funktion stetig: Man wählt δ so klein, dass $B_\delta(a) \cap D = \{a\}$. So ist jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also jede Folge, stetig; das sagt nichts.

Satz 7.10 (Kennzeichnungen der Stetigkeit). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. Gleichwertig sind:

1. f ist stetig in a;
2. für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$ (*Folgenkriterium*);

und ist a Häufungspunkt von D, außerdem

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Beweis. (1)⇒(2): wie im Beweis von Satz 7.5, „⇒“; die Bedingung $x_n \neq a$ wird nicht gebraucht, weil Definition 7.9 auch $x = a$ zulässt und dort $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ gilt.

(2)⇒(1): wie im Beweis von Satz 7.5, „⇐“: Ist f in a nicht stetig, so gibt es $\varepsilon > 0$ und zu jedem n ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$. Dann gilt $x_n \to a$, aber nicht $f(x_n) \to f(a)$.

(1) ⟺ (3): Die Bedingung in Definition 7.9 ist die Bedingung aus Definition 7.3 mit

$c = f(a)$, ergänzt um den Punkt $x = a$, für den sie stets erfüllt ist. □

Die drei Fassungen haben verschiedene Aufgaben. Die ε-δ-Form (1) benutzt man, wenn man ein δ angeben will, zum Beispiel in den folgenden Beispielen (b) bis (d) und in Abschnitt 7.6. Das Folgenkriterium (2) überträgt die Rechenregeln für Folgen auf Funktionen (Beweis von Satz 7.11) und ist das Werkzeug für Unstetigkeit: Eine einzige Folge $x_n \to a$ mit $f(x_n) \not\to f(a)$ genügt (G2, G3), während für Stetigkeit *jede* Folge nachgeprüft werden muss (G10). Die Fassung (3) erlaubt, einen Grenzwert abzulesen, indem man die Funktion nahe a durch eine in a stetige ersetzt (Abschnitt 7.6, Beispiele 2 und 3). Dass man dabei Funktionen einschränken und nahe a austauschen darf, sagt das folgende Lemma.

Lemma 7.28 (Einschränkung und Lokalität). Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $E \subseteq D$ und $a \in \mathbb{R}$.

1. Ist $a \in E$ und f in a stetig, so ist $f|_E$ in a stetig. Ist a Häufungspunkt von E und $\lim_{x\to a} f(x) = c$, so gilt $\lim_{x\to a} f|_E(x) = c$.
2. Gibt es ein $r > 0$ mit $D \cap B_r(a) \subseteq E$, so gelten auch die Umkehrungen: Ist $a \in E$, so ist f genau dann in a stetig, wenn $f|_E$ es ist. Ist a Häufungspunkt von D, so ist a Häufungspunkt von E, und $\lim_{x\to a} f(x) = c$ gilt genau dann, wenn $\lim_{x\to a} f|_E(x) = c$ gilt.
3. Sei $g : D \to \mathbb{R}$, und gebe es $r > 0$ mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$ mit $0 < |x - a| < r$. Ist a Häufungspunkt von D, so gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$ genau dann, wenn $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Ist $a \in D$ und $f(a) = g(a)$, so ist f genau dann in a stetig, wenn g es ist.

Beweis. (1) Ein δ, das in Definition 7.9 beziehungsweise 7.3 für f taugt, taugt auch für $f|_E$, denn die Bedingung wird nur für die Punkte $x \in E$ verlangt, also für weniger Punkte. Dass a Häufungspunkt von D ist, folgt aus $E \subseteq D$.

(2) Sei $f|_E$ in a stetig und $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta' > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $|x - a| < \delta'$. Sei $\delta = \min\{\delta', r\}$. Ist $x \in D$ und $|x - a| < \delta$, so liegt x in $D \cap B_r(a) \subseteq E$, also ist $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Sei nun a Häufungspunkt von D und $\delta > 0$. Es gibt $x \in D \setminus \{a\}$ mit $|x - a| < \min\{\delta, r\}$; dieses x liegt in E und in $B_\delta(a)$, also ist a Häufungspunkt von E. Die Umkehrung für Grenzwerte beweist man wie die für Stetigkeit, mit der Bedingung $0 < |x - a|$ statt $|x - a|$ und c statt $f(a)$. Die übrigen Richtungen sind (1).

(3) Gilt $\lim_{x\to a} g(x) = c$ und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es δ' für g. Für $\delta = \min\{\delta', r\}$ und $x \in D$ mit $0 < |x - a| < \delta$ ist $|f(x) - c| = |g(x) - c| < \varepsilon$. Die Stetigkeit geht ebenso, mit $|x - a| < \delta$; im Punkt $x = a$ ist $f(a) = g(a)$. Die Rollen von f und g sind vertauschbar. □

Beispiele. (a) Konstante Funktionen und die Identität $x \mapsto x$ sind stetig: Man wähle $\delta = 1$ beziehungsweise $\delta = \varepsilon$.

(b) Der Betrag $x \mapsto |x|$ ist stetig, mit $\delta = \varepsilon$, denn $\big||x| - |a|\big| \le |x - a|$ nach Satz 1.23.

(c) Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist stetig. Sei $a \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Wir setzen

$$\delta = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon |a|}.$$

Wegen $\varepsilon a^2 < |a| + \varepsilon a^2$ ist $\delta < |a|$, genauer $|a| - \delta = \frac{|a|}{1+\varepsilon|a|}$ und damit $(|a| - \delta)\,|a| = \frac{a^2}{1+\varepsilon|a|} = \frac{\delta}{\varepsilon}$. Ist $x \in D$ und $|x - a| < \delta$, so gilt $|x| \geq |a| - |x - a| > |a| - \delta > 0$ nach Satz 1.23, und deshalb

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x - a|}{|x|\,|a|} < \frac{\delta}{(|a| - \delta)\,|a|} = \varepsilon.$$

Dieses δ lässt sich nicht vergrößern. Der Punkt $x = \frac{a}{1+\varepsilon|a|}$ liegt zwischen 0 und a und hat von a den Abstand $|a| - |x| = \delta$; an ihm ist $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \varepsilon$ für $a > 0$ und $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \varepsilon$ für $a < 0$, also $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \varepsilon$. Jedes größere δ ließe diesen Punkt zu. Wegen $\delta = |a| \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon|a|}\right)$ ist das größtmögliche δ das Produkt zweier Faktoren, die mit $|a|$ wachsen: Das δ wird kleiner, je näher a bei 0 liegt, und wegen $\delta \leq \varepsilon a^2$ geht es für $a \to 0$ gegen 0. Was das für ein gemeinsames δ auf ganz $(0, 1]$ bedeutet, zeigt Beispiel (c) in Abschnitt 8.4. Dass der Graph von $\frac{1}{x}$ bei 0 „zerrissen“ ist, ist kein Einwand: 0 gehört nicht zu D, und über Punkte außerhalb von D macht die Stetigkeit keine Aussage.

(d) Die Quadratwurzel $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ ist stetig. Für $a > 0$ und $x \geq 0$ ist

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}},$$

also genügt $\delta = \sqrt{a}\,\varepsilon$. Für $a = 0$ ist $\sqrt{x} < \varepsilon$ gleichwertig mit $x < \varepsilon^2$, also genügt $\delta = \varepsilon^2$. Die Existenz der Wurzel ist Satz 2.39; Folgerung 7.27 gewinnt sie hier noch einmal.

Satz 7.11 (Rechenregeln für stetige Funktionen). Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind $f + g$, fg und $|f|$ stetig in a, und ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so auch f/g. Ist ferner $f(D) \subseteq E$ und $h : E \to \mathbb{R}$ stetig in $f(a)$, so ist $h \circ f$ stetig in a.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to a$. Nach Satz 7.10 gilt $f(x_n) \to f(a)$ und $g(x_n) \to g(a)$, nach den Rechenregeln für Folgen (Satz 4.9) also $(f+g)(x_n) \to (f+g)(a)$, ebenso für fg und f/g, und wegen $\big||f(x_n)| - |f(a)|\big| \leq |f(x_n) - f(a)|$ auch $|f(x_n)| \to |f(a)|$. Für die Verkettung ist $(f(x_n))$ eine Folge in E mit Grenzwert $f(a)$; da h in $f(a)$ stetig ist, folgt $h(f(x_n)) \to h(f(a))$. In jedem Fall liefert Satz 7.10 die Stetigkeit. □

Folgerung 7.12. Jedes Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Jede rationale Funktion p/q mit Polynomen p, q ist stetig auf $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Beweis. Die Identität und die Konstanten sind stetig; Induktion über k mit der Produktregel ergibt die Stetigkeit von $x \mapsto x^k$, dann die Summenregel die von p. Für p/q wendet man die Quotientenregel auf $D = \{q \neq 0\}$ an. □

Bemerkung (Maximum und Minimum). Für reelle u, v, u', v' gilt

$$|\max\{u,v\} - \max\{u',v'\}| \leq \max\{|u-u'|,\, |v-v'|\}.$$

Denn ist etwa $\max\{u,v\} \geq \max\{u',v'\}$ und $\max\{u,v\} = u$, so ist $0 \leq u - \max\{u',v'\} \leq u - u' \leq |u-u'|$; die übrigen Fälle gehen ebenso, mit vertauschten Rollen. Seien nun $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in a und $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für $x \in D \cap B_{\delta_1}(a)$ und $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ für $x \in D \cap B_{\delta_2}(a)$. Für $x \in D \cap B_\delta(a)$ mit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ist nach der Ungleichung $|\max\{f(x), g(x)\} - \max\{f(a), g(a)\}| < \varepsilon$. Die punktweise gebildete Funktion $\max\{f, g\}$ ist also in a stetig. Wegen $\min\{u,v\} = -\max\{-u,-v\}$ und Satz 7.11 (Produkt mit der Konstanten -1) gilt dasselbe für $\min\{f,g\}$. Sind f und g stetig, so sind es deshalb auch $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$, insbesondere $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Bemerkung (Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$). Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ wie in Abschnitt 3.3, $D \subseteq \mathbb{K}$ nicht leer und $f : D \to \mathbb{K}$. Liest man Definition 7.1, 7.3 und 7.9 mit $a \in \mathbb{K}$, $c \in \mathbb{K}$, dem Betrag auf $\mathbb{K}$ und der Kreisscheibe $B_\delta(a) \subseteq \mathbb{K}$, so erhält man Häufungspunkt, Grenzwert und Stetigkeit für solche Funktionen; für $D \subseteq \mathbb{R}$ und reellwertiges f sind es die bisherigen Begriffe. Lemma 7.2, Lemma 7.4, Satz 7.5, Satz 7.6 (1) und (2) samt der Bemerkung zu Regel 2, Satz 7.10, Satz 7.11, Folgerung 7.12 (mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$, auf $\mathbb{K}$) und Lemma 7.28 gelten dann mit denselben Beweisen. Diese benutzen vom Betrag nur, dass $|x| \geq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$ ist, die Symmetrie $|x - y| = |y - x|$, die Dreiecksungleichung und ihre Umkehrung (Satz 3.9, Satz 3.10), von den Toleranzen ε, δ nur reelle Zahlen und von Folgen nur die Rechenregeln aus Satz 4.9, die für $\mathbb{K}$ bewiesen sind. Nach Satz 4.9 (3) und Satz 7.10 ist mit f auch $\bar{f}$ stetig, nach Satz 7.11 also auch $\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ und $\operatorname{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$; umgekehrt ist $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ stetig, wenn Real- und Imaginärteil es sind. Nicht übertragen lassen sich die Aussagen, die die Anordnung benutzen: Satz 7.6 (3) und (4), Definition 7.7 und Lemma 7.8, die Bemerkung über Maximum und Minimum, Lemma 7.13 und alles, was im Text auf Lemma 7.13 folgt.

Zwei Hilfsmittel werden im Folgenden oft gebraucht. Das erste sagt, dass ein stetiges f mit $f(a) > 0$ nahe bei a positiv bleibt. Das zweite erlaubt, eine Funktion aus stetigen Stücken zusammenzusetzen.

Lemma 7.13 (Vorzeichenerhaltung). Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a und $f(a) > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ für alle $x \in D \cap B_\delta(a)$. Entsprechend für $f(a) < 0$.

Beweis. Zu $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$ für $x \in D \cap B_\delta(a)$; dann ist $f(x) > f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2}$. Für $f(a) < 0$ wende man das auf $-f$ an. □

Lemma 7.14 (Verkleben). Seien $p < q < r$, und sei $f : [p,r] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Einschränkungen auf $[p,q]$ und auf $[q,r]$ stetig sind. Dann ist f stetig.

Beweis. In einem Punkt $a \neq q$ folgt die Stetigkeit aus der des passenden Stücks: Für $a < q$ liegt $[p,r] \cap B_{q-a}(a)$ in $[p,q]$, und Lemma 7.28 (2) mit $E = [p,q]$ ergibt die Stetigkeit von f in a; für $a > q$ ebenso mit $[q,r]$. Im Punkt q gibt es zu $\varepsilon > 0$ Zahlen δ_1, δ_2 für die beiden Stücke; für $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $x \in [p,r]$ mit $|x - q| < \delta$ liegt x in $[p,q]$ oder in $[q,r]$, und in beiden Fällen ist $|f(x) - f(q)| < \varepsilon$. □

Wesentlich ist, dass beide Stücke den Punkt q enthalten, also denselben Wert $f(q)$ benutzen. Für $f = 0$ auf $[0,1)$ und $f = 1$ auf $[1,2]$ sind beide Einschränkungen auf $[0,1)$ und $[1,2]$ stetig, aber f ist es nicht.

7.3 Der Zwischenwertsatz

Nun zur Leitfrage. Bernard Bolzano hat in einer eigenen Schrift verlangt, diesen Satz nicht der geometrischen Anschauung zu überlassen, sondern rein analytisch zu beweisen, und einen solchen Beweis vorgelegt. Wir geben zwei Beweise. Der erste benutzt das Supremum, der zweite die Intervallschachtelung und liefert zugleich ein Rechenverfahren.

Satz 7.15 (Nullstellensatz von Bolzano). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweisidee. Man nimmt die am weitesten rechts liegende Stelle, bis zu der f „noch nicht positiv war“, genauer das Supremum der Menge, auf der $f \leq 0$ ist. Dort kann f weder positiv noch negativ sein, denn nach Lemma 7.13 bliebe das Vorzeichen in einer Umgebung erhalten.

Erster Beweis (Supremum). Sei $M = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$. Es ist $a \in M$, und b ist obere Schranke von M. Nach der Supremumseigenschaft (Satz 2.34) existiert $\xi = \sup M$, und $a \leq \xi \leq b$. Wir zeigen $f(\xi) = 0$.

Angenommen, $f(\xi) < 0$. Dann ist $\xi \neq b$, also $\xi < b$. Nach Lemma 7.13 gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - \xi| < \delta$. Der Punkt $x = \min\{\xi + \frac{\delta}{2}, b\}$ ist größer als ξ, liegt in $[a,b]$ und erfüllt $|x - \xi| < \delta$, also $f(x) < 0$ und $x \in M$. Das widerspricht $x > \xi = \sup M$.

Angenommen, $f(\xi) > 0$. Dann ist $\xi \neq a$, also $\xi > a$. Nach Lemma 7.13 gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - \xi| < \delta$. Sei $t = \max\{\xi - \frac{\delta}{2}, a\} < \xi$. Für $x \in M$ ist $x \in [a,b]$, $x \leq \xi$ und $f(x) \leq 0$; nach der Wahl von δ ist also $|x - \xi| \geq \delta$, das heißt $x \leq \xi - \delta < t$. Also ist t eine obere Schranke von M, die kleiner ist als $\xi = \sup M$ – Widerspruch.

Nach (O0) bleibt $f(\xi) = 0$. Wegen $f(a) < 0 < f(b)$ ist $\xi \neq a$ und $\xi \neq b$. □

Zweiter Beweis (Halbierung). Setze $a_0 = a$, $b_0 = b$. Seien $a_n < b_n$ schon gewählt mit $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ und $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Sei $m = \frac{a_n+b_n}{2}$. Ist $f(m) = 0$, so ist $\xi = m$ eine Nullstelle, und $m \in (a, b)$, weil $a \le a_n < m < b_n \le b$. Ist $f(m) < 0$, so setze $a_{n+1} = m$, $b_{n+1} = b_n$; ist $f(m) > 0$, so setze $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m$. In beiden Fällen bleiben die Bedingungen erhalten.

Bricht das Verfahren nie ab, so bilden die $[a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung mit $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ (Satz 4.4 (2) mit $q = \frac{1}{2}$ und Satz 4.9). Nach Folgerung 5.15 (3) und Lemma 5.6 gibt es ein ξ in allen Intervallen, und $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$. Da f in $\xi \in [a, b]$ stetig ist, folgt nach Satz 7.10 $f(a_n) \to f(\xi)$ und $f(b_n) \to f(\xi)$. Aus $f(a_n) < 0$ folgt $f(\xi) \le 0$, aus $f(b_n) > 0$ folgt $f(\xi) \ge 0$ (Satz 4.10). Also $f(\xi) = 0$, und wie oben $\xi \ne a, b$. □

Beide Beweise benutzen die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, der erste in Gestalt des Supremums, der zweite in Gestalt der Intervallschachtelung. Ohne sie ist der Satz falsch, wie das Beispiel der Leitfrage in $\mathbb{Q}$ zeigt (G5). Der zweite Beweis gibt außerdem eine Fehlerschranke: Nach n Schritten liegt eine Nullstelle in einem Intervall der Länge $\frac{b-a}{2^n}$, das man kennt (Abschnitt 7.6, Beispiel 4).

Folgerung 7.16 (Zwischenwertsatz). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und liege c zwischen $f(a)$ und $f(b)$, das heißt $f(a) \le c \le f(b)$ oder $f(b) \le c \le f(a)$. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$.

Beweis. Ist $c = f(a)$ oder $c = f(b)$, so ist $\xi = a$ oder $\xi = b$. Sei also c echt zwischen beiden. Gilt $f(a) < c < f(b)$, so erfüllt $g(x) = f(x) - c$ die Voraussetzungen von Satz 7.15. Gilt $f(b) < c < f(a)$, so erfüllt $g(x) = c - f(x)$ sie. Die Nullstelle von g ist das gesuchte ξ. □

Zurück zur Leitfrage. Ihr erster Teil ist durch Definition 7.9 beantwortet: „Ohne Sprung“ heißt, dass sich jede Genauigkeit ε für den Wert durch eine Genauigkeit δ für das Argument erzwingen lässt. Für den zweiten Teil: Das Polynom $f(x) = x^3 - 2x - 5$ ist stetig (Folgerung 7.12), und es ist $f(2) = -1 < 0 < 16 = f(3)$; nach Satz 7.15 hat f eine Nullstelle in $(2, 3)$, und Beispiel 4 in Abschnitt 7.6 grenzt sie ein. Die Funktion $g(x) = x^2 - 2$ auf $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ erfüllt dieselbe ε-δ-Bedingung, und doch scheitert der Schluss, weil $\sqrt{2}$ nicht rational ist (G5). Die Stetigkeit trägt den Schluss also nicht allein. Die gesuchte Eigenschaft der reellen Zahlen ist die Vollständigkeit; beide Beweise von Satz 7.15 benutzen sie. Dass der Graph „in einem Zug“ verläuft, im Sinn des Zwischenwertsatzes, folgt aus der Stetigkeit auf einem Intervall, ist aber nicht gleichwertig mit ihr (G7).

Die übersichtlichste Form des Satzes spricht über Bilder. Dafür braucht man eine Eigenschaft von Mengen, die nicht auf Endpunkte Bezug nimmt.

Definition 7.17. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $x < y$ aus M auch jeder Punkt dazwischen in M liegt, also $[x, y] \subseteq M$.

Lemma 7.18. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn sie ein Intervall im Sinn von Abschnitt 2.2 ist, also eine der Mengen $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, (α, β), $[\alpha, \infty)$, (α, ∞), $(-\infty, \beta]$, $(-\infty, \beta)$ mit reellen $\alpha \leq \beta$.

Beweis. Dass die aufgezählten Mengen konvex sind, folgt aus (O0). Sei umgekehrt $M \neq \emptyset$ konvex, und seien $\alpha = \inf M$ und $\beta = \sup M$, gebildet in $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 2.37); es ist also $\alpha = -\infty$, wenn M nach unten unbeschränkt ist, und $\beta = \infty$, wenn M nach oben unbeschränkt ist. Jedes Element von M liegt zwischen α und β (einschließlich). Sei $z \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < z < \beta$. Da z keine untere Schranke von M ist (für $\alpha = -\infty$, weil M nach unten unbeschränkt ist; sonst, weil $z > \inf M$), gibt es $x \in M$ mit $x < z$; ebenso $y \in M$ mit $y > z$. Also liegt $z \in [x, y] \subseteq M$. Damit ist $(\alpha, \beta) \subseteq M$, und M entsteht aus (α, β), indem man die reellen unter den Punkten α, β hinzunimmt oder nicht. Das sind die aufgezählten Fälle. □

Das Lemma benutzt Infimum und Supremum, also die Vollständigkeit. In $\mathbb{Q}$ ist die entsprechende Aussage falsch (Abschnitt 2.2): Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 < 2\}$ enthält mit zwei rationalen Zahlen jede rationale Zahl dazwischen, ist aber kein Intervall von $\mathbb{Q}$. Im Folgenden wird Lemma 7.18 meist in der leichten Richtung benutzt: Ein Intervall enthält mit zwei Punkten alle Punkte dazwischen.

Definition 7.29 (Endpunkte, innere Punkte). Sei I ein nichtleeres Intervall. Die Elemente $\alpha = \inf I$ und $\beta = \sup I$ von $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 2.37) heißen *linker* und *rechter Endpunkt* von I. Sie können $-\infty$ beziehungsweise ∞ sein und gehören zu I oder nicht. Ein Punkt $a \in I$ mit $\alpha < a < \beta$ heißt *innerer Punkt* von I.

Für $a \in I$ gilt: Genau dann ist $a > \alpha$, wenn es ein $x \in I$ mit $x < a$ gibt. Denn $a > \inf I$ heißt, dass a keine untere Schranke von I ist; und aus $x \in I$, $x < a$ folgt $\alpha \leq x < a$. In diesem Fall ist $[x, a] \subseteq I$, und a ist Häufungspunkt von $I \cap (-\infty, a)$: Zu $\delta > 0$ liegt $\max\{x, a - \frac{\delta}{2}\}$ in $[x, a) \subseteq I$ und in $B_\delta(a)$. Entsprechendes gilt rechts. Ein innerer Punkt ist deshalb Häufungspunkt sowohl von $I \cap (-\infty, a)$ als auch von $I \cap (a, \infty)$, und mit $x, y \in I$, $x < a < y$, und $\delta = \min\{a - x, y - a\}$ ist $B_\delta(a) \subseteq [x, y] \subseteq I$. Umgekehrt ist ein Punkt a mit $B_\delta(a) \subseteq I$ für ein $\delta > 0$ ein innerer Punkt, denn $a \pm \frac{\delta}{2}$ liegen in I.

Satz 7.19. Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall.

Beweis. Seien $u < v$ Punkte von $f(I)$, etwa $u = f(x)$, $v = f(y)$, und sei $u < c < v$. Es ist $x \neq y$. Ist $x < y$, so liegt $[x, y]$ nach Lemma 7.18 in I, die Einschränkung von f auf $[x, y]$ ist nach Lemma 7.28 (1) stetig, und man wende Folgerung 7.16 auf sie an; sonst ebenso mit $[y, x]$. Es gibt also $\xi \in I$ mit $f(\xi) = c$, und $c \in f(I)$. Damit ist $f(I)$ konvex, nach Lemma 7.18 also ein Intervall. □

Ein stetiges Bild eines Intervalls ist also wieder ein Intervall, aber nicht notwendig eines derselben Art: $x \mapsto x^2$ bildet das offene Intervall $(-1, 1)$ auf $[0, 1)$ ab. Dass ein *abgeschlossenes, beschränktes* Intervall auf ein ebensolches abgebildet wird, ist der Satz vom

Maximum (Einheit 8, Folgerung 8.17 (1)).

Folgerung 7.20. Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat eine reelle Nullstelle.

Beweis. Nach Division durch den führenden Koeffizienten sei $p(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$ mit ungeradem n. Sei $C = \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|$ und $R = 1 + C$. Für $|x| \geq R$ ist $|x| \geq 1$, also $|x|^k \leq |x|^{n-1}$ für $k \leq n-1$, und nach der Dreiecksungleichung für endliche Summen (Aufgabe B8 (a) der Einheit 1)

$$\Big|\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k\Big| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|\,|x|^k \leq C\,|x|^{n-1} < R\,|x|^{n-1} \leq |x|^n.$$

Daher hat $p(x)$ für $|x| \geq R$ dasselbe Vorzeichen wie x^n, und wegen n ungerade ist $p(R) > 0$ und $p(-R) < 0$. Satz 7.15 auf $[-R, R]$ liefert die Nullstelle. □

Für gerade n ist die Aussage falsch: $x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle. Der Beweis zeigt auch, dass alle reellen Nullstellen von p in $(-R, R)$ liegen.

7.4 Monotone Funktionen und Umkehrfunktionen

Eine Funktion umkehren heißt, die Gleichung $f(x) = y$ nach x aufzulösen. So entstehen die Wurzeln: $\sqrt[k]{y}$ ist die nichtnegative Lösung von $x^k = y$. Für eine stetige Funktion f auf einem Intervall stellen sich drei Fragen. Hat die Gleichung für jedes y aus einem gegebenen Intervall eine Lösung? Ist sie eindeutig? Und ist die Lösung als Funktion von y wieder stetig? Die erste Frage beantwortet der Zwischenwertsatz in der Form von Satz 7.19. Die Eindeutigkeit ist Injektivität, und für stetige Funktionen auf Intervallen ist sie dasselbe wie strenge Monotonie (Satz 7.25). Dann ist die Umkehrfunktion stetig (Satz 7.26); dafür kommt es auf den Definitionsbereich an (G8).

Definition 7.21. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend*, wenn aus $x < y$ stets $f(x) \leq f(y)$ folgt, und *streng monoton wachsend*, wenn daraus $f(x) < f(y)$ folgt; entsprechend *(streng) monoton fallend*. Sie heißt *(streng) monoton*, wenn sie (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Eine streng monotone Funktion ist injektiv: Aus $x \neq y$, etwa $x < y$, folgt $f(x) < f(y)$ oder $f(x) > f(y)$. Monotone Funktionen brauchen nicht stetig zu sein, aber ihre Unstetigkeiten in inneren Punkten sind von sehr einfacher Art: Es sind Sprünge.

Satz 7.22 (einseitige Grenzwerte monotoner Funktionen). Sei I ein Intervall mit den Endpunkten α, β, sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $a \in I$. Ist $a > \alpha$, so

existiert $f(a-)$, und

$$f(a-) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\} \le f(a).$$

Ist $a < \beta$, so existiert entsprechend $f(a+) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\} \ge f(a)$. Ist a innerer Punkt, so ist f in a genau dann stetig, wenn $f(a-) = f(a+)$.

Beweis. Wegen $a > \alpha$ gibt es nach Definition 7.29 und dem Absatz danach ein $x \in I$ mit $x < a$, und a ist Häufungspunkt von $I \cap (-\infty, a)$; der linksseitige Grenzwert ist also im Sinn von Definition 7.7 erklärt. Die Menge $\{f(x) : x \in I,\ x < a\}$ ist nicht leer und durch $f(a)$ nach oben beschränkt. Ihr Supremum s existiert, und $s \le f(a)$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $s - \varepsilon$ keine obere Schranke ist, gibt es $x_0 \in I$, $x_0 < a$, mit $f(x_0) > s - \varepsilon$. Für $x \in I$ mit $x_0 < x < a$ ist dann $s - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le s$, also $|f(x) - s| < \varepsilon$. Mit $\delta = a - x_0$ ist das die Bedingung für $f(a-) = s$. Die rechte Seite folgt ebenso mit dem Infimum.

Für einen inneren Punkt a gilt $f(a-) \le f(a) \le f(a+)$, und nach dem Absatz nach Definition 7.29 ist Lemma 7.8 anwendbar. Ist f stetig in a, so ist $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ nach Satz 7.10, nach Lemma 7.8 also $f(a-) = f(a) = f(a+)$. Ist umgekehrt $f(a-) = f(a+)$, so ist dieser Wert nach der Ungleichungskette gleich $f(a)$, und Lemma 7.8 und Satz 7.10 ergeben die Stetigkeit. □

Existieren in einem Punkt a beide einseitigen Grenzwerte und sind sie verschieden, so heißt a *Sprungstelle* von f und $f(a+) - f(a-)$ der *Sprung* von f in a. Nach Satz 7.22 ist jede Unstetigkeitsstelle einer monoton wachsenden Funktion, die innerer Punkt ist, eine Sprungstelle mit positivem Sprung. Solche Sprungstellen können dicht liegen (Aufgabe V1), aber es sind nicht viele:

Satz 7.23. Eine monotone Funktion auf einem Intervall hat abzählbar viele Unstetigkeitsstellen (im Sinn von Definition 2.42, also endlich viele, auch keine, oder abzählbar unendlich viele).

Beweis. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (sonst betrachte $-f$; wegen $|(-f)(x) - (-f)(a)| = |f(x) - f(a)|$ hat es nach Definition 7.9 dieselben Unstetigkeitsstellen), und sei S die Menge der inneren Punkte von I, in denen f unstetig ist. Für $a \in S$ ist $f(a-) < f(a+)$ nach Satz 7.22. Für $a < b$ in S gilt $f(a+) \le f(b-)$: Der Punkt $c = \frac{a+b}{2}$ liegt in I, und $f(a+) \le f(c) \le f(b-)$ nach den Darstellungen als Infimum und Supremum. Die offenen Intervalle $J_a = (f(a-), f(a+))$, $a \in S$, sind also paarweise disjunkt. Sei $k \mapsto r_k$ eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (Satz 2.45). Man ordne jedem $a \in S$ den kleinsten Index k_a zu, für den $r_{k_a} \in J_a$ ist; er existiert nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) und der Wohlordnung (Satz 1.16). Wegen der Disjunktheit ist $a \mapsto k_a$ eine Injektion $S \to \mathbb{N}$, nach Lemma 2.44 ist S also abzählbar. Hinzu kommen höchstens die Endpunkte von I, die zu I gehören. Auch dann bleibt die Menge abzählbar: $k_a + 2$ für $a \in S$, 1 für den linken Endpunkt und 2 für den rechten, falls er vom linken

verschieden ist, ist eine Injektion nach $\mathbb{N}$. □

Der Beweis benutzt keine Auswahl: Die Abzählung von $\mathbb{Q}$ legt die zugeordnete Zahl fest, und die übrigen Schritte (Satz 7.22, die Rückführung auf wachsendes f, Lemma 2.44) wählen nichts. Er benutzt aber die Vollständigkeit, über die Darstellung der einseitigen Grenzwerte als Supremum und Infimum in Satz 7.22. Der Satz beantwortet die Frage, wie viel Unstetigkeit eine monotone Funktion verträgt; Aufgabe V1 zeigt, dass „abzählbar“ nicht durch „vereinzelt“ ersetzt werden kann.

Nun zu den Umkehrfunktionen. Das folgende Lemma ist der Kern: Eine monotone Funktion kann nur durch einen Sprung unstetig werden, und ein Sprung hinterlässt eine Lücke im Bild.

Lemma 7.24. Sei $g : E \to \mathbb{R}$ monoton und $g(E)$ ein Intervall. Dann ist g stetig. Dabei braucht $E \subseteq \mathbb{R}$ kein Intervall zu sein.

Beweis. Sei g monoton wachsend (sonst betrachte $-g$: Es ist monoton wachsend; sein Bild $-g(E) = \{-x : x \in g(E)\}$ ist wieder ein Intervall, denn $x \mapsto -x$ führt nach (O2) und (O5) mit $z = -1$ jedes Intervall der Liste in Lemma 7.18 in eines der Liste über, etwa $[\alpha, \beta)$ in $(-\beta, -\alpha]$; und wegen $|g(y) - g(y_0)| = |(-g)(y) - (-g)(y_0)|$ ist g in denselben Punkten stetig wie $-g$), $y_0 \in E$, $x_0 = g(y_0)$ und $\varepsilon > 0$.

Rechte Seite. Wir suchen $\delta_+ > 0$ mit $g(y) < x_0 + \varepsilon$ für alle $y \in E$ mit $y_0 \le y < y_0 + \delta_+$. Gilt $g(y) < x_0 + \varepsilon$ sogar für alle $y \in E$ mit $y \ge y_0$, so leistet $\delta_+ = 1$ das Verlangte. Andernfalls gibt es $y' \in E$ mit $y' \ge y_0$ und $g(y') \ge x_0 + \varepsilon$. Die Zahlen x_0 und $g(y')$ liegen im Intervall $g(E)$, nach Lemma 7.18 also auch $x_1 = x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$; es ist $x_1 = g(y_1)$ mit einem $y_1 \in E$. Aus $g(y_1) > g(y_0)$ und der Monotonie folgt $y_1 > y_0$. Setze $\delta_+ = y_1 - y_0$. Für $y \in E$ mit $y_0 \le y < y_1$ ist $x_0 \le g(y) \le g(y_1) = x_0 + \frac{\varepsilon}{2} < x_0 + \varepsilon$.

Linke Seite. Ebenso gibt es $\delta_- > 0$ mit $g(y) > x_0 - \varepsilon$ für alle $y \in E$ mit $y_0 - \delta_- < y \le y_0$.

Für $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$ und $y \in E$ mit $|y - y_0| < \delta$ gilt dann $x_0 - \varepsilon < g(y) < x_0 + \varepsilon$, wobei die jeweils andere Ungleichung aus der Monotonie folgt: Für $y \ge y_0$ ist $g(y) \ge x_0 > x_0 - \varepsilon$, für $y \le y_0$ ist $g(y) \le x_0 < x_0 + \varepsilon$. □

Satz 7.25. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.

Beweisidee. Wäre f injektiv, aber weder streng wachsend noch streng fallend, so gäbe es ein Paar von Stellen, an dem f steigt, und eines, an dem f fällt. Man schiebt das eine Paar stetig in das andere. Unterwegs muss die Differenz der Funktionswerte ihr Vorzeichen wechseln, also null werden, und das widerspricht der Injektivität.

Beweis. Streng monotone Funktionen sind injektiv. Sei umgekehrt f injektiv, aber nicht streng monoton. Weil f nicht streng wachsend ist, gibt es $x_1 < x_2$ in I mit $f(x_1) \ge f(x_2)$, wegen der Injektivität $f(x_1) > f(x_2)$. Weil f nicht streng fallend ist, gibt es ebenso

$y_1 < y_2$ mit $f(y_1) < f(y_2)$. Für $t \in [0,1]$ setze

$$u(t) = (1-t)x_1 + ty_1, \qquad v(t) = (1-t)x_2 + ty_2.$$

Beide Punkte liegen zwischen Punkten von I, nach Lemma 7.18 also in I. Es ist $v(t) - u(t) = (1-t)(x_2 - x_1) + t(y_2 - y_1) > 0$, weil beide Summanden nichtnegativ sind und nicht beide null sein können. Die Funktion $h(t) = f(v(t)) - f(u(t))$ ist nach Folgerung 7.12 und Satz 7.11 stetig auf $[0,1]$, mit $h(0) = f(x_2) - f(x_1) < 0$ und $h(1) = f(y_2) - f(y_1) > 0$. Nach Satz 7.15 gibt es t mit $h(t) = 0$, also $f(u(t)) = f(v(t))$ bei $u(t) \neq v(t)$ – Widerspruch zur Injektivität. □

Ohne Stetigkeit oder auf einem Definitionsbereich, der kein Intervall ist, ist der Satz falsch (G9). Aufgabe V3 gibt einen zweiten Beweis, der statt der Stetigkeit nur die Zwischenwerteigenschaft benutzt.

Satz 7.26 (Umkehrfunktion). Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann gilt:

1. $J = f(I)$ ist ein Intervall, und $f : I \to J$ ist bijektiv;
2. die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist streng monoton wachsend und stetig;
3. hat I mehr als einen Punkt und sind $\alpha < \beta$ die Endpunkte von I, so existieren $\lambda = \lim_{x\to\alpha+} f(x)$ und $\mu = \lim_{x\to\beta-} f(x)$ (möglicherweise $\pm\infty$; für $\alpha = -\infty$ ist $\lim_{x\to-\infty}$ gemeint, für $\beta = \infty$ entsprechend), und λ, μ sind die Endpunkte von J. Dabei gilt $\lambda \in J$ genau dann, wenn $\alpha \in I$, und $\mu \in J$ genau dann, wenn $\beta \in I$.

Entsprechendes gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis. (1) J ist nach Satz 7.19 ein Intervall; $f : I \to J$ ist surjektiv nach Definition von J und injektiv wegen der strengen Monotonie.

(2) Seien $y < y'$ in J, $y = f(x)$, $y' = f(x')$. Wäre $x \geq x'$, so wäre $y = f(x) \geq f(x') = y'$. Also $f^{-1}(y) = x < x' = f^{-1}(y')$. Das Bild $f^{-1}(J) = I$ ist ein Intervall, nach Lemma 7.24 ist f^{-1} stetig.

(3) Wir behandeln den linken Endpunkt; der rechte geht ebenso, mit Supremum statt Infimum und umgekehrten Ungleichungen. Sei $\lambda = \inf J$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Da I mehr als einen Punkt hat, gibt es $x_1 \in I$ mit $x_1 > \alpha$, und $(\alpha, x_1] \subseteq I$ nach dem Beweis von Lemma 7.18. Für endliches α ist α also Häufungspunkt von $I \cap (\alpha, \infty)$, für $\alpha = -\infty$ ist I nach unten unbeschränkt; der Grenzwert $\lim_{x\to\alpha+} f(x)$ ist in beiden Fällen im Sinn von Definition 7.7 erklärt.

Fall $\alpha \in I$. Für $x \in I$, $x > \alpha$, ist $f(\alpha) < f(x)$. Also ist $f(\alpha)$ das kleinste Element von J, und $\lambda = f(\alpha) \in J$. Da f in α stetig ist, gilt $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ nach Satz 7.10, nach Lemma 7.28 (1), angewandt auf $E = I \cap (\alpha, \infty)$, also $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \lambda$.

Fall $\alpha \notin I$. Zu $y = f(x) \in J$ gibt es $z \in I$ mit $z < x$, denn $x > \alpha$, und $f(z) < y$. Also hat J kein kleinstes Element, und $\lambda = \inf J$ gehört nicht zu J. Zum Grenzwert: Sei zunächst $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Da $\lambda + \varepsilon$ keine untere Schranke von J ist, gibt es $x_0 \in I$ mit $f(x_0) < \lambda + \varepsilon$. Für $x \in I$ mit $x < x_0$ ist $\lambda \le f(x) < f(x_0) < \lambda + \varepsilon$, also $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Das ist die Bedingung aus Definition 7.7 mit $\delta = x_0 - \alpha > 0$ für endliches α und mit $R = x_0$ für $\alpha = -\infty$. Ist $\lambda = -\infty$ und $K \in \mathbb{R}$, so gibt es $x_0 \in I$ mit $f(x_0) < K$, und $f(x) < K$ für alle $x \in I$ mit $x < x_0$; mit denselben δ beziehungsweise R ist das $\lim_{x \to \alpha+} f(x) = -\infty$.

In beiden Fällen ist λ der linke Endpunkt von J, und er gehört genau dann zu J, wenn $\alpha \in I$. □

Bemerkenswert ist die Arbeitsteilung im Beweis. Die Stetigkeit von f wird in (1) gebraucht, damit J ein Intervall ist – dort steckt über Satz 7.19 die Vollständigkeit –, und in (3) in einem Endpunkt, der zu I gehört; (3) benutzt außerdem Infimum und Supremum von J. Der Beweis von (2) benutzt weder die Stetigkeit von f noch die Vollständigkeit: Er braucht nur die strenge Monotonie von f, dass das Bild I von f^{-1} ein Intervall ist, und Lemma 7.24, dessen Beweis von Lemma 7.18 nur die leichte Richtung benutzt. Er zeigt deshalb mehr:

Folgerung 7.30. Ist I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ stetig, auch wenn f selbst unstetig ist und $f(I)$ kein Intervall ist.

Beweis. Die Abbildung $f : I \to f(I)$ ist bijektiv, weil streng monotone Funktionen injektiv sind. Ist f streng monoton wachsend, so ist f^{-1} streng monoton wachsend, wie im Beweis von Satz 7.26 (2). Ist f streng monoton fallend und sind $y < y'$ in $f(I)$, $y = f(x)$, $y' = f(x')$, so wäre aus $x \le x'$ die Ungleichung $y \ge y'$ gefolgt; also ist $f^{-1}(y) = x > x' = f^{-1}(y')$, und f^{-1} ist streng monoton fallend. In beiden Fällen ist f^{-1} monoton mit dem Bild $f^{-1}(f(I)) = I$, einem Intervall. Nach Lemma 7.24 mit $E = f(I)$ ist f^{-1} stetig. □

Ein Beispiel: $f(x) = x$ für $0 \le x < 1$ und $f(x) = x + 1$ für $1 \le x \le 2$ ist auf $I = [0, 2]$ streng monoton wachsend und in 1 unstetig. Ihre Umkehrfunktion auf $f(I) = [0, 1) \cup [2, 3]$ ist $y \mapsto y$ auf $[0, 1)$ und $y \mapsto y - 1$ auf $[2, 3]$, also die Funktion aus (G8), und sie ist nach Folgerung 7.30 stetig. Kehrt man in (G8) dagegen diese Funktion um, so ist ihr Definitionsbereich $[0, 1) \cup [2, 3]$ kein Intervall, und die Umkehrfunktion springt.

Folgerung 7.27 (k-te Wurzel). Für $k \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^k$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion $[0, \infty) \to [0, \infty)$. Ihre Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[k]{y}$ ist stetig und streng monoton wachsend.

Beweis. Für $0 \le x < y$ ist $y^k - x^k = (y - x) \sum_{j=0}^{k-1} y^{k-1-j} x^j > 0$, denn der Summand y^{k-1} ist positiv und die übrigen sind nichtnegativ. Die Funktion ist stetig (Folgerung 7.12), ihr Bild J ist nach Satz 7.19 ein Intervall mit kleinstem Element $0^k = 0$. Für $x \ge 1$ ist

$x^k \geq x$, also ist J nach oben unbeschränkt. Nach Lemma 7.18 ist $J = [0, \infty)$. Der Rest ist Satz 7.26. □

Die Umkehrfunktion ist die k-te Wurzel aus Satz 2.39; neu ist hier ihre Stetigkeit. Die Existenz der Wurzel ist damit ein zweites Mal bewiesen, jetzt über den Zwischenwertsatz statt über die Supremumseigenschaft. Das ist kein Zufall: Beide Beweise benutzen die Vollständigkeit, nur an verschiedener Stelle. In Einheit 9 entsteht auf dieselbe Weise der Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

7.5 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt

(G1) Grenzwert und Funktionswert. Sei $f(x) = 1$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Dann ist $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$; f ist in 0 unstetig. Ändert man den Wert $f(0)$ zu 1, wird f stetig. Eine solche Unstetigkeit heißt *hebbar*; sie ist keine Sprungstelle, denn beide einseitigen Grenzwerte sind 1. Der Grenzwert sieht vom Punkt selbst ab, die Stetigkeit nicht.

(G2) Nirgends stetig. Die *Dirichlet-Funktion* $\chi(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$, $\chi(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$, ist in keinem Punkt stetig. Neben der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ braucht man die Dichtheit der irrationalen Zahlen: Zu $x < y$ gibt es ein rationales r mit $x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2}$, und $r + \sqrt{2} \in (x, y)$ ist irrational, da sonst $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ rational wäre. Zu jedem a gibt es also eine Folge rationaler und eine Folge irrationaler Zahlen, die gegen a konvergieren. Längs der ersten ist $\chi \equiv 1$, längs der zweiten $\chi \equiv 0$; mindestens eine der Bildfolgen konvergiert nicht gegen $\chi(a)$.

(G3) Stetig in genau einem Punkt. $f(x) = x\,\chi(x)$ ist in 0 stetig, denn $|f(x) - f(0)| \leq |x|$, also genügt $\delta = \varepsilon$. In jedem Punkt $a \neq 0$ ist f unstetig: Längs rationaler Folgen gegen a strebt f gegen a, längs irrationaler gegen 0. Stetigkeit in einem Punkt sagt also nichts über die Nachbarpunkte.

(G4) Stetig genau in den irrationalen Punkten. Die *Thomaesche Funktion* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $T(x) = \frac{1}{q}$, falls x rational und q die kleinste natürliche Zahl mit $qx \in \mathbb{Z}$ ist (Satz 1.16, wie im Beweis von Satz 2.9), und $T(x) = 0$ für irrationales x. In einem rationalen Punkt a ist $T(a) > 0$, aber längs irrationaler Folgen gegen a ist $T = 0$; T ist dort unstetig. Sei nun a irrational, und angenommen, T ist in a unstetig. Wie im Beweis von Satz 7.10, (2)⇒(1), gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem n einen Punkt x_n mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $T(x_n) = |T(x_n) - T(a)| \geq \varepsilon$. Jedes x_n ist also rational, und sein kleinster Nenner q_n erfüllt $\frac{1}{q_n} \geq \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (Satz 2.29). Dann ist $q_n \leq N$, also ist q_n einer der Faktoren von $N!$ (Definition 1.17), und $m_n = N!\,x_n = \frac{N!}{q_n}(q_n x_n)$ ist eine ganze Zahl. Wegen $x_n \to a$ (wie im Beweis von Lemma 7.2) gilt $m_n \to N!\,a$ (Satz 4.9). Es gibt n_0 mit $|m_n - N!\,a| < \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$; für diese n ist $|m_n - m_{n_0}| < 1$, also $m_n = m_{n_0}$, denn zwei ganze Zahlen mit Abstand kleiner als 1 sind gleich. Die Folge (m_n) ist ab n_0 konstant und konvergiert gegen m_{n_0}; nach Satz 4.3 ist $N!\,a = m_{n_0}$, und $a = \frac{m_{n_0}}{N!}$ wäre

rational. Dieser Widerspruch zeigt, dass T in jedem irrationalen Punkt stetig ist. Der Grund ist sichtbar: Alle Brüche mit Nenner höchstens N liegen in der Menge $\frac{1}{N!}\mathbb{Z}$, und eine irrationale Zahl hat von dieser Menge einen positiven Abstand.

(G5) Zwischenwertsatz in $\mathbb{Q}$. Die Funktion $g(x) = x^2 - 2$ auf $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ ist stetig (dieselbe ε-δ-Rechnung wie in $\mathbb{R}$), hat $g(1) < 0 < g(2)$, aber keine Nullstelle. Im ersten Beweis von Satz 7.15 scheitert der Schritt „$\xi = \sup M$ existiert“, im zweiten die Intervallschachtelung.

(G6) Zwischenwertsatz ohne Stetigkeit. $f(x) = -1$ für $x < 0$, $f(x) = 1$ für $x \geq 0$, auf $[-1,1]$: $f(-1) < 0 < f(1)$, keine Nullstelle. Im ersten Beweis ist $\xi = \sup M = 0$ mit $f(0) = 1 > 0$, und Lemma 7.13 ist in 0 nicht anwendbar: Links von 0 ist f negativ. Der Punkt 0 ist eine Sprungstelle mit dem Sprung 2.

(G7) Zwischenwerteigenschaft ohne Stetigkeit. Die Umkehrung des Zwischenwertsatzes ist falsch. Für $n \in \mathbb{N}$ sei m_n der Mittelpunkt und h_n die halbe Länge des Intervalls $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Setze $f(x) = 1 - \frac{|x-m_n|}{h_n}$ für $x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ und $f(0) = 0$. Das ist wohldefiniert, weil an den gemeinsamen Endpunkten $\frac{1}{n+1}$ beide Vorschriften den Wert 0 liefern; jede Zahl $x \in (0,1]$ liegt in einem dieser Intervalle, weil es zu x ein n mit $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ gibt (Satz 2.29 und Satz 1.16). Auf jedem Intervall $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ ist f ein „Zelt“ mit Spitze $f(m_n) = 1$, und die Einschränkung dorthin ist nach Satz 7.11 stetig. Daraus folgt die Stetigkeit von f in jedem Punkt $x \in (0,1]$. Liegt x im Innern eines Zeltintervalls, so enthält dieses alle Punkte von $[0,1]$ nahe x, und Lemma 7.28 (2) gilt. Ist $x = \frac{1}{n}$ mit $n \geq 2$, so ist die Einschränkung auf $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}]$ nach Lemma 7.14 stetig; dieses Intervall enthält alle Punkte von $[0,1]$ mit Abstand kleiner als $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ von $\frac{1}{n}$, und Lemma 7.28 (2) gilt wieder. Für $x = 1$ enthält $[\frac{1}{2}, 1]$ alle Punkte von $[0,1]$ mit Abstand kleiner als $\frac{1}{2}$. In 0 ist f unstetig, denn $m_n \to 0$ und $f(m_n) = 1 \neq f(0)$. Trotzdem nimmt f auf jedem Intervall $[c,d] \subseteq [0,1]$ jeden Wert zwischen $f(c)$ und $f(d)$ an: Für $c > 0$ nach Folgerung 7.16, für $c = 0$, weil $[0,d]$ mit einem n, für das $\frac{1}{n} \leq d$ ist, das ganze Zelt über $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ enthält und f dort jeden Wert in $[0,1]$ annimmt, also auch alle Werte zwischen $f(0) = 0$ und $f(d) \leq 1$.

(G8) Umkehrfunktion bei Lücke im Definitionsbereich. Sei $E = [0,1) \cup [2,3]$ und $f(x) = x$ für $x \in [0,1)$, $f(x) = x - 1$ für $x \in [2,3]$. Dann ist $f : E \to [0,2]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = y$ für $y < 1$ und $f^{-1}(y) = y+1$ für $y \geq 1$; sie springt in 1, mit $f^{-1}(1-) = 1$ und $f^{-1}(1+) = 2$. In Satz 7.26 wird gebraucht, dass der Definitionsbereich ein Intervall ist: Das Bild von f^{-1} ist E, und E ist keines.

(G9) Injektiv, aber nicht monoton. Auf $[0,2]$ sei $f(x) = x$ für $x < 1$ und $f(x) = 3 - x$ für $x \geq 1$. Die Werte sind $[0,1)$ und $[1,2]$, also ist f injektiv; es ist $f(0) < f(1)$ und $f(1) > f(2)$, also ist f nicht monoton. f ist in 1 unstetig. Auf $E = [0,1] \cup [2,3]$ mit $f(x) = x$ für $x \leq 1$, $f(x) = 5 - x$ für $x \geq 2$ ist f stetig und injektiv, aber nicht monoton.

In Satz 7.25 werden also Stetigkeit und Intervall beide gebraucht.

(G10) Eine Folge genügt nicht. Das Folgenkriterium verlangt *jede* Folge. Für die Dirichlet-Funktion konvergiert $\chi(x_n)$ längs jeder Folge rationaler Zahlen $x_n \to a$ gegen 1. Ist a rational, so ist $1 = \chi(a)$, und trotzdem ist χ in a unstetig, weil es auch irrationale Folgen $x_n \to a$ mit $\chi(x_n) = 0$ gibt. Eine einzelne Folge kann also Unstetigkeit beweisen, Stetigkeit aber nicht.

7.6 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (x^2 mit ε und δ). Sei $f(x) = x^2$ und $a \in \mathbb{R}$. Es ist $|x^2 - a^2| = |x - a|\,|x + a|$. Für $|x - a| < 1$ ist $|x + a| \le |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|$. Mit

$$\delta = \min\Big\{1,\ \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\Big\}$$

folgt aus $|x - a| < \delta$, dass $|x^2 - a^2| < \delta(1 + 2|a|) \le \varepsilon$. Die Beschränkung $\delta \le 1$ dient wie in Aufgabe B8 (b) der Einheit 1 nur dazu, den Faktor $|x + a|$ durch eine Konstante zu ersetzen. Das δ hängt von a ab und wird für große $|a|$ klein.

Beispiel 2 (Differenzenquotient der Potenz). Die Sekante durch die Punkte (a, a^n) und (x, x^n) des Graphen hat die Steigung $\frac{x^n - a^n}{x - a}$; dieser Quotient ist für $x = a$ nicht erklärt. Was geschieht mit der Steigung, wenn x gegen a geht? Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n\,a^{n-1}.$$

Für $x \ne a$ ist

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} a^j.$$

Denn beim Ausmultiplizieren von $(x - a)\sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} a^j$ heben sich die Summanden paarweise auf (Teleskopsumme), und es bleibt $x^n - a^n$ stehen. Die rechte Seite ist ein Polynom in x, also stetig; ihr Wert in $x = a$ ist $n\,a^{n-1}$. Nach Satz 7.10 (3) ist das ihr Grenzwert für $x \to a$, nach Lemma 7.28 (1) auch der ihrer Einschränkung auf $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, also der des Differenzenquotienten. Das Verfahren ist typisch: Man ersetzt die Funktion außerhalb von a durch eine Funktion, die in a stetig ist, und liest den Grenzwert ab. In Einheit 10 heißt das Ergebnis Ableitung von x^n.

Beispiel 3 (Erweitern). $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$. Auf $D = [-1, \infty) \setminus \{0\}$ ist

$$\frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \frac{(1 + x) - 1}{x\,(\sqrt{1 + x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1}.$$

Die rechte Seite ist auf $[-1, \infty)$ stetig (Beispiel (d) in 7.2, Satz 7.11, Nenner ≥ 1) und hat in 0 den Wert $\frac{1}{2}$; nach Satz 7.10 (3) und Lemma 7.28 (1) ist das der Grenzwert.

Beispiel 4 (Halbierung). Für $f(x) = x^3 - 2x - 5$ aus der Leitfrage ist $f(2) = -1$ und $f(3) = 16$. Das Verfahren des zweiten Beweises von Satz 7.15 liefert:

n	a_n	b_n	Mittelpunkt m	$f(m)$
0	2	3	2,5	5,625
1	2	2,5	2,25	1,890625
2	2	2,25	2,125	0,345703125
3	2	2,125	2,0625	−0,351318359375
4	2,0625	2,125	–	–

Die Werte sind exakt: Alle Mittelpunkte sind endliche Dualbrüche. Nach vier Schritten liegt eine Nullstelle in $[2{,}0625;\ 2{,}125]$, einem Intervall der Länge $\frac{1}{16}$. Damit ist die Nullstelle aus der Leitfrage nicht nur gesichert, sondern eingegrenzt: Wegen $f(2{,}0625) < 0 < f(2{,}125)$ liegt nach Satz 7.15 eine Nullstelle in $(2{,}0625;\ 2{,}125)$. Ob f weitere Nullstellen hat, entscheidet das Verfahren nicht; es findet eine. Zehn Halbierungen ergeben eine Genauigkeit von etwa 10^{-3}, zwanzig von etwa 10^{-6}: Jeder Schritt gewinnt ein Binärdigit.

Beispiel 5 (Grenzwert im Unendlichen). $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3} = 2$. Für $x > 2$ ist $x^2 - 3 > 1 > 0$ und

$$\Big|\frac{2x^2+1}{x^2-3} - 2\Big| = \frac{7}{x^2-3}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $R = \max\{2, \sqrt{3 + 7/\varepsilon}\}$. Für $x > R$ ist $x^2 - 3 > \frac{7}{\varepsilon}$, also der Abstand kleiner als ε.

Beispiel 6 (Umkehrfunktion ausrechnen). Die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ auf $I = [0, \infty)$ ist stetig und wegen $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ streng monoton wachsend. Es ist $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, denn $|f(x) - 1| = \frac{1}{1+x} < \varepsilon$ für $x > \frac{1}{\varepsilon}$; nach Satz 7.26 (3) ist also $f(I) = [0, 1)$. Auflösen von $y = \frac{x}{1+x}$ ergibt $x = \frac{y}{1-y}$; das ist $f^{-1} : [0, 1) \to [0, \infty)$, stetig, wie Satz 7.26 vorhersagt und wie man hier auch direkt sieht. Die Zahl 1 gehört nicht zum Bild, weil der rechte Endpunkt ∞ von I nicht zu I gehört.

7.7 Ausblick

- **Kompaktheit (Einheit 8).** Eine stetige Funktion auf $[a, b]$ ist beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an (Satz 8.16); zusammen mit Satz 7.19 folgt $f([a, b]) = [m, M]$ (Folgerung 8.17 (1)). Dort wird auch geklärt, wann sich das δ unabhängig vom Punkt wählen lässt (gleichmäßige Stetigkeit, Satz 8.21), und Stetigkeit wird durch Urbilder offener Mengen beschrieben (Satz 8.7), wie in Einheit 1 nach Satz 1.11 angekündigt.
- **Elementare Funktionen (Einheit 9).** Die Exponentialfunktion wird über ihre Reihe erklärt, ihre Stetigkeit folgt aus einer Abschätzung der Reihe. Der Logarithmus ist ihre Umkehrfunktion nach Satz 7.26, und die Zahl π wird über den Zwischenwertsatz als Nullstelle des Kosinus gewonnen.
- **Ableitung (Einheit 10).** Die Ableitung ist der Grenzwert eines Differenzenquotienten im Sinn von Definition 7.3, wie in Beispiel 2.
- **Roter Faden Vollständigkeit.** In dieser Einheit benutzen der Zwischenwertsatz (Supremum oder Intervallschachtelung) und was aus ihm folgt (Satz 7.19, Folgerung 7.20, Satz 7.25, Folgerung 7.27), die Kennzeichnung der Intervalle (Lemma 7.18) in der Richtung „konvex ⇒ Intervall“, die einseitigen Grenzwerte monotoner Funktionen (Satz 7.22) und damit Satz 7.23 sowie die Teile (1) und (3) des Umkehrsatzes 7.26 die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Die Definition der Stetigkeit und die Rechenregeln benutzen sie nicht; sie gelten wörtlich in $\mathbb{Q}$. Auch Lemma 7.24 und damit die Stetigkeit der Umkehrfunktion (Satz 7.26 (2), Folgerung 7.30) kommen ohne sie aus; dort wird von Lemma 7.18 nur die leichte Richtung gebraucht.
- **Allgemeinheit.** Definition 7.9 benutzt von $\mathbb{R}$ nur den Abstand $|x - y|$. Für Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist das in der Bemerkung nach Folgerung 7.12 ausgeführt; ebenso lässt sich der Begriff für metrische Räume formulieren, etwa für $\mathbb{R}^n$. Der Zwischenwertsatz dagegen braucht die Anordnung und die Gestalt der Intervalle; seine allgemeine Form ist die Aussage, dass stetige Bilder zusammenhängender Mengen zusammenhängend sind (ohne Beweis, jenseits dieses Kurses).

Zum Vergleich.[1] Der Stoff dieser Einheit gehört zum Kern jeder ersten Analysis-Vorlesung. In O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, Springer Spektrum 2016, stehen Funktionen und Stetigkeit in § 10 (S. 104–113), der Zwischenwertsatz in § 11 (S. 114–124) und der Satz über die Umkehrfunktion in § 12 (S. 125–126). Forster erklärt den Grenzwert einer Funktion über Folgen und gewinnt die ε-δ-Form als Satz 3 in § 11; hier ist es umgekehrt, und das Folgenkriterium ist Satz 7.5. Der Zwischenwertsatz wird dort wie im zweiten Beweis von Satz 7.15 durch Halbierung bewiesen; das Gegenbeispiel $x^2 - 2$ auf $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ aus Leitfrage und (G5) steht dort in der Bemerkung

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

nach dem Zwischenwertsatz (S. 114). Die Thomaesche Funktion (G4) ist dort Aufgabe 10.5, Folgerung 7.30 ist Aufgabe 12.3, und Aufgabe B2 (b) ist Aufgabe 12.9 i). Im *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage, Vieweg+Teubner 2011, ist die Stetigkeit von $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ Aufgabe 10 B, und die Lösung von Aufgabe B2 (a), (b) geht denselben Weg wie die Lösung von Aufgabe 12 K a) (S. 120). Eigene Wege geht die Einheit mit dem Beweis des Zwischenwertsatzes über das Supremum, der Kennzeichnung der Intervalle als konvexe Mengen, der Behandlung der Endpunkte in Satz 7.26, den Sätzen 7.22 bis 7.25 über monotone und injektive Funktionen, den Gegenbeispielen (G7) bis (G10) und den Aufgaben, die nach dem Anteil der Vollständigkeit fragen.

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 7

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie jeden Schritt mit einem Satz der Einheit.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, mit der dritten Wurzel aus Folgerung 7.27 und dem Definitionsbereich $[-1,\infty)\setminus\{0\}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-x}{x^2+5}$; geben Sie zu $\varepsilon>0$ ein passendes R ausdrücklich an.

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2+|x|}{x}$ und $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2+|x|}{x}$. Existiert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+|x|}{x}$?

R2. Zeigen Sie mit ε und δ, ohne Satz 7.11, dass $f(x)=x^3$ im Punkt 2 stetig ist. Geben Sie δ als Formel in ε an.

R3. Zeigen Sie, dass $p(x)=x^3+x-1$ genau eine reelle Nullstelle hat, und bestimmen Sie mit drei Schritten des Halbierungsverfahrens ein Intervall der Länge $\frac{1}{8}$, das sie enthält.

R4. Für $a\in\mathbb{R}$ sei $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_a(x)=\begin{cases} ax+1, & x\le 2,\\ x^2-a, & x>2.\end{cases}$$

Bestimmen Sie $f_a(2-)$ und $f_a(2+)$. Für welche a ist f_a stetig?

R5. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$. Zeigen Sie, dass f stetig und streng monoton wachsend ist, bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$ und geben Sie die Umkehrfunktion als Formel an.

R6. (Häufungspunkte und uneigentliche Grenzwerte)

(a) Sei $D=(0,1)\cup\{2+\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte und alle isolierten Punkte von D. Welche Häufungspunkte gehören nicht zu D?

(b) Sei $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Zeigen Sie mit Definition 7.7, dass $\lim_{x\to 1+} f(x)=\infty$ und $\lim_{x\to 1-} f(x)=-\infty$; geben Sie zu $K\in\mathbb{R}$ jeweils ein δ als Formel an.

(c) Existiert $\lim_{x\to 1} f(x)$ als reelle Zahl, als ∞ oder als $-\infty$?

Stufe B – Beweisen

B1. (Fixpunktfreie Funktionen) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und es gebe kein x mit $f(x) = x$.

(a) Zeigen Sie: Entweder gilt $f(x) > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, oder es gilt $f(x) < x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Folgern Sie, dass auch $f \circ f$ keinen Fixpunkt hat.

(c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass (b) ohne die Stetigkeit von f falsch wird.

B2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additiv*, das heißt $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle x, y.

(a) Zeigen Sie $f(q) = q\, f(1)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: Ist f stetig, so ist $f(x) = cx$ mit $c = f(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass schon die Stetigkeit von f im Punkt 0 genügt.

B3. (Strikte und nicht strikte Ungleichungen)

(a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$ mit $f(a) < g(a)$. Zeigen Sie: Es gibt $\delta > 0$ mit $f(x) < g(y)$ für alle $x, y \in D \cap B_\delta(a)$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass man in (b) nicht $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schließen kann.

B4. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$. (Deutung: Auf einer Wanderung, die am Ausgangsort endet, gibt es zwei Zeitpunkte im Abstand der halben Dauer, an denen man auf derselben Höhe ist.)

B5. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. Gilt das auch, wenn I durch $\mathbb{Z}$ ersetzt wird?

Stufe V – Vertiefen

V1. (Monotone Funktion mit dichten Sprungstellen) Sei $n \mapsto q_n$ eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (Satz 2.45). Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N},\, q_n < x} 2^{-n},$$

das heißt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, 2^{-n}$ mit $c_n(x) = 1$ für $q_n < x$ und $c_n(x) = 0$ sonst. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe konvergiert, und $0 \leq f(x) \leq 1$.

(b) f ist streng monoton wachsend.

(c) f ist in jedem rationalen Punkt unstetig.

(d) f ist in jedem irrationalen Punkt stetig.

Warum widerspricht das nicht Satz 7.23?

V2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additiv (wie in B2) und monoton. Zeigen Sie ohne Stetigkeitsvoraussetzung, dass $f(x) = f(1)\,x$ für alle x gilt.

V3. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall hat die *Zwischenwerteigenschaft*, wenn sie für je zwei Punkte $x < y$ aus I jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an einer Stelle in $[x, y]$ annimmt. Zeigen Sie: Ist f injektiv und hat die Zwischenwerteigenschaft, so ist f streng monoton und stetig. Gehen Sie so vor:

(a) Für $x < y < z$ in I liegt $f(y)$ echt zwischen $f(x)$ und $f(z)$.

(b) f ist streng monoton.

(c) f ist stetig.

Vergleichen Sie mit Satz 7.25 und mit (G7).

V4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. Benutzen Sie dazu keine Ableitungen, sondern zerlegen Sie die Strecke von x nach y in n gleiche Teile.

V5. (Was stetige Bijektionen nicht können)

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Bijektion $[0,1) \to (0,1)$ und keine stetige Bijektion $(0,1) \to [0,1)$.

(b) Zeigen Sie, dass $q(x) = \big(8x(1-x) - 1\big)^2$ das offene Intervall $(0,1)$ auf das abgeschlossene Intervall $[0,1]$ abbildet. Warum widerspricht das nicht (a)?

(c) Geben Sie eine (unstetige) Bijektion $[0,1) \to (0,1)$ an.

Lösungen

Lösung R1. (a) Für $x \neq \pm 2$ ist $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$ und $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, also

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = \frac{x^2+2x+4}{x+2}.$$

Die rechte Seite ist auf $\{x \neq -2\}$ stetig (Folgerung 7.12), ihr Wert in 2 ist $\frac{12}{4} = 3$. Nach Satz 7.10 (3) ist also ihr Grenzwert für $x \to 2$ gleich 3. Die linke Seite ist die Einschränkung der rechten auf $D = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, und 2 ist Häufungspunkt von D; nach Lemma 7.28 (1) ist der gesuchte Grenzwert 3.

(b) Sei $D = [-1,\infty) \setminus \{0\}$ und $u(x) = \sqrt[3]{1+x}$ für $x \geq -1$. Nach Folgerung 7.27 und Satz 7.11 (Verkettung mit $x \mapsto 1+x$, das $[-1,\infty)$ in $[0,\infty)$ abbildet) ist u auf $[-1,\infty)$ stetig, und $u(0) = 1$. Für $x \in D$ ist $u(x)^3 = 1+x$, also $x = u^3 - 1 = (u-1)(u^2+u+1)$ mit $u = u(x)$, und $u(x) \neq 1$, weil sonst $1 + x = 1$ wäre. Wegen $u \geq 0$ ist $u^2 + u + 1 \geq 1 > 0$. Also ist

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{1}{u(x)^2+u(x)+1} \qquad (x \in D).$$

Die rechte Seite ist auf $[-1,\infty)$ stetig (Satz 7.11, Nenner ≥ 1) und hat in 0 den Wert $\frac{1}{3}$. Nach Satz 7.10 (3) und Lemma 7.28 (1), angewandt auf D, ist der Grenzwert $\frac{1}{3}$.

(c) Für $x > 0$ ist

$$\Big|\frac{3x^2-x}{x^2+5} - 3\Big| = \frac{|-x-15|}{x^2+5} = \frac{x+15}{x^2+5}.$$

Für $x \geq 15$ ist $x + 15 \leq 2x$ und $x^2 + 5 > x^2$, also ist der Ausdruck kleiner als $\frac{2}{x}$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $R = \max\{15, \frac{2}{\varepsilon}\}$. Für $x > R$ ist $\frac{2}{x} < \varepsilon$. Der Grenzwert ist 3.

(d) Für $x > 0$ ist $\frac{x^2+|x|}{x} = x + 1$, für $x < 0$ ist es $x - 1$. Die Funktion $x \mapsto x + 1$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig mit Wert 1 in 0, nach Satz 7.10 (3) ist also $\lim_{x\to 0}(x+1) = 1$; nach Lemma 7.28 (1) gilt das auch für die Einschränkung auf $(0,\infty)$, wo $x + 1$ mit dem gegebenen Bruch übereinstimmt. Also ist der rechtsseitige Grenzwert 1 (Definition 7.7), ebenso mit $x - 1$ auf $(-\infty, 0)$ der linksseitige -1. Nach Lemma 7.8 existiert $\lim_{x\to 0}$ nicht.

Lösung R2. Es ist $|x^3 - 8| = |x-2|\,|x^2+2x+4|$. Für $|x-2| < 1$ ist $1 < x < 3$, also $0 < x^2 + 2x + 4 < 9 + 6 + 4 = 19$. Sei

$$\delta = \min\Big\{1, \frac{\varepsilon}{19}\Big\}.$$

Aus $|x-2| < \delta$ folgt $|x^3 - 8| < 19\,\delta \leq \varepsilon$.

Lösung R3. *Existenz.* $p(0) = -1 < 0 < 1 = p(1)$, p ist stetig; nach Satz 7.15 gibt es eine Nullstelle in $(0,1)$.

Eindeutigkeit. p ist streng monoton wachsend: $x \mapsto x$ ist es, und $x \mapsto x^3$ ebenfalls, denn für $x < y$ ist

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) = (y-x)\Big(\big(y+\tfrac{x}{2}\big)^2 + \tfrac{3}{4}x^2\Big),$$

und der zweite Faktor ist positiv: Als Summe zweier Quadrate ist er ≥ 0, und er verschwindet nur, wenn $x = 0$ und $y + \frac{x}{2} = 0$, also $x = y = 0$ ist; das schließt $x < y$ aus. Eine streng monotone Funktion ist injektiv, hat also höchstens eine Nullstelle.

Halbierung. Mit exakten Werten:

Schritt	Intervall	Mittelpunkt m	$p(m)$	neues Intervall
1	$[0,1]$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$[\frac{1}{2},1]$
2	$[\frac{1}{2},1]$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{64}$	$[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$
3	$[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$	$\frac{5}{8}$	$-\frac{67}{512}$	$[\frac{5}{8},\frac{3}{4}]$

Die Nullstelle liegt in $[\frac{5}{8},\frac{3}{4}]$. (Kontrolle: $\frac{125}{512}+\frac{320}{512}-\frac{512}{512}=-\frac{67}{512}$.)

Lösung R4. Links von 2 und im Punkt 2 ist $f_a(x)=ax+1$; also ist $f_a(2-)=2a+1=f_a(2)$ nach Satz 7.10 (3) für die stetige Funktion $ax+1$ und Lemma 7.28 (1). Rechts von 2 ist $f_a(x)=x^2-a$, also ebenso $f_a(2+)=4-a$. In Punkten $x\neq 2$ ist f_a stetig, weil f_a in einer Umgebung von x mit einem Polynom übereinstimmt (Lemma 7.28 (3)). In 2 ist f_a nach Lemma 7.8 und Satz 7.10 genau dann stetig, wenn $2a+1=4-a$, also $a=1$. Für $a=1$ kann man auch Lemma 7.14 auf $[p,2]$ und $[2,r]$ mit $p<2<r$ anwenden: Auf $[2,r]$ stimmt f_1 mit x^2-1 überein, auch im Punkt 2, denn $2\cdot 1+1=3=4-1$. Also ist $f_1|_{[p,r]}$ stetig, und Lemma 7.28 (2) mit $E=[p,r]\supseteq B_{\min\{2-p,r-2\}}(2)$ überträgt die Stetigkeit in 2 auf f_1.

Lösung R5. *Stetig:* Quotient stetiger Funktionen mit Nenner $1+|x|\geq 1$ (Satz 7.11).

Streng wachsend: Für $x\geq 0$ ist $f(x)=1-\frac{1}{1+x}$; für $0\leq x<y$ ist $\frac{1}{1+y}<\frac{1}{1+x}$ (O6, strikt wegen $1+x<1+y$), also $f(x)<f(y)$. Es ist $f(-x)=-f(x)$, also ist f auch auf $(-\infty,0]$ streng wachsend. Für $x<0\leq y$ ist $f(x)<0\leq f(y)$.

Bild: $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$, denn $|f(x)-1|=\frac{1}{1+x}$ für $x\geq 0$; ebenso $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Nach Satz 7.26 (3), mit den Endpunkten $-\infty$ und ∞ von $I=\mathbb{R}$, die nicht zu I gehören, ist $f(\mathbb{R})=(-1,1)$.

Umkehrfunktion: Aus $y=\frac{x}{1+|x|}$ folgt $|y|=\frac{|x|}{1+|x|}$, also $1-|y|=\frac{1}{1+|x|}$ und

$$\frac{y}{1-|y|}=\frac{x}{1+|x|}\cdot(1+|x|)=x.$$

Also ist $f^{-1}\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(y)=\frac{y}{1-|y|}$. Sie ist stetig, wie Satz 7.26 vorhersagt und wie man auch an der Formel sieht.

Lösung R6. (a) *Häufungspunkte sind genau die Punkte von* $[0,1]\cup\{2\}$. Jeder Punkt von $[0,1]$ ist Häufungspunkt von $(0,1)$ (Beispiele nach Definition 7.1), also von D. Die Folge $2+\frac{1}{n}$ liegt in $D\setminus\{2\}$ und konvergiert gegen 2; nach Lemma 7.2 ist 2 Häufungspunkt.

Jeder Punkt $2+\frac{1}{n}$ ist isoliert: Für $m>n$ ist $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\geq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, für $m<n$ ist $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}>\frac{1}{n(n+1)}$, und die Punkte von $(0,1)$ haben von $2+\frac{1}{n}$ einen Abstand größer als 1. Mit $\delta=\frac{1}{n(n+1)}$ ist also $B_\delta(2+\frac{1}{n})\cap D=\{2+\frac{1}{n}\}$.

Kein anderer Punkt x ist Häufungspunkt; man gibt jeweils ein $\delta>0$ an, für das $B_\delta(x)$ außer eventuell x selbst keinen Punkt von D enthält: für $x<0$ sei $\delta=-x$; für $1<x<2$ sei $\delta=\min\{x-1,2-x\}$; für $x>3$ sei $\delta=x-3$; für $2<x<3$ mit $x\neq 2+\frac{1}{n}$ gibt es nach der archimedischen Eigenschaft und der Wohlordnung ein n mit $2+\frac{1}{n+1}<x<2+\frac{1}{n}$, und $\delta=\min\{x-2-\frac{1}{n+1},\,2+\frac{1}{n}-x\}$ leistet das Verlangte, weil zwischen $2+\frac{1}{n+1}$ und $2+\frac{1}{n}$ kein Punkt von D liegt. Die isolierten Punkte sind also genau die Punkte $2+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, und die Häufungspunkte 0, 1, 2 gehören nicht zu D.

(b) *Rechts von* 1. Sei $K\in\mathbb{R}$ und $\delta=\frac{2}{|K|+1}$. Für $1<x<1+\delta$ ist $x+1>2$ und $0<x-1<\delta$, also

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}>\frac{2}{x-1}>\frac{2}{\delta}=|K|+1>K.$$

Links von 1. Sei $\delta=\min\{1,\frac{1}{|K|+1}\}$. Für $1-\delta<x<1$ ist $x>0$, also $x+1>1$, und $0<1-x<\delta$, also

$$f(x)=-\frac{x+1}{1-x}<-\frac{1}{1-x}<-\frac{1}{\delta}\leq-(|K|+1)<K.$$

(c) Nein. Für $x_n=1+\frac{1}{n}$ ist $f(x_n)=2n+1$ unbeschränkt; eine konvergente Folge ist beschränkt (Satz 4.7), also ist $(f(x_n))$ nicht konvergent, und nach dem Folgenkriterium (Satz 7.5) gibt es keinen reellen Grenzwert. Für $\lim_{x\to1}f(x)=\infty$ müsste es zu $K=0$ ein $\delta>0$ mit $f(x)>0$ für $0<|x-1|<\delta$ geben; links von 1 ist aber nach (b) $f(x)<0$ nahe bei 1. Ebenso scheitert $-\infty$ rechts von 1.

Lösung B1. (a) Die Funktion $g(x)=f(x)-x$ ist nach Satz 7.11 stetig auf dem Intervall $\mathbb{R}$, nach Satz 7.19 ist $g(\mathbb{R})$ ein Intervall. Nach Voraussetzung ist $0\notin g(\mathbb{R})$. Gäbe es u,v mit $g(u)<0<g(v)$, so läge 0 zwischen zwei Punkten des Intervalls $g(\mathbb{R})$, nach Lemma 7.18 also in $g(\mathbb{R})$ – Widerspruch. Also ist $g(x)>0$ für alle x oder $g(x)<0$ für alle x.

(b) Im ersten Fall von (a) ist für jedes x

$$f(f(x))>f(x)>x,$$

wobei die erste Ungleichung (a) im Punkt $f(x)$ ist. Also ist $f(f(x))\neq x$. Im zweiten Fall ebenso mit $<$.

(c) Sei $f(x) = 1$ für $x \le 0$ und $f(x) = 0$ für $x > 0$. Für $x \le 0$ ist $f(x) = 1 \neq x$, für $x > 0$ ist $f(x) = 0 \neq x$; f hat keinen Fixpunkt. Aber $f(f(0)) = f(1) = 0$, also ist 0 Fixpunkt von $f \circ f$. Im Beweis von (a) scheitert der Schritt „$g(\mathbb{R})$ ist ein Intervall“: Es ist $g(0) = 1 > 0$ und $g(1) = -1 < 0$, ohne dass g dazwischen verschwindet.

Lösung B2. (a) Aus $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ folgt $f(0) = 0$, aus $0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ folgt $f(-x) = -f(x)$. Durch Induktion über n gilt $f(nx) = nf(x)$ für $n \in \mathbb{N}$: $f((n+1)x) = f(nx) + f(x)$. Mit $f(0) = 0$ und $f(-x) = -f(x)$ gilt das für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$n\,f(q) = f(nq) = f(m) = m\,f(1),$$

also $f(q) = \frac{m}{n} f(1) = q\,f(1)$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ gibt es zu jedem k ein rationales q_k mit $x - \frac{1}{k} < q_k < x$; dann gilt $q_k \to x$. Nach Satz 7.10 und (a) ist

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} q_k\,c = x\,c.$$

(c) Sei f stetig in 0 und $a \in \mathbb{R}$. Für eine Folge $x_n \to a$ gilt $x_n - a \to 0$, also $f(x_n) - f(a) = f(x_n - a) \to f(0) = 0$. Nach Satz 7.10 ist f in a stetig, also überall, und (b) ist anwendbar.

Lösung B3. (a) Sei $\varepsilon = \frac{g(a)-f(a)}{2} > 0$ und $m = \frac{f(a)+g(a)}{2}$, also $f(a)+\varepsilon = m = g(a)-\varepsilon$. Zu ε gibt es $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für $x \in D \cap B_{\delta_1}(a)$ und $\delta_2 > 0$ mit $|g(y) - g(a)| < \varepsilon$ für $y \in D \cap B_{\delta_2}(a)$. Für $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und $x, y \in D \cap B_\delta(a)$ ist

$$f(x) < f(a) + \varepsilon = m = g(a) - \varepsilon < g(y).$$

Mit $x = y$ erhält man insbesondere $f(x) < g(x)$ nahe bei a; das folgt auch aus Lemma 7.13 für $g - f$. Neu ist, dass x und y unabhängig voneinander gewählt werden dürfen.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein rationales q_k mit $x < q_k < x + \frac{1}{k}$; dann gilt $q_k \to x$. Nach Satz 7.10 ist $f(q_k) \to f(x)$, und aus $f(q_k) > 0$ folgt nach Satz 4.10 $f(x) \ge 0$.

(c) Sei $f(x) = (x - \sqrt{2})^2$. Die Funktion ist stetig (Folgerung 7.12). Für rationales x ist $x \neq \sqrt{2}$, weil $\sqrt{2}$ irrational ist (Satz 2.9), also $f(x) > 0$. Aber $f(\sqrt{2}) = 0$. Beim Grenzübergang bleibt $>$ nur als $\ge$ erhalten, wie bei Folgen.

Lösung B4. Sei $g(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x)$ für $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Die Funktion g ist stetig (Satz 7.11; $x \mapsto x + \frac{1}{2}$ bildet $[0, \frac{1}{2}]$ in $[0, 1]$ ab). Es ist

$$g(0) + g(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}) - f(0) + f(1) - f(\tfrac{1}{2}) = f(1) - f(0) = 0.$$

Ist $g(0) = 0$, so ist $x = 0$ eine Lösung. Andernfalls haben $g(0)$ und $g(\frac{1}{2}) = -g(0)$ entgegengesetzte Vorzeichen, und Folgerung 7.16 liefert $x \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $g(x) = 0$.

Bemerkung. Dasselbe Argument mit $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ auf $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ und der Teleskopsumme $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = f(1) - f(0) = 0$ zeigt die Aussage für jeden Abstand $\frac{1}{n}$: Ist kein Summand 0, so haben nicht alle dasselbe Vorzeichen, und Folgerung 7.16 auf dem Intervall zwischen zwei Stellen $\frac{j}{n}$, $\frac{k}{n}$ mit $g(\frac{j}{n}) < 0 < g(\frac{k}{n})$ liefert eine Nullstelle von g.

Lösung B5. Angenommen, $f(x) \neq f(y)$ für Punkte $x < y$ aus I, etwa $f(x) < f(y)$. Nach der Dichtheit der irrationalen Zahlen (G2) gibt es ein irrationales c mit $f(x) < c < f(y)$. Nach Folgerung 7.16, angewandt auf die Einschränkung von f auf $[x, y] \subseteq I$ (Lemma 7.18, Lemma 7.28 (1)), gibt es ξ mit $f(\xi) = c \notin \mathbb{Q}$ – Widerspruch. Der Fall $f(x) > f(y)$ geht ebenso.

Für $\mathbb{Z}$ ist die Aussage falsch: Jede Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig, weil jeder Punkt von $\mathbb{Z}$ isoliert ist (Abschnitt 7.2, nach Definition 7.9). Die Funktion $f(k) = k$ hat Werte in $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ und ist nicht konstant. Der Beweis braucht, dass der Definitionsbereich ein Intervall ist.

Lösung V1. (a) Für jedes n ist $0 \leq c_n(x)2^{-n} \leq 2^{-n}$, und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} - 1 = 2 - 1 = 1$ konvergiert (Satz 6.2, Satz 6.3 (2)). Nach dem Majorantenkriterium (Satz 6.10) konvergiert die Reihe; ihre Partialsummen liegen zwischen 0 und $\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} < 1$, nach Satz 4.10 ist also $0 \leq f(x) \leq 1$.

(b) Seien $x < y$. Aus $q_n < x$ folgt $q_n < y$, also $c_n(y) - c_n(x) \in \{0, 1\}$, und $c_n(y) - c_n(x) = 1$ genau für $x \leq q_n < y$. Da beide Reihen konvergieren, darf man gliedweise subtrahieren (Satz 6.3):

$$f(y) - f(x) = \sum_{n:\ x \leq q_n < y} 2^{-n} \geq 0.$$

Nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ gibt es ein rationales $q_m \in (x, y)$. Der Summand 2^{-m} kommt in der Summe vor, alle Summanden sind nichtnegativ, also $f(y) - f(x) \geq 2^{-m} > 0$.

(c) Sei $a = q_m$. Für $x > a$ gilt nach der Rechnung aus (b) $f(x) - f(a) \geq 2^{-m}$, weil q_m die Bedingung $a \leq q_m < x$ erfüllt. Für die Folge $x_k = a + \frac{1}{k}$ gilt also $|f(x_k) - f(a)| \geq 2^{-m}$, und nach Satz 7.10 ist f in a unstetig.

(d) Sei a irrational und $\varepsilon > 0$. Wähle N mit $2^{-N} < \varepsilon$ (etwa mit Bernoulli: $2^N \geq 1 + N$). Die endlich vielen Punkte $q_1, \dots, q_N$ sind von a verschieden; sei $\delta > 0$ kleiner als ihr Abstand zu a. Sei $|x - a| < \delta$, etwa $x > a$. Nach (b) ist $f(x) - f(a)$ die Summe der 2^{-n} über alle n mit $a \leq q_n < x$. Jedes solche q_n liegt in $[a, a + \delta)$, also ist $n > N$. Damit ist

$$0 \leq f(x) - f(a) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N} < \varepsilon.$$

Für $x < a$ ebenso mit $x \leq q_n < a$. Also ist f in a stetig.

Kein Widerspruch zu Satz 7.23: Die Unstetigkeitsstellen sind genau die rationalen Zahlen, und $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Satz 7.23 sagt „abzählbar“, nicht „vereinzelt“; die Unstetigkeitsstellen einer monotonen Funktion dürfen dicht liegen. Nach (c) ist der Sprung in q_m mindestens 2^{-m}, und die Zahlen 2^{-m} haben zusammen die Summe 1; so passen abzählbar viele Sprünge in das beschränkte Bild $[0, 1]$.

Lösung V2. Ist f monoton fallend, so ist $-f$ additiv und monoton wachsend; es genügt also der wachsende Fall. Nach B2 (a), dessen Beweis keine Stetigkeit benutzt, ist $f(q) = qc$ mit $c = f(1)$ für rationale q. Sei $x \in \mathbb{R}$. Zu jedem k wähle man rationale r_k, s_k mit $x - \frac{1}{k} < r_k < x < s_k < x + \frac{1}{k}$. Wegen der Monotonie ist

$$r_k\, c = f(r_k) \leq f(x) \leq f(s_k) = s_k\, c.$$

Grenzübergang $k \to \infty$ (Satz 4.10) gibt $xc \leq f(x) \leq xc$.

Bemerkung. Ohne Stetigkeit und ohne Monotonie gibt es additive Funktionen, die nicht von der Form cx sind. Ihre Existenz beweist man mit einer Basis von $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$, deren Existenz das Auswahlaxiom liefert; das wird hier nicht ausgeführt. Nach B2 (c) sind solche Funktionen in 0 unstetig. Sie sind sogar in keinem Punkt stetig: Wäre f in a stetig und $x_n \to 0$, so gälte $f(x_n) = f(x_n + a) - f(a) \to f(a) - f(a) = 0 = f(0)$, also wäre f nach Satz 7.10 in 0 stetig. Nach V2 sind sie nicht monoton; man kann zeigen, dass sie sogar auf keinem Intervall positiver Länge monoton oder beschränkt sind (ohne Beweis).

Lösung V3. (a) Seien $x < y < z$ in I. Wegen der Injektivität ist $f(y) \neq f(x)$ und $f(y) \neq f(z)$. Angenommen, $f(y) > f(x)$ und $f(y) > f(z)$. Wähle c mit $\max\{f(x), f(z)\} < c < f(y)$. Nach der Zwischenwerteigenschaft gibt es $\xi_1 \in [x, y]$ und $\xi_2 \in [y, z]$ mit $f(\xi_1) = f(\xi_2) = c$. Da c von $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ verschieden ist, ist $\xi_1 \in (x, y)$ und $\xi_2 \in (y, z)$, also $\xi_1 < \xi_2$ bei gleichem Wert – Widerspruch zur Injektivität. Der Fall $f(y) < f(x)$ und $f(y) < f(z)$ geht ebenso. Also liegt $f(y)$ echt zwischen $f(x)$ und $f(z)$.

(b) Angenommen, f ist nicht streng monoton. Wie im Beweis von Satz 7.25 gibt es $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) > f(x_2)$ und $y_1 < y_2$ mit $f(y_1) < f(y_2)$. Seien $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$

die verschiedenen Elemente von $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$; es ist $2 \le k \le 4$. Für $k \ge 3$ und $1 \le j \le k-2$ liegt nach (a) $f(p_{j+1})$ echt zwischen $f(p_j)$ und $f(p_{j+2})$. Ist also $f(p_j) < f(p_{j+1})$, so ist auch $f(p_{j+1}) < f(p_{j+2})$, und ebenso mit $>$. Durch Induktion über j haben alle Differenzen $f(p_{j+1}) - f(p_j)$ dasselbe Vorzeichen, die Werte $f(p_1), \dots, f(p_k)$ sind also streng wachsend oder streng fallend in j. Dann gilt für je zwei der Punkte dieselbe Richtung, im Widerspruch dazu, dass f von x_1 nach x_2 fällt und von y_1 nach y_2 steigt. (Für $k = 2$ ist $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$, also $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$, und der Widerspruch ist unmittelbar.)

(c) Das Bild $f(I)$ ist konvex: Sind $u = f(x) < c < v = f(y)$, so nimmt f den Wert c nach der Zwischenwerteigenschaft zwischen x und y an. Nach Lemma 7.18 ist $f(I)$ ein Intervall. Nach (b) ist f monoton, nach Lemma 7.24 also stetig.

Vergleich. Satz 7.25 setzt Stetigkeit voraus und folgert Monotonie. Hier genügt die schwächere Zwischenwerteigenschaft, und die Stetigkeit kommt als Ergebnis heraus. (G7) zeigt, dass die Zwischenwerteigenschaft allein nicht genügt: Die Zeltfunktion ist nicht injektiv. Der Beweis in (b) ist zugleich ein zweiter Beweis der Richtung „injektiv ⇒ streng monoton“ in Satz 7.25, denn stetige Funktionen auf Intervallen haben nach Folgerung 7.16 die Zwischenwerteigenschaft.

Lösung V4. Seien $x < y$ und $n \in \mathbb{N}$. Setze $t_k = x + \frac{k}{n}(y-x)$ für $k = 0, \dots, n$. Dann ist $f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)$ (Teleskopsumme), und nach der Dreiecksungleichung (Aufgabe B8 (a) der Einheit 1)

$$|f(y) - f(x)| \le \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{y-x}{n}\Big)^2 = \frac{(y-x)^2}{n}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach der archimedischen Eigenschaft ein n mit $\frac{(y-x)^2}{n} < \varepsilon$. Also ist $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, und nach Aufgabe B6 (d) der Einheit 1 ist $f(x) = f(y)$.

Bemerkung. Die Voraussetzung besagt, dass alle Differenzenquotienten $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ betragsmäßig höchstens $|y-x|$ sind, also für $y \to x$ gegen 0 gehen: f hat überall die Ableitung 0 (Einheit 10). Dass daraus Konstanz folgt, beweist dort der Mittelwertsatz (Folgerung 10.15 (1)). Hier genügt die Zerlegung, weil der Exponent 2 größer als 1 ist; mit $|f(x) - f(y)| \le |x-y|$ erhielte man nur $|f(y) - f(x)| \le |y-x|$, und $f(x) = x$ zeigt, dass dann keine Konstanz folgt.

Lösung V5. (a) Sei $f : [0,1) \to (0,1)$ eine stetige Bijektion. Nach Satz 7.25 ist f streng monoton. Ist f wachsend, so ist $f(0) \le f(x)$ für alle $x \in [0,1)$, also $f(0)$ das kleinste Element von $f([0,1)) = (0,1)$; ist f fallend, so ist $f(0)$ das größte. Aber $(0,1)$ hat weder

ein kleinstes noch ein größtes Element: Zu $y \in (0,1)$ liegen $\frac{y}{2}$ und $\frac{1+y}{2}$ in $(0,1)$, und $\frac{y}{2} < y < \frac{1+y}{2}$. Widerspruch.

Sei $g\colon (0,1) \to [0,1)$ eine stetige Bijektion, nach Satz 7.25 streng monoton. Es gibt $x_0 \in (0,1)$ mit $g(x_0) = 0$. Für $x = \frac{x_0}{2}$ und $y = \frac{1+x_0}{2}$ ist $x < x_0 < y$, also liegt $0 = g(x_0)$ echt zwischen $g(x)$ und $g(y)$. Einer dieser Werte ist negativ, im Widerspruch zu $g(x), g(y) \in [0,1)$.

(b) Sei $h(x) = 4x(1-x)$, also $q = (2h-1)^2$. Für $x \in (0,1)$ ist $h(x) > 0$, und wegen $1 - h(x) = 1 - 4x + 4x^2 = (2x-1)^2 \geq 0$ ist $h(x) \leq 1$. Also ist $2h(x) - 1 \in (-1,1]$ und $q(x) \in [0,1]$. Es ist $q(\frac{1}{2}) = (2-1)^2 = 1$. Ferner ist $h(\frac{1}{10}) = \frac{36}{100} < \frac{1}{2} < 1 = h(\frac{1}{2})$; nach Folgerung 7.16 gibt es $x_1 \in [\frac{1}{10}, \frac{1}{2}]$ mit $h(x_1) = \frac{1}{2}$, also $q(x_1) = 0$. Als Polynom ist q stetig (Folgerung 7.12), nach Satz 7.19 ist $q((0,1))$ ein Intervall, das 0 und 1 enthält und in $[0,1]$ liegt, also gleich $[0,1]$.

Kein Widerspruch zu (a): q ist nicht injektiv, etwa $q(x) = q(1-x)$. In (a) kommt die Injektivität über Satz 7.25 ins Spiel; ohne sie kann das Bild eines offenen Intervalls Endpunkte enthalten, wie schon $x \mapsto x^2$ auf $(-1,1)$ nach Satz 7.19 zeigt.

(c) Sei $\varphi(0) = \frac{1}{2}$, $\varphi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ für $n \geq 2$ und $\varphi(x) = x$ für alle übrigen $x \in [0,1)$. Die Menge $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq 2\}$ wird bijektiv auf $B = \{\frac{1}{n} : n \geq 2\}$ abgebildet: $0 \mapsto \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1}$ treffen jedes Element von B genau einmal. Der Rest $[0,1) \setminus A = (0,1) \setminus B$ wird identisch abgebildet. Also ist φ eine Bijektion $[0,1) \to (0,1)$. Nach (a) kann sie nicht stetig sein; sie ist zum Beispiel in 0 unstetig, denn $\frac{1}{n} \to 0$, aber $\varphi(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} \to 0 \neq \frac{1}{2} = \varphi(0)$.

EINHEIT 8

Kompaktheit auf der Zahlengeraden

Leitfrage

Die Funktion $f(x) = x$ nimmt auf $(0, 1)$ keinen größten Wert an, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, 1]$ nicht einmal beschränkt, und $f(x) = \frac{x}{1+x}$ hat auf $[0, \infty)$ das Supremum 1, erreicht es aber nicht. Alle drei Funktionen sind stetig. Auf einem Intervall $[a, b]$ dagegen nimmt jede stetige Funktion ein Maximum an. **Was unterscheidet $[a, b]$ von $(0, 1)$, $(0, 1]$ und $[0, \infty)$, und warum reicht dieser Unterschied aus?**

Eine zweite Frage hängt damit zusammen. Bei der Stetigkeit darf das δ vom Punkt abhängen; bei $\frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ wird es für Punkte nahe 0 beliebig klein (Einheit 7, Beispiel (c) in Abschnitt 7.2), und Abschnitt 8.4 zeigt, dass es nicht anders geht. Auf $[a, b]$ lässt sich immer ein einziges δ für alle Punkte wählen. Beide Antworten haben denselben Grund: **Kompaktheit**. Sie verwandelt unendlich viele lokale Bedingungen, eine an jedem Punkt, in endlich viele, und über endlich viele Bedingungen kann man das Maximum oder Minimum nehmen. Der Satz von Heine-Borel zeigt, dass die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die beschränkten und abgeschlossenen sind. Die Antwort auf die erste Frage steht nach Satz 8.16, die auf die zweite nach Satz 8.21.

Voraussetzungen. Aus Einheit 1 werden die Verneinungsregel (Regel 1.3), die Quantoren (Abschnitt 1.2), Familien von Mengen mit den Regeln von De Morgan (Abschnitt 1.4), Satz 1.11 über Bild und Urbild und Satz 1.25 benutzt. Aus Einheit 2 die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Satz 2.9), Schranken, Supremum und Beschränktheit von Mengen (Definition 2.10), die archimedische Eigenschaft (Satz 2.29), der ganze Teil (Lemma 2.30), die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31), die Supremumseigenschaft (Satz 2.34), das Infimum (Folgerung 2.35) und die Wurzeln (Satz 2.39). Aus Einheit 3 die Kreisscheiben $B_r(a)$ und $\overline{B}_r(a)$ (Abschnitt 3.3). Aus Einheit 4 die Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 4.3), die Beschränktheit konvergenter Folgen (Satz 4.7), die Rechenregeln (Satz 4.9), die Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.10), die Einschließung (Satz 4.11), Teilfolgen und Häufungswerte (Definition 4.22, Definition 4.23, Satz 4.24 (1), Satz 4.34), Cauchy-Folgen (Satz 4.30 (1))

und das Cauchy-Kriterium (Satz 4.31). Aus Einheit 5 der Satz von Bolzano-Weierstraß (Folgerung 5.15 (1)) und das Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3)). Aus Einheit 7 Häufungspunkte (Definition 7.1, Lemma 7.2), Grenzwerte von Funktionen (Satz 7.5, Satz 7.6, Definition 7.7), die Kennzeichnungen der Stetigkeit (Satz 7.10), Einschränkung und Lokalität (Lemma 7.28), Polynome (Folgerung 7.12), Intervalle (Lemma 7.18), Endpunkte und innere Punkte von Intervallen (Definition 7.29), Bilder von Intervallen (Satz 7.19) und die Sätze 7.25 und 7.26 über Umkehrfunktionen. Folgenglieder werden wie in Einheit 7 nacheinander gewählt (abzählbare Auswahl); wo eine Überdeckung zu jedem Punkt eine Umgebung braucht, wird über alle passenden Umgebungen indiziert, so dass keine weitere Auswahl nötig ist. Die Nummern 8.25 bis 8.28 stehen in den Abschnitten 8.1 und 8.2 dort, wo sie gebraucht werden; die Nummern folgen deshalb dort nicht der Reihe nach.

Schreibweisen. Wie in Einheit 7 ist für $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ die Menge $B_r(a) = (a-r, a+r)$ die offene Kreisscheibe aus Abschnitt 3.3; wir nennen sie die *r-Umgebung* von a und schreiben $B_\varepsilon(a)$ oder $B_\delta(a)$, wenn der Radius ε oder δ heißt. Die abgeschlossene Kreisscheibe ist $\overline{B}_r(a) = [a-r, a+r]$. Der Buchstabe U bleibt für beliebige offene Mengen frei. Für eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Mengen schreiben wir $\bigcup_i U_i$ wie in Abschnitt 1.4. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach Definition 2.10 *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist. Das ist gleichwertig damit, dass es ein $C \geq 0$ mit $|x| \leq C$ für alle $x \in A$ gibt: Ist t eine untere und s eine obere Schranke, so leistet $C = \max\{|s|, |t|\}$ das Verlangte, und umgekehrt sind $-C$ und C Schranken. Eine Funktion heißt beschränkt, wenn ihre Wertemenge beschränkt ist (wie in Beispiel 1 in Abschnitt 1.11).

8.1 Offene und abgeschlossene Mengen

Die Beispiele der Leitfrage scheitern auf zwei Arten. Bei x auf $(0,1)$ und bei $\frac{1}{x}$ auf $(0,1]$ fehlt dem Definitionsbereich ein Punkt, auf den es ankommt: der Punkt 1, dem die Werte von x zustreben, beziehungsweise der Punkt 0, bei dem $\frac{1}{x}$ über alle Schranken wächst. Bei $[0,\infty)$ fehlt kein solcher Punkt, aber man kann beliebig weit nach außen laufen. Für den zweiten Mangel hat der Kurs einen Begriff, die Beschränktheit. Für den ersten braucht er einen: Eine Menge soll jeden Punkt enthalten, dem sie beliebig nahe kommt. Das ist die Abgeschlossenheit. Wir führen sie über ihr Gegenstück ein, die offenen Mengen, weil diese auch Stetigkeit (Satz 8.7) und Kompaktheit (Definition 8.9) tragen.

> **Definition 8.1.** Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq U$ gibt. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Offen heißt: Jeder Punkt hat in der Menge noch Platz nach beiden Seiten. Abgeschlossen ist nicht das Gegenteil von offen. Eine Menge kann beides sein oder keines.

Beispiele. (a) Ein offenes Intervall (a,b) ist offen: Für $x \in (a,b)$ ist $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\} > 0$ geeignet. Ebenso sind (a,∞) und $(-\infty,b)$ offen. Insbesondere ist jede Umgebung $B_r(a)$

offen.

(b) $[a,b]$ ist abgeschlossen, denn $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ ist offen. Einpunktige Mengen $\{a\} = [a,a]$ und die Mengen $\overline{B}_r(a)$ sind abgeschlossen.

(c) $[a,b)$ mit $a < b$ ist weder offen (keine Umgebung von a liegt darin) noch abgeschlossen (keine Umgebung von b liegt im Komplement).

(d) $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind offen und abgeschlossen. Für $\emptyset$ ist die Bedingung leer (Abschnitt 1.2).

(e) $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen, denn das Komplement ist die Vereinigung der offenen Intervalle $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. $\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen: Jede Umgebung eines Punktes enthält rationale und irrationale Zahlen (Satz 2.31 und Einheit 7, (G2)).

(f) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht abgeschlossen: Jede Umgebung von $0 \notin A$ trifft A. Die Menge $A \cup \{0\}$ ist abgeschlossen. Ist $x < 0$ oder $x > 1$, so ist ein Intervall um x frei von $A \cup \{0\}$. Liegt x in $(0,1]$ und nicht in A, so sei $m = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ (Lemma 2.30); wegen $\frac{1}{x} \geq 1$ ist $m \geq 1$, und aus $m \leq \frac{1}{x} < m+1$ folgt $\frac{1}{m+1} < x \leq \frac{1}{m}$. Da $x \notin A$, ist $x \neq \frac{1}{m}$, also $\frac{1}{m+1} < x < \frac{1}{m}$, und dieses offene Intervall enthält keinen Punkt von $A \cup \{0\}$.

Satz 8.2. (1) Die Vereinigung einer beliebigen Familie offener Mengen ist offen. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

(2) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis. (1) Liegt a in $\bigcup_i U_i$, so in einem U_j, und eine Umgebung von a in U_j liegt auch in der Vereinigung. Liegt a in $U_1 \cap \cdots \cap U_r$, so gibt es $\varepsilon_k > 0$ mit $B_{\varepsilon_k}(a) \subseteq U_k$; für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r\} > 0$ liegt $B_\varepsilon(a)$ in allen U_k. (Für $r = 0$ ist der Durchschnitt nach Abschnitt 1.4 gleich $\mathbb{R}$.)

(2) folgt aus (1) mit den Regeln von De Morgan für Familien (Abschnitt 1.4). □

Die Endlichkeit in (1) geht an einer Stelle ein: Das Minimum endlich vieler positiver Zahlen ist positiv. Das Infimum unendlich vieler kann 0 sein, und dann versagt der Satz: $\bigcap_n (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ ist nicht offen, $\bigcup_n [\frac{1}{n}, 1] = (0,1]$ nicht abgeschlossen (vergleiche Aufgabe R5 der Einheit 1). Ein verwandter Schritt, ein Minimum oder Maximum über endlich viele Zahlen, trägt die Beweise dieser Einheit, die aus einer Bedingung an jedem Punkt eine gemeinsame machen: die Richtung (1)⇒(2) in Satz 8.13 (über das größte N), die Bemerkung nach Satz 8.21 und Beispiel 6 in Abschnitt 8.6.

Definition 8.3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Berührpunkt* von A, wenn jede Umgebung $B_\varepsilon(a)$ einen Punkt von A enthält. Die Menge $\overline{A}$ aller Berührpunkte heißt *Abschluss* von A.

Jeder Punkt von A ist Berührpunkt, und jeder Häufungspunkt (Definition 7.1) ist Be-

rührpunkt. Ein Berührpunkt von A, der nicht in A liegt, ist ein Häufungspunkt. Wie in Lemma 7.2 ist a genau dann Berührpunkt von A, wenn es eine Folge in A gibt, die gegen a konvergiert: Man wähle $x_n \in A \cap B_{1/n}(a)$.

Der *Häufungswert* einer Folge (Definition 4.23) ist etwas anderes als der Häufungspunkt einer Menge: Die konstante Folge $a, a, a, \ldots$ hat den Häufungswert a, die Menge $\{a\}$ hat keinen Häufungspunkt. Häufungswerte einer Folge sind nach Satz 4.34 genau die Grenzwerte ihrer Teilfolgen.

Satz 8.4 (Kennzeichnung abgeschlossener Mengen). Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sind gleichwertig:

1. A ist abgeschlossen;
2. jeder Berührpunkt von A liegt in A, also $\overline{A} = A$;
3. ist (x_n) eine Folge in A, die in $\mathbb{R}$ konvergiert, so liegt ihr Grenzwert in A.

Beweis. (1)⇒(2): Sei $a \notin A$. Da $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist, gibt es eine Umgebung von a, die A nicht trifft; a ist also kein Berührpunkt.

(2)⇒(3): Konvergiert (x_n) in A gegen a, so enthält jede Umgebung von a Folgenglieder, also Punkte von A; a ist Berührpunkt und liegt nach (2) in A.

(3)⇒(1): Sei $a \notin A$. Wäre keine Umgebung $B_{1/n}(a)$ frei von Punkten aus A, so gäbe es $x_n \in A$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, also eine Folge in A mit Grenzwert $a \notin A$, im Widerspruch zu (3). Also gibt es n mit $B_{1/n}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$; das Komplement von A ist offen. □

Bedingung (3) ist die Form, in der Abgeschlossenheit meist benutzt wird: Ungleichungen der Form $\leq$ und Gleichungen überleben den Grenzübergang. So ist $\{x : x \geq 0\}$ abgeschlossen, weil aus $x_n \geq 0$ und $x_n \to x$ nach Satz 4.10 folgt $x \geq 0$.

Der Name „Abschluss“ verspricht, dass $\overline{A}$ selbst abgeschlossen ist. Das ist zu zeigen.

Satz 8.25 (Abschluss). Für $A \subseteq \mathbb{R}$ ist $\overline{A}$ abgeschlossen, und $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält: Ist $C \supseteq A$ abgeschlossen, so gilt $\overline{A} \subseteq C$.

Beweis. Es ist $A \subseteq \overline{A}$. Sei $a \notin \overline{A}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \cap A = \varnothing$. Für $x \in B_\varepsilon(a)$ und $\rho = \varepsilon - |x-a| > 0$ gilt $B_\rho(x) \subseteq B_\varepsilon(a)$, denn aus $|y-x| < \rho$ folgt $|y-a| \leq |y-x| + |x-a| < \varepsilon$. Also ist $B_\rho(x) \cap A = \varnothing$ und $x \notin \overline{A}$. Damit liegt $B_\varepsilon(a)$ im Komplement von $\overline{A}$, und das Komplement ist offen. Sei nun $C \supseteq A$ abgeschlossen und a ein Berührpunkt von A. Jede Umgebung von a trifft A und damit C; also ist a Berührpunkt von C und liegt nach Satz 8.4 in C. □

Der Abschluss der Umgebung $B_r(a)$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{B}_r(a) = [a - r, a + r]$; die beiden Bedeutungen des Querstrichs passen also zusammen. Denn $[a-r, a+r]$ ist abgeschlossen und enthält $B_r(a)$, nach Satz 8.25 also auch $\overline{B_r(a)}$; umgekehrt liegen die Punkte $a \pm r(1 - \frac{1}{n})$ in $B_r(a)$ und konvergieren gegen $a \pm r$, so dass auch die beiden

Endpunkte $a - r$ und $a + r$ Berührpunkte sind; die übrigen Punkte von $[a - r, a + r]$ liegen in $B_r(a) \subseteq \overline{B_r(a)}$.

Für Punkte einer Menge unterscheidet man, ob sie ganz von der Menge umgeben sind oder an ihrem Rand liegen. Die späteren Einheiten benutzen beide Begriffe.

Definition 8.26. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in A$ heißt *innerer Punkt* von A, wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq A$ gibt. Ein Punkt $a \in \mathbb{R}$ heißt *Randpunkt* von A, wenn er Berührpunkt von A und von $\mathbb{R} \setminus A$ ist.

Nach Definition 8.1 ist eine Menge genau dann offen, wenn jeder ihrer Punkte innerer Punkt ist. Für Intervalle stimmt der Begriff mit Definition 7.29 überein. Sei I ein nichtleeres Intervall mit den Endpunkten $\alpha = \inf I$ und $\beta = \sup I$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Nach dem Absatz nach Definition 7.29 ist $a \in I$ genau dann innerer Punkt im Sinn von Definition 7.29, also $\alpha < a < \beta$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq I$ gibt; das ist Definition 8.26. Die Randpunkte von I sind die reellen unter den Endpunkten α und β. Denn ist α reell und $\varepsilon > 0$, so ist $\alpha + \varepsilon$ keine untere Schranke von I, es gibt also $x \in I$ mit $\alpha \le x < \alpha + \varepsilon$, und $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(\alpha)$ liegt nicht in I; also ist α Berührpunkt von I und von $\mathbb{R} \setminus I$. Für β geht es ebenso. Umgekehrt liegt ein Punkt a mit $\alpha < a < \beta$ in I: Er ist weder untere noch obere Schranke von I, es gibt also $x, y \in I$ mit $x < a < y$, und nach Lemma 7.18 ist $[x, y] \subseteq I$. Er ist daher innerer Punkt und kein Berührpunkt des Komplements; und für $a < \alpha$ trifft $B_{\alpha - a}(a)$, deren Punkte alle kleiner als α sind, die Menge I nicht, ebenso für $a > \beta$. Ein Randpunkt eines Intervalls gehört also zum Intervall oder nicht, je nachdem, ob der Endpunkt dazugehört.

Lemma 8.5. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer, nach oben beschränkt und abgeschlossen. Dann liegt $\sup A$ in A; A hat also ein größtes Element. Entsprechend hat eine nichtleere, nach unten beschränkte, abgeschlossene Menge ein kleinstes Element.

Beweis. Nach der Supremumseigenschaft (Satz 2.34) existiert $s = \sup A$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $s - \varepsilon$ keine obere Schranke ist, gibt es $a \in A$ mit $s - \varepsilon < a \le s$. Also ist s Berührpunkt von A, nach Satz 8.4 liegt s in A. Die zweite Aussage folgt ebenso mit dem Infimum (Folgerung 2.35). □

Für Funktionen auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ braucht man offene Mengen „innerhalb von D“. Die Funktion $\sqrt{x}$ ist auf $[0, \infty)$ stetig, aber das Urbild $\{x \ge 0 : \sqrt{x} < 1\} = [0, 1)$ ist in $\mathbb{R}$ nicht offen. Es ist offen, soweit man in $D = [0, \infty)$ überhaupt schauen kann.

Definition 8.6. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Menge $M \subseteq D$ heißt *offen in D*, wenn es zu jedem $a \in M$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \cap D \subseteq M$ gibt. Eine Menge $A \subseteq D$ heißt *abgeschlossen in D*, wenn $D \setminus A$ offen in D ist.

Lemma 8.27 (offen und abgeschlossen in D). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

1. Eine Menge $M \subseteq D$ ist genau dann offen in D, wenn es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $M = U \cap D$ gibt. Man kann dabei für U die Vereinigung U_M aller Umgebungen $B_\varepsilon(a)$ mit $a \in M$, $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(a) \cap D \subseteq M$ nehmen.
2. Für $A \subseteq D$ sind gleichwertig: (a) A ist abgeschlossen in D; (b) jeder Berührpunkt von A, der in D liegt, gehört zu A; (c) es gibt eine abgeschlossene Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ mit $A = C \cap D$. Man kann dabei $C = \overline{A}$ nehmen.
3. Ist D offen, so ist eine Teilmenge von D genau dann offen in D, wenn sie offen ist. Ist D abgeschlossen, so ist eine Teilmenge von D genau dann abgeschlossen in D, wenn sie abgeschlossen ist.

Beweis. (1) Ist $M = U \cap D$ mit offenem U und $a \in M$, so gibt es $B_\varepsilon(a) \subseteq U$, also $B_\varepsilon(a) \cap D \subseteq M$. Sei umgekehrt M offen in D. Die Menge U_M ist als Vereinigung offener Mengen nach Satz 8.2 offen. Es ist $U_M \cap D \subseteq M$, weil jede der vereinigten Umgebungen diese Eigenschaft hat, und $M \subseteq U_M$, weil jedes $a \in M$ nach Definition 8.6 in einer von ihnen liegt. Also ist $M = U_M \cap D$.

(2) (a)⇒(b): Sei $a \in D$ Berührpunkt von A, und angenommen $a \notin A$. Da $D \setminus A$ offen in D ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \cap D \subseteq D \setminus A$; wegen $A \subseteq D$ ist dann $B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$, ein Widerspruch. (b)⇒(a): Ist $a \in D \setminus A$, so ist a nach (b) kein Berührpunkt von A; es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$, also $B_\varepsilon(a) \cap D \subseteq D \setminus A$. (b)⇒(c): Es ist $A \subseteq \overline{A} \cap D$, und nach (b) gilt $\overline{A} \cap D \subseteq A$; also $A = \overline{A} \cap D$, und $\overline{A}$ ist nach Satz 8.25 abgeschlossen. (c)⇒(b): Ist $a \in D$ Berührpunkt von $A = C \cap D$, so ist a Berührpunkt von C, also $a \in C$ nach Satz 8.4 und damit $a \in C \cap D = A$.

(3) Ist D offen und M offen in D, so ist $M = U \cap D$ nach (1) und Satz 8.2 offen; eine offene Teilmenge $M \subseteq D$ ist $M \cap D$ mit offenem M. Ist D abgeschlossen und A abgeschlossen in D, so ist $A = C \cap D$ nach (2) und Satz 8.2 abgeschlossen; eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq D$ ist $A \cap D$. □

Die Menge U_M in (1) ist durch M und D festgelegt; wer zu vielen in D offenen Mengen offene Mengen in $\mathbb{R}$ braucht, muss deshalb keine Auswahl treffen. Mit $D = \mathbb{Q}$ ist etwa $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ nach (2) abgeschlossen in $\mathbb{Q}$.

Satz 8.7 (Stetigkeit durch Urbilder). Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in D ist.

Beweis. „⇒“: Sei V offen und $a \in f^{-1}(V)$. Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(f(a)) \subseteq V$, und zu ε ein $\delta > 0$ mit $f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$ für alle $x \in B_\delta(a) \cap D$. Also ist $B_\delta(a) \cap D \subseteq f^{-1}(V)$.

„⇐“: Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Die Menge $V = B_\varepsilon(f(a))$ ist offen, $f^{-1}(V)$ ist offen in D und enthält a. Es gibt also $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \cap D \subseteq f^{-1}(V)$: Aus $x \in D$ und $|x - a| < \delta$ folgt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

In dieser Einheit dient der Satz zweimal: Er erkennt Mengen, die durch Ungleichungen beschrieben sind, als offen oder abgeschlossen, ohne dass man sie ausrechnet (Folgerung 8.8), und er trägt den Beweis von Satz 8.15 ohne Folgen. In dieser Form kommt die Stetigkeit ohne ε und δ aus. Sie benutzt nur, welche Mengen offen sind, und wird zur Definition der Stetigkeit in der Topologie. Dass gerade Urbilder und nicht Bilder auftreten, hat seinen Grund in Satz 1.11: Urbilder vertragen sich mit allen Mengenoperationen, Bilder nicht. Stetige Bilder offener Mengen brauchen nicht offen zu sein (G8).

Folgerung 8.8. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$, so sind $\{x : f(x) > c\}$ und $\{x : f(x) < c\}$ offen, $\{x : f(x) \geq c\}$, $\{x : f(x) \leq c\}$ und $\{x : f(x) = c\}$ abgeschlossen.

Beweis. Die ersten beiden sind Urbilder der offenen Mengen (c, ∞) und $(-\infty, c)$, nach Satz 8.7 und Lemma 8.27 (3) mit $D = \mathbb{R}$ also offen. Die übrigen sind Komplemente davon beziehungsweise der Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen (Satz 1.11 (4), Satz 8.2). □

Beispiel. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \geq 0\} = [-1, 0] \cup [1, \infty)$ ist abgeschlossen, ohne dass man die Menge ausrechnen muss.

Zwischenbilanz. Satz 8.4 fasst den ersten Mangel aus der Leitfrage: $(0, 1]$ ist nicht abgeschlossen, weil die Folge $\frac{1}{n}$ ihren Grenzwert außerhalb hat. Lemma 8.5 zeigt, was Abgeschlossenheit zusammen mit Beschränktheit für das Maximum leistet, allerdings für eine Menge von Zahlen, noch nicht für die Werte einer Funktion. Um von der Beschränktheit und Abgeschlossenheit des Definitionsbereichs auf die der Wertemenge zu schließen, braucht man eine Eigenschaft, die sich unter stetigen Abbildungen überträgt; Abgeschlossenheit allein tut das nicht (G8). Das leistet die Kompaktheit.

8.2 Kompaktheit und der Satz von Heine-Borel

Was haben $[a, b]$ und eine endliche Menge gemeinsam? An einer endlichen Menge kann man aus Bedingungen, die man an jedem Punkt einzeln hat, eine gemeinsame machen, indem man das Minimum bildet. Die folgende Definition fasst genau diese Möglichkeit.

Definition 8.9. Sei $K \subseteq \mathbb{R}$. Eine *offene Überdeckung* von K ist eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen mit $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Eine *endliche Teilüberdeckung* ist eine Auswahl endlich vieler $U_{i_1}, \dots, U_{i_r}$, die K ebenfalls überdecken. Die Menge K heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Die Definition verlangt etwas von *jeder* offenen Überdeckung. Um zu zeigen, dass K nicht kompakt ist, genügt eine einzige Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung.

Warum *offene* Mengen? Ließe man beliebige Mengen zu, so wäre keine unendliche Menge kompakt: Die einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in K$, überdecken K, und endlich viele davon erfassen nur endlich viele Punkte. Da einpunktige Mengen abgeschlossen sind,

hilft auch die Beschränkung auf abgeschlossene Mengen nicht. Offene Mengen passen dagegen zu den lokalen Bedingungen der Leitfrage: Was an einem Punkt samt einer Umgebung gilt, gilt auf einer offenen Menge. Eine offene Überdeckung ist die Form, in der solche lokale Information vorliegt, und Kompaktheit sagt, dass endlich viele Stücke davon schon genügen.

Beispiele. (a) Jede endliche Menge $\{x_1, \dots, x_r\}$ ist kompakt: Zu jedem x_k wähle man eine Menge der Überdeckung, die x_k enthält.

(b) $(0,1)$ ist nicht kompakt. Die Mengen $U_n = (\frac{1}{n}, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, überdecken $(0,1)$ nach der archimedischen Eigenschaft, aber endlich viele davon ergeben zusammen U_N mit dem größten auftretenden N, und der Punkt $\frac{1}{2N} \in (0,1)$ liegt nicht in U_N.

(c) $\mathbb{N}$ ist nicht kompakt: Die Mengen $U_n = (-n, n)$ überdecken $\mathbb{N}$, endlich viele davon ergeben $(-N, N)$, und $N \notin (-N, N)$.

(d) $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist kompakt. Sei (U_i) eine offene Überdeckung. Der Punkt 0 liegt in einem U_{i_0}, und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U_{i_0}$. Für $n > \frac{1}{\varepsilon}$ liegt $\frac{1}{n}$ in U_{i_0}. Sei $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor \geq 0$ (Lemma 2.30). Die endlich vielen übrigen Punkte $\frac{1}{n}$ mit $1 \leq n \leq N$ liegen in je einer Menge $U_{i_1}, \dots, U_{i_N}$. Diese $N+1$ Mengen überdecken K. Man sieht hier den Mechanismus: Eine Menge der Überdeckung fängt alle Punkte nahe dem Häufungspunkt ein, für den Rest genügen endlich viele.

Neben der Überdeckungseigenschaft gibt es eine zweite Form, die in Beweisen oft bequemer ist.

> **Definition 8.10.** Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in K eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt von K konvergiert.

Das Rückgrat des Satzes von Heine-Borel ist die Kompaktheit von $[a,b]$. Wir beweisen sie mit der Supremumseigenschaft; Aufgabe V2 gibt einen Beweis mit Intervallschachtelung.

> **Lemma 8.11.** Jedes Intervall $[a,b]$ mit $a \leq b$ ist kompakt.

Beweisidee. Man geht von a aus nach rechts, solange endlich viele Mengen der Überdeckung genügen. Das Supremum der so erreichbaren Punkte liegt in einer offenen Menge der Überdeckung, und diese Menge trägt noch ein Stück darüber hinaus. Also kommt man bis b.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $[a,b]$ und

$$S = \{x \in [a,b] : [a,x] \text{ wird von endlich vielen } U_i \text{ überdeckt}\}.$$

Es ist $a \in S$, denn $[a,a] = \{a\}$ liegt in einer der Mengen. S ist durch b nach oben beschränkt, also existiert $s = \sup S$ (Satz 2.34), und $a \leq s \leq b$. Da $s \in [a,b]$, liegt s in

einem U_j, und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(s) \subseteq U_j$. Da $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von S ist, gibt es $x \in S$ mit $s - \varepsilon < x \leq s$; das Intervall $[a, x]$ wird von endlich vielen Mengen $U_{i_1}, \dots, U_{i_r}$ überdeckt. Sei $t = \min\{s + \frac{\varepsilon}{2}, b\}$. Dann ist $x \leq t$ und

$$[a, t] = [a, x] \cup [x, t] \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \cup U_j,$$

denn $[x, t] \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U_j$. Also liegt t in S, und $t \leq s$. Wäre $t = s + \frac{\varepsilon}{2}$, so folgte $s + \frac{\varepsilon}{2} \leq s$, unmöglich. Also ist $t = b$, und $b \in S$: Endlich viele U_i überdecken $[a, b]$. □

Lemma 8.12. Eine abgeschlossene Teilmenge A einer kompakten Menge K ist kompakt.

Beweis. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A. Zusammen mit der offenen Menge $V = \mathbb{R} \setminus A$ überdecken die U_i die Menge K. Endlich viele davon überdecken K; lässt man V weg, falls es darunter ist, so überdecken die übrigen U_i immer noch A, denn V enthält keinen Punkt von A. □

Bemerkung (Kompaktheit ist eine Eigenschaft der Menge selbst). Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung von K durch Mengen, die offen in K sind, eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Überdecken nämlich in K offene Mengen V_i die Menge K, so überdecken die offenen Mengen U_{V_i} aus Lemma 8.27 (1) die Menge K, und aus einer endlichen Teilüberdeckung $U_{V_{i_1}}, \dots, U_{V_{i_r}}$ erhält man $V_{i_k} = U_{V_{i_k}} \cap K$, $k = 1, \dots, r$. Umgekehrt liefert eine offene Überdeckung (U_i) von K die in K offenen Mengen $U_i \cap K$. Man darf also von der Kompaktheit einer Menge sprechen, ohne einen umgebenden Raum anzugeben; so liest Aufgabe V5 die Menge $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$.

Satz 8.13 (Heine-Borel). Für eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ sind gleichwertig:

1. K ist kompakt;
2. K ist beschränkt und abgeschlossen;
3. K ist folgenkompakt.

Beweisplan. Zwei Richtungen sind fast Rechnungen: (1)⇒(2) mit zwei wachsenden Überdeckungen, die nach außen beziehungsweise auf einen fehlenden Punkt zu immer mehr erfassen, und (3)⇒(2) mit Folgen, die nach außen laufen oder einem fehlenden Punkt zustreben. Die Substanz steckt in den Richtungen, die von (2) ausgehen: (2)⇒(3) über Bolzano-Weierstraß, (2)⇒(1) über Lemma 8.11.

Beweis. (1)⇒(2): Für $K = \emptyset$ ist nichts zu zeigen; sei $K \neq \emptyset$. *Beschränkt.* Die offenen Mengen $(-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, überdecken $\mathbb{R}$ (Satz 2.29), also auch K. Endlich viele genügen, mindestens eine; da sie ineinander liegen, genügt die größte, $(-N, N)$, und $K \subseteq (-N, N)$.

Abgeschlossen. Sei $a \notin K$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $V_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| > \frac{1}{n}\} = (-\infty, a - \frac{1}{n}) \cup (a + \frac{1}{n}, \infty)$ offen. Jedes $x \in K$ ist von a verschieden, also $|x - a| > 0$, und nach

der archimedischen Eigenschaft gibt es n mit $\frac{1}{n} < |x-a|$; die V_n überdecken K. Endlich viele genügen, mindestens eine, und wegen $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$ genügt die größte, V_N. Dann ist $K \subseteq V_N$, also $B_{1/N}(a) \cap K = \varnothing$. Das Komplement von K ist offen.

(2)⇒(3): Sei (x_n) eine Folge in K. Sie ist beschränkt und hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Folgerung 5.15 (1)) eine konvergente Teilfolge. Ihr Grenzwert liegt nach Satz 8.4 in K.

(3)⇒(2): Wäre K unbeschränkt, so gäbe es zu jedem n ein $x_n \in K$ mit $|x_n| > n$. Jede Teilfolge (x_{n_k}) ist dann unbeschränkt, denn $|x_{n_k}| > n_k \geq k$, und konvergiert nicht (konvergente Folgen sind beschränkt, Satz 4.7). Wäre K nicht abgeschlossen, so gäbe es nach Satz 8.4 eine Folge in K, die gegen ein $a \notin K$ konvergiert. Jede ihrer Teilfolgen konvergiert gegen denselben Grenzwert a (Satz 4.24 (1)), wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts (Satz 4.3) also gegen keinen Punkt von K. Beides widerspricht (3).

(2)⇒(1): Ist K beschränkt, so liegt K in einem Intervall $[-R, R]$ mit $R \geq 0$. Dieses ist nach Lemma 8.11 kompakt, und K ist als abgeschlossene Teilmenge nach Lemma 8.12 kompakt. □

Der Satz trägt die Namen von Eduard Heine und Émile Borel.

Folgerung 8.28 (kompakte Intervalle). Ein nichtleeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn $I = [a, b]$ mit reellen $a \leq b$ gilt.

Beweis. Jedes $[a, b]$ mit $a \leq b$ ist nach Lemma 8.11 kompakt. Sei umgekehrt I kompakt und nichtleer. Nach Satz 8.13 ist I beschränkt und abgeschlossen, also existieren $a = \inf I$ und $b = \sup I$ (Satz 2.34, Folgerung 2.35), und nach Lemma 8.5 liegen sie in I; es ist $a \leq b$. Nach Lemma 7.18 enthält das Intervall I mit a und b jeden Punkt dazwischen, also $[a, b] \subseteq I$, und $I \subseteq [a, b]$, weil a und b Schranken von I sind. □

Mit Definition 7.29 gesagt: Ein nichtleeres Intervall ist genau dann kompakt, wenn seine beiden Endpunkte reell sind und zum Intervall gehören. Deshalb heißen die Intervalle $[a, b]$ *kompakte Intervalle*.

Die Ringschlüsse in Satz 8.13 benutzen die Vollständigkeit zweimal: in Lemma 8.11 über das Supremum und in (2)⇒(3) über Bolzano-Weierstraß. Ohne sie ist der Satz falsch: $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ (Lemma 8.27 (2)), aber eine rationale Folge, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, hat keine Teilfolge mit rationalem Grenzwert (G4).

Bemerkung (Allgemeinheit). Die Definitionen 8.1, 8.9 und 8.10 benutzen von $\mathbb{R}$ nur den Abstand und lassen sich wörtlich in metrischen Räumen formulieren. Dort sind, wie hier ohne Beweis vermerkt, Kompaktheit und Folgenkompaktheit weiterhin gleichwertig, und kompakte Mengen sind beschränkt und abgeschlossen. Die Umkehrung „beschränkt und abgeschlossen ⇒ kompakt“ gilt, ebenfalls ohne Beweis, in $\mathbb{R}^n$, aber nicht in jedem metrischen Raum (Aufgabe V5 und Abschnitt 8.7). Deshalb ist Definition 8.9 die tragende Definition und nicht Bedingung (2).

Folgerung 8.14 (Cantorscher Durchschnittssatz). Seien $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ nichtleere kompakte Mengen. Dann ist $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

Beweis. Nach Satz 8.13 und Lemma 8.5 hat K_n ein kleinstes Element x_n. Alle x_n liegen in K_1; nach Satz 8.13 gibt es eine Teilfolge $x_{n_k} \to x$. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Für $k \geq m$ ist $n_k \geq k \geq m$, also $x_{n_k} \in K_{n_k} \subseteq K_m$. Die Folge $(x_{n_k})_{k \geq m}$ liegt in der abgeschlossenen Menge K_m und konvergiert gegen x; nach Satz 8.4 ist $x \in K_m$. Da m beliebig war, ist $x \in \bigcap_m K_m$. □

Das Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3)) liefert für $K_n = [a_n, b_n]$ mit $b_n - a_n \to 0$ einen gemeinsamen Punkt. Die Folgerung verlangt keine gegen null gehenden Längen und keine Intervalle; dafür liefert sie nur einen Punkt, nicht seine Eindeutigkeit.

8.3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Der Satz vom Maximum zerfällt in zwei Schritte. Zuerst überträgt sich die Kompaktheit vom Definitionsbereich auf die Wertemenge; das ist der eigentliche Satz. Dann hat eine nichtleere kompakte Menge reeller Zahlen ein größtes und ein kleinstes Element, nach Satz 8.13 und Lemma 8.5. Abgeschlossenheit allein würde sich nicht übertragen (G8); deshalb der Umweg über die Kompaktheit.

Satz 8.15. Ist $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Wir zeigen, dass $f(K)$ folgenkompakt ist. Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$, $y_n = f(x_n)$ mit $x_n \in K$. Nach Satz 8.13 hat (x_n) eine Teilfolge $x_{n_k} \to x \in K$. Nach dem Folgenkriterium (Satz 7.10) gilt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. Nach Satz 8.13 ist $f(K)$ kompakt. □

Bemerkung (zweiter Beweis mit Überdeckungen). Sei (V_i) eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach Satz 8.7 ist jedes $f^{-1}(V_i)$ offen in K, nach Lemma 8.27 (1) also $f^{-1}(V_i) = W_i \cap K$ mit der offenen Menge $W_i = U_{f^{-1}(V_i)}$, und die W_i überdecken K. Endlich viele, $W_{i_1}, \ldots, W_{i_r}$, genügen; dann überdecken $V_{i_1}, \ldots, V_{i_r}$ die Menge $f(K)$. Dieser Beweis benutzt keine Folgen und überträgt sich deshalb sinngemäß auf topologische Räume, in denen Folgen nicht ausreichen.

Satz 8.16 (Satz vom Maximum und Minimum). Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt, und es gibt Punkte $p, q \in K$ mit

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Beweis. Nach Satz 8.15 und Satz 8.13 ist $f(K)$ nichtleer, beschränkt und abgeschlossen. Nach Lemma 8.5 enthält $f(K)$ sein Supremum und sein Infimum, also $\sup f(K) = f(q)$ und $\inf f(K) = f(p)$ für geeignete $p, q \in K$. □

Damit ist die Leitfrage für die erste Hälfte beantwortet. In den drei Beispielen des Anfangs fehlt jeweils eine Voraussetzung: $(0,1)$ und $(0,1]$ sind nicht abgeschlossen, $[0,\infty)$ ist nicht beschränkt. Der Satz verlangt die Kompaktheit des *Definitionsbereichs*; dass die Funktion beschränkt ist, genügt nicht, wie $\frac{x}{1+x}$ auf $[0,\infty)$ zeigt.

Folgerung 8.17. (1) Ist $a \le b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f([a,b]) = [m,M]$ mit $m = \min f$ und $M = \max f$.

(2) Ist K kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) > 0$ für alle $x \in K$, so gibt es $c > 0$ mit $f(x) \ge c$ für alle $x \in K$.

Beweis. (1) Nach Lemma 8.11 und Satz 8.16 gibt es p, q mit $f(p) = m$, $f(q) = M$, und $f([a,b]) \subseteq [m,M]$. Nach Satz 7.19 ist $f([a,b])$ ein Intervall, das m und M enthält, nach Lemma 7.18 also $[m,M]$.

(2) Für $K = \varnothing$ ist nichts zu zeigen; sonst ist $c = \min f = f(p) > 0$. □

Teil (2) ist in $(0,1]$ mit $f(x) = x$ falsch. Er wird zum Beispiel gebraucht, um zu zeigen, dass $\frac{1}{f}$ auf K beschränkt ist.

Satz 8.18 (Stetigkeit der Umkehrfunktion auf kompakten Mengen). Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(K) \to K$ stetig.

Beweis. Sei $g = f^{-1}$, (y_n) eine Folge in $f(K)$ mit $y_n \to y \in f(K)$, $x_n = g(y_n)$ und $x = g(y)$. Angenommen, (x_n) konvergiert nicht gegen x. Dann gibt es nach Regel 1.3 ein $\varepsilon > 0$, so dass $|x_n - x| \ge \varepsilon$ für unendlich viele n gilt; zählt man diese n in wachsender Reihenfolge auf wie im Beweis von Satz 4.34, so erhält man eine Teilfolge mit $|x_{n_k} - x| \ge \varepsilon$ für alle k. Nach Satz 8.13 hat diese Teilfolge ihrerseits eine Teilfolge (x_{m_j}), die gegen ein $x' \in K$ konvergiert, und $|x' - x| \ge \varepsilon$ nach Satz 4.9 und Satz 4.10. Nach der Stetigkeit von f gilt $y_{m_j} = f(x_{m_j}) \to f(x')$. Andererseits ist (y_{m_j}) eine Teilfolge von (y_n) und konvergiert gegen $y = f(x)$ (Satz 4.24 (1)). Also $f(x') = f(x)$ (Satz 4.3) und wegen der Injektivität $x' = x$, im Widerspruch zu $|x' - x| \ge \varepsilon$. Nach Satz 7.10 ist g stetig in y. □

Auf einem Intervall ist eine stetige injektive Funktion nach Satz 7.25 streng monoton, und Satz 7.26 liefert dann die Stetigkeit der Umkehrfunktion; dieser Weg braucht ein Intervall als Definitionsbereich. Satz 8.18 verlangt einen kompakten Definitionsbereich und kommt ohne Monotonie und ohne Intervall aus. Das Beispiel (G8) der Einheit 7 mit $E = [0,1) \cup [2,3]$ erfüllt keine der beiden Bedingungen. Ersetzt man dort $[0,1)$ durch $[0,1]$, so ist E kompakt, aber f nicht mehr injektiv. Einen Fall, den nur Satz 8.18 erfasst, enthält (G9) der Einheit 7: Auf $E = [0,1] \cup [2,3]$ ist $f(x) = x$ für $x \le 1$ und $f(x) = 5 - x$ für $x \ge 2$ stetig, injektiv und nicht monoton, und E ist kein Intervall. Satz 7.26 ist nicht anwendbar, aber E ist kompakt, und nach Satz 8.18 ist f^{-1} stetig. Hier sieht man es auch direkt: $f(E) = [0,1] \cup [2,3]$, und $f^{-1}(y) = y$ für $y \le 1$, $f^{-1}(y) = 5 - y$ für $y \ge 2$.

8.4 Gleichmäßige Stetigkeit

Wir kommen zur zweiten Hälfte der Leitfrage.

Definition 8.19. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D : \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sie heißt *Lipschitz-stetig* mit Konstante $L \geq 0$, wenn $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ für alle $x, y \in D$ gilt.

Der Unterschied zur Stetigkeit liegt allein in der Stellung der Quantoren. Stetigkeit auf D lautet ausgeschrieben

$$\forall y \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : \ |x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

hier darf δ von y abhängen. Bei gleichmäßiger Stetigkeit steht $\forall y$ hinter $\exists \delta$; ein δ muss für alle Punkte zugleich taugen. Das ist die Situation aus (G4) der Einheit 1.

Lemma 8.20. Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig, gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig.

Beweis. Für $L > 0$ leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ das Verlangte, für $L = 0$ jedes δ. Die zweite Aussage ist die Spezialisierung auf festes y. □

Lipschitz-Stetigkeit ist die handlichste hinreichende Bedingung: Sie liefert δ als Formel in ε, nämlich $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, und damit Zahlen wie in Beispiel 3 von Abschnitt 8.6 oder in der Fehlerschranke für Riemann-Summen in Einheit 12. Dass sie nicht notwendig ist, zeigt Beispiel (d).

Beispiele. (a) $f(x) = x^2$ ist auf $[-R, R]$ Lipschitz-stetig mit $L = 2R$, denn $|x^2 - y^2| = |x + y|\,|x - y| \leq 2R\,|x - y|$.

(b) $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig. Für $x_n = n$ und $y_n = n + \frac{1}{n}$ ist $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$, aber

$$y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Zu $\varepsilon = 2$ gibt es also kein passendes δ: Ist $\delta > 0$, so gibt es nach Satz 2.29 ein n mit $\frac{1}{n} < \delta$, und für dieses n ist $|x_n - y_n| < \delta$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| > 2$. Je weiter außen man ist, desto kürzer muss ein Intervall sein, damit x^2 darauf um weniger als 2 schwankt.

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, 1]$ nicht gleichmäßig stetig. Für $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$ ist $|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Das δ aus Beispiel (c) in Abschnitt 7.2 muss also tatsächlich nahe 0 beliebig klein werden. Auf $[c, \infty)$ mit $c > 0$ ist $\frac{1}{x}$ Lipschitz-stetig mit $L = \frac{1}{c^2}$, denn $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|x-y|}{c^2}$.

(d) $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. Für $0 \le y \le x$ gilt $\sqrt{x} \le \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$, denn das Quadrat der rechten Seite ist $x + 2\sqrt{y(x-y)} \ge x$. Also ist $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}$, und $\delta = \varepsilon^2$ genügt. Eine Lipschitz-Konstante gibt es nicht, denn $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist für $x \to 0+$ unbeschränkt.

Die Beispiele zeigen, wo gleichmäßige Stetigkeit verloren geht: am offenen Rand, an dem die Funktion zu steil wird (c), und im Unendlichen (b). Auf einer kompakten Menge gibt es weder das eine noch das andere.

Satz 8.21 (Heine). Ist $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweisidee. Wäre f nicht gleichmäßig stetig, gäbe es Punktpaare, die einander immer näher kommen, deren Funktionswerte aber einen festen Abstand behalten. Kompaktheit liefert einen Punkt, an dem sich diese Paare häufen, und dort widerspricht das der Stetigkeit.

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. Nach Regel 1.3 gibt es $\varepsilon > 0$, so dass es zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ Punkte $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon$ gibt. Nach Satz 8.13 hat (x_n) eine Teilfolge $x_{n_k} \to x \in K$. Wegen $|y_{n_k} - x| \le |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x|$ und $\frac{1}{n_k} \le \frac{1}{k}$ gilt auch $y_{n_k} \to x$ (Satz 4.11). Da f in x stetig ist, folgt nach Satz 7.10 $f(x_{n_k}) \to f(x)$ und $f(y_{n_k}) \to f(x)$, also $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$. Das widerspricht $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \ge \varepsilon$. □

Damit ist auch die zweite Hälfte der Leitfrage beantwortet. Dass bei $\frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ kein gemeinsames δ existiert, liegt am Definitionsbereich: Die Punktpaare $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$ aus Beispiel (c) häufen sich bei 0, und 0 gehört nicht zu $(0, 1]$. In einer kompakten Menge gäbe es dort einen Punkt, an dem die Stetigkeit greift, und genau das nutzt der Beweis.

Bemerkung (das Minimum aus der Leitfrage). Der Beweis von Satz 8.21 benutzt Teilfolgen. Mit Überdeckungen wird die Ankündigung der Leitfrage wörtlich wahr. Sei $K \neq \varnothing$ und $\varepsilon > 0$. Sei P die Menge aller Paare (a, ρ) mit $a \in K$, $\rho > 0$ und $|f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $z \in K \cap B_{2\rho}(a)$. Wegen der Stetigkeit gehört zu jedem $a \in K$ mindestens ein solches Paar; die Umgebungen $B_\rho(a)$, $(a, \rho) \in P$, überdecken also K. (Indem man über alle Paare indiziert, braucht man nicht zu jedem Punkt einen Radius auszuwählen.) Endlich viele genügen, etwa zu $(a_1, \rho_1), \dots, (a_r, \rho_r)$, und $\delta = \min\{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ ist positiv. Sind $x, y \in K$ mit $|x - y| < \delta$, so liegt x in einem $B_{\rho_k}(a_k)$, und $|y - a_k| \le |y - x| + |x - a_k| < \delta + \rho_k \le 2\rho_k$. Beide Punkte liegen also in $B_{2\rho_k}(a_k)$, und $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a_k)| + |f(a_k) - f(y)| < \varepsilon$. Den doppelten Radius braucht man, weil zwei nahe Punkte sonst in verschiedenen Umgebungen liegen könnten. Aufgabe V4 führt denselben Gedanken über die Lebesgue-Zahl aus; Beispiel 6 in Abschnitt 8.6 zeigt das Muster für die Beschränktheit.

Die wichtigste Anwendung im Kurs ist die Integrierbarkeit stetiger Funktionen (Ein-

heit 12). Ihr Kern ist folgende Aussage, hier für gleichabständige Teilpunkte: Eine stetige Funktion auf $[a,b]$ schwankt auf hinreichend feinen Teilintervallen beliebig wenig, und zwar überall gleich fein.

Folgerung 8.22. Seien $a \le b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für die Punkte $t_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k = 0, \dots, n$, ist auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$

$$\max_{[t_{k-1},t_k]} f - \min_{[t_{k-1},t_k]} f < \varepsilon.$$

Beweis. Nach Lemma 8.11 und Satz 8.21 gibt es $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ für $|x-y| < \delta$. Wähle n mit $\frac{b-a}{n} < \delta$ (Satz 2.29). Auf $[t_{k-1}, t_k]$ nimmt f Maximum und Minimum an (Satz 8.16, angewandt auf die nach Lemma 7.28 (1) stetige Einschränkung auf das kompakte Intervall $[t_{k-1}, t_k]$), etwa in q_k und p_k, und $|q_k - p_k| \le \frac{b-a}{n} < \delta$. □

Für gleichmäßig stetige Funktionen gibt es eine einfache Probe, die mit der Vollständigkeit zusammenhängt.

Satz 8.23. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und (x_n) eine Cauchy-Folge in D, so ist $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ sei δ wie in Definition 8.19 und N so, dass $|x_n - x_m| < \delta$ für $n, m \ge N$. Dann ist $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ für $n, m \ge N$. □

Für bloß stetige Funktionen ist das falsch: $\frac{1}{x}$ auf $(0,1]$ bildet die Cauchy-Folge $\frac{1}{n}$ auf die Folge n ab. Mit Satz 8.23 lassen sich die gleichmäßig stetigen Funktionen auf beschränkten offenen Intervallen vollständig beschreiben.

Satz 8.24 (stetige Fortsetzung). Seien $a < b$ reell und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f genau dann gleichmäßig stetig, wenn die Grenzwerte $\lim_{x\to a+} f(x)$ und $\lim_{x\to b-} f(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren. In diesem Fall ist die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F = f$ auf (a,b) und diesen Grenzwerten als $F(a), F(b)$ stetig.

Beweis. „⇐“ samt dem Zusatz: In einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ ist $[a,b] \cap B_r(x_0) \subseteq (a,b)$ für $r = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$, und F stimmt auf (a,b) mit f überein; nach Lemma 7.28 (2) ist F in x_0 stetig. Im Punkt a sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition 7.7 gibt es $\delta' > 0$ mit $|f(x)-F(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in (a,b)$ mit $x - a < \delta'$. Für $\delta = \min\{\delta', b-a\}$ und $x \in [a,b]$ mit $|x-a| < \delta$ ist $x = a$ oder $x \in (a,b)$, in beiden Fällen $|F(x)-F(a)| < \varepsilon$. Also ist F in a stetig, ebenso in b. Nach Lemma 8.11 und Satz 8.21 ist F auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig, und damit auch $f = F|_{(a,b)}$, denn die Bedingung aus Definition 8.19 wird für weniger Punktpaare verlangt.

„⇒“: Wir zeigen die Existenz von $\lim_{x\to a+} f(x)$; für b geht es ebenso. Sei (x_n) eine Folge

in (a,b) mit $x_n \to a$; eine solche gibt es, etwa $x_n = a + \frac{b-a}{n+1}$. Sie ist konvergent, also eine Cauchy-Folge (Satz 4.30 (1)), nach Satz 8.23 ist $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge, und nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 4.31) konvergiert sie gegen eine Zahl c. Ist (x'_n) eine zweite Folge in (a,b) mit $x'_n \to a$, so konvergiert auch die gemischte Folge $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots$ gegen a: Liegen x_n und x'_n für $n \geq N$ in $B_\varepsilon(a)$, so gilt das für die gemischte Folge ab dem Glied mit Index $2N$. Ihre Bildfolge konvergiert nach demselben Schluss, und ihre Teilfolgen $(f(x_n))$ und $(f(x'_n))$ haben nach Satz 4.24 (1) denselben Grenzwert; also $f(x'_n) \to c$. Nach dem Folgenkriterium (Satz 7.5, angewandt auf $(a,b) = (a,b) \cap (a,\infty)$, von dem a ein Häufungspunkt ist) und Definition 7.7 ist $\lim_{x \to a+} f(x) = c$. □

Hier wird die Vollständigkeit noch einmal benutzt, diesmal als Cauchy-Kriterium. Zusammen mit Satz 8.21 sagt Satz 8.24: Die gleichmäßig stetigen Funktionen auf einem beschränkten offenen Intervall (a,b) sind genau die Einschränkungen stetiger Funktionen auf $[a,b]$. Gleichmäßige Stetigkeit verbietet also genau das, was in der Leitfrage bei $\frac{1}{x}$ geschah: ein Verhalten am fehlenden Randpunkt, das sich nicht durch einen Funktionswert ausgleichen lässt.

8.5 Gegenbeispiele: Was geschieht, wenn eine Voraussetzung fehlt

(G1) Beschränkt, aber nicht abgeschlossen. Auf $(0,1)$ nimmt $f(x) = x$ weder Maximum noch Minimum an, auf $(0,1]$ ist $f(x) = \frac{1}{x}$ unbeschränkt. In beiden Fällen ist der Definitionsbereich nicht kompakt; im Beweis von Satz 8.15 scheitert der Schritt „der Grenzwert der Teilfolge liegt in K“: Die Folge $\frac{1}{n}$ hat ihren Grenzwert 0 außerhalb.

(G2) Abgeschlossen, aber nicht beschränkt. Auf $[0,\infty)$ ist $f(x) = x$ unbeschränkt, und $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ist beschränkt mit Supremum 1, das nicht angenommen wird. Die Folge $x_n = n$ hat keine konvergente Teilfolge.

(G3) Ohne Stetigkeit. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für $x < 1$, $f(1) = 0$, ist beschränkt, aber hat kein Maximum: $\sup f = 1$, und $f(x) < 1$ überall. $g(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$, $g(0) = 0$, ist auf $[0,1]$ unbeschränkt. Der Definitionsbereich ist kompakt, aber das Bild ist nicht abgeschlossen beziehungsweise nicht beschränkt.

(G4) In $\mathbb{Q}$. Sei $D = [0,2] \cap \mathbb{Q}$ und $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$. Der Nenner verschwindet auf D nicht, weil $\sqrt{2}$ irrational ist (Satz 2.9); f ist stetig (Folgerung 7.12 und Lemma 7.28 (1)). D ist beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ (Lemma 8.27 (2)). Trotzdem ist f unbeschränkt: Für rationale $q_n \to \sqrt{2}$ in D gilt $q_n^2 - 2 \to 0$. Damit ist f auch nicht gleichmäßig stetig (Satz 8.23: (q_n) ist eine Cauchy-Folge, $(f(q_n))$ als unbeschränkte Folge keine). Satz 8.16 und Satz 8.21 hängen also an der Vollständigkeit.

(G5) Stetig, nicht gleichmäßig stetig. x^2 auf $\mathbb{R}$ und $\frac{1}{x}$ auf $(0,1]$ (Abschnitt 8.4). Umgekehrt ist Kompaktheit nicht notwendig: $\sqrt{x}$ auf $[0,\infty)$ und x auf $\mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.

(G6) Unendliche Durchschnitte und Vereinigungen. Die Beispiele nach dem Beweis von

Satz 8.2 zeigen, dass die Endlichkeit in Satz 8.2 nicht entbehrlich ist; Aufgabe R1 (e) gibt eine Vereinigung abgeschlossener Intervalle, der genau ein Berührpunkt fehlt.

(G7) Geschachtelte Mengen mit leerem Durchschnitt. Die Mengen $[n, \infty)$ sind abgeschlossen, nichtleer, geschachtelt und haben leeren Durchschnitt, ebenso die beschränkten Mengen $(0, \frac{1}{n})$ (Einheit 5, (G4) und (G3)). In Folgerung 8.14 werden also Beschränktheit und Abgeschlossenheit beide gebraucht.

(G8) Bilder offener und abgeschlossener Mengen. $x \mapsto x^2$ bildet die offene Menge $(-1, 1)$ auf $[0, 1)$ ab, die nicht offen ist. $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ bildet die abgeschlossene Menge $\mathbb{R}$ auf $(-1, 1)$ ab, die nicht abgeschlossen ist (Aufgabe R5 der Einheit 7). Stetigkeit lässt sich durch Urbilder offener Mengen kennzeichnen (Satz 8.7), nicht durch Bilder. Für Kompaktheit ist es umgekehrt: Bilder kompakter Mengen sind kompakt (Satz 8.15), Urbilder kompakter Mengen nicht unbedingt, wie die konstante Funktion $f = 0$ auf $\mathbb{R}$ mit $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ zeigt.

8.6 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (Maximum ohne Ableitung). Sei $f(x) = x(1-x)$ auf $[0, 1]$. Nach Satz 8.16 gibt es ein Maximum. Nach Satz 1.25 mit $a = x$, $b = 1 - x$ ist $x(1-x) \le \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, mit Gleichheit genau für $x = 1 - x$, also $x = \frac{1}{2}$. Das Maximum ist $\frac{1}{4}$, angenommen nur in $\frac{1}{2}$; das Minimum ist 0, angenommen in 0 und 1. Nach Folgerung 8.17 ist $f([0, 1]) = [0, \frac{1}{4}]$.

Beispiel 2 (was ein zusätzlicher Punkt ändert). Wie in Beispiel (b) in 8.2 überdecken die Intervalle $U_n = (\frac{1}{n}, 2)$ die Menge $(0, 1]$ ohne endliche Teilüberdeckung. Für $[0, 1]$ ist (U_n) keine Überdeckung, denn 0 fehlt. Nimmt man eine Menge $U_0 = (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit irgendeinem $\varepsilon > 0$ hinzu, so genügen U_0 und U_N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$: Der eine zusätzliche Punkt 0 zwingt eine Menge, die alle Punkte nahe 0 einfängt.

Beispiel 3 (δ ausdrücklich). Für $f(x) = x^2$ auf $[0, 3]$ ist nach Beispiel (a) in 8.4 die Konstante $L = 6$ eine Lipschitz-Konstante, also leistet $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ das Verlangte, unabhängig vom Punkt. Für Folgerung 8.22 mit $\varepsilon = \frac{1}{10}$ braucht man $\frac{3}{n} < \frac{1}{60}$, also $n > 180$; mit $n = 181$ schwankt f auf jedem der 181 gleich langen Teilintervalle um weniger als $\frac{1}{10}$. Tatsächlich ist die Schwankung auf $[t_{k-1}, t_k]$ gleich $t_k^2 - t_{k-1}^2 = (t_k + t_{k-1})\frac{3}{n}$, am größten im letzten Teilintervall mit $(6 - \frac{3}{n})\frac{3}{n}$. Dieser Wert ist für $n = 180$ kleiner als $\frac{1}{10}$, für $n = 179$ nicht. Die Lipschitz-Abschätzung verschenkt hier also nur einen einzigen Teilpunkt.

Beispiel 4 (eine abgeschlossene Menge über Urbilder). Die Menge $A = \{x \in [0, 2] : x^3 - 3x + 1 \le 0\}$ ist kompakt, denn sie ist der Durchschnitt der abgeschlossenen Menge $\{x^3 - 3x + 1 \le 0\}$ (Folgerung 8.8) mit $[0, 2]$ und beschränkt. Sie ist nicht leer, denn $1 \in A$ $(1 - 3 + 1 = -1)$. Nach Lemma 8.5 hat A ein kleinstes und ein größtes Element; das sind die kleinste und die größte Nullstelle von $x^3 - 3x + 1$ in $[0, 2]$, wie folgt. Sei

$p(x) = x^3 - 3x + 1$ und $m = \min A$. Es ist $p(m) \leq 0$, und wegen $p(0) = 1 > 0$ ist $m > 0$. Auf $[0, m)$ gilt $p > 0$, weil diese Punkte nicht in A liegen; nach Satz 7.10 (3), Lemma 7.28 (1) und Satz 7.6 (3) ist $p(m) = \lim_{x \to m-} p(x) \geq 0$. Also ist $p(m) = 0$, und links von m hat p in $[0, 2]$ keine Nullstelle. Für $\max A$ geht es ebenso, mit $p(2) = 3 > 0$. Kompaktheit liefert so die *extremen* Nullstellen, die der Zwischenwertsatz allein nicht auswählt.

Beispiel 5 (Fortsetzung oder nicht). Auf $(0, 1)$ ist $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ gleichmäßig stetig: Nach Beispiel 3 in Abschnitt 7.6 ist $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$, und die rechte Seite ist auf $[0, 1]$ stetig. Nach Satz 8.24 (oder direkt nach Satz 8.21) folgt die gleichmäßige Stetigkeit. Dagegen ist $g(x) = \frac{1}{x}$ auf $(0, 1)$ nach Satz 8.24 nicht gleichmäßig stetig, denn $\lim_{x \to 0+} g(x) = \infty$, und ein reeller Grenzwert existiert nicht; das bestätigt Beispiel (c) in Abschnitt 8.4 ohne neue Rechnung.

Beispiel 6 (vom Lokalen zum Globalen). Die Leitfrage versprach, dass Kompaktheit lokale Bedingungen in globale verwandelt. Hier ist das Muster in seiner einfachsten Form. Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heiße *lokal beschränkt*, wenn es zu jedem Punkt $a \in K$ Zahlen $\varepsilon > 0$ und C mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in K \cap B_\varepsilon(a)$ gibt. Jede stetige Funktion ist lokal beschränkt: Zu $\varepsilon = 1$ gibt es δ mit $|f(x)| \leq |f(a)| + 1$ für $x \in K \cap B_\delta(a)$.

Behauptung. Ist K kompakt, so ist jede lokal beschränkte Funktion auf K beschränkt.

Beweis. Sei P die Menge aller Tripel (a, ε, C) mit $a \in K$, $\varepsilon > 0$, $C \in \mathbb{R}$ und $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in K \cap B_\varepsilon(a)$. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $a \in K$ ein solches Tripel; die Umgebungen $B_\varepsilon(a)$, $(a, \varepsilon, C) \in P$, bilden also eine offene Überdeckung von K. (Indem man über alle Tripel indiziert, braucht man nicht zu jedem Punkt eine Umgebung auszuwählen.) Endlich viele genügen, etwa zu $(a_1, \varepsilon_1, C_1), \dots, (a_r, \varepsilon_r, C_r)$. Jedes $x \in K$ liegt in einer davon, also ist $|f(x)| \leq \max\{C_1, \dots, C_r\}$ (für $K = \varnothing$ ist nichts zu zeigen). □

Das ist ein Beweis der Beschränktheit in Satz 8.16 ohne Folgen. Er zeigt auch, warum die Endlichkeit zählt: Das Maximum endlich vieler Schranken ist eine Schranke, das Supremum unendlich vieler vielleicht nicht. Für $\frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ werden die lokalen Schranken für Punkte nahe 0 beliebig groß, und keine endliche Auswahl der Umgebungen überdeckt $(0, 1]$.

8.7 Ausblick

- **Integral (Einheit 12).** Der Satz von Heine (Satz 8.21) ist der Kern des Beweises, dass jede stetige Funktion auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist: Ist δ zu ε wie in Satz 8.21 gewählt, so schwankt f auf jedem Teilintervall einer Zerlegung mit Feinheit kleiner als δ um höchstens ε, und Ober- und Untersumme unterscheiden sich um höchstens $\varepsilon(b - a)$. Folgerung 8.22 zeigt dasselbe für gleich lange Teilintervalle.
- **Ableitung (Einheit 10).** Der Satz von Rolle und die Mittelwertsätze beruhen auf dem Satz vom Maximum: Eine auf $[a, b]$ mit $a < b$ stetige, im Innern differenzierbare

Funktion mit $f(a) = f(b)$ nimmt an einem inneren Punkt ein Maximum oder Minimum an, und dort verschwindet die Ableitung.

- **Gleichmäßige Konvergenz (Einheit 14).** Der Wechsel der Quantoren zwischen Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit wiederholt sich zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenfolgen. Der Approximationssatz von Weierstraß benutzt die gleichmäßige Stetigkeit auf $[a, b]$.
- **Allgemeinheit.** Definition 8.9 und der zweite Beweis von Satz 8.15 übertragen sich sinngemäß auf topologische Räume; der Beweis von Satz 8.18 überträgt sich auf metrische Räume, sobald man dort weiß, dass kompakte Mengen folgenkompakt sind. Ohne Beweis sei vermerkt: In $\mathbb{C}$, mit den Kreisscheiben $B_r(a)$ aus Abschnitt 3.3, und in $\mathbb{R}^n$ gilt der Satz von Heine-Borel wörtlich. In unendlichdimensionalen normierten Räumen ist die abgeschlossene Einheitskugel beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt; dort trennen sich die Bedingungen (1) und (2) von Satz 8.13.
- **Roter Faden Vollständigkeit.** Die Vollständigkeit geht in dieser Einheit an vier Stellen ein: als Supremumseigenschaft in Lemma 8.5 und in Lemma 8.11, als Satz von Bolzano-Weierstraß in der Implikation (2)⇒(3) von Satz 8.13 und als Cauchy-Kriterium in Satz 8.24. Folgerung 8.17 (1) benutzt sie außerdem über den Zwischenwertsatz aus Einheit 7 (Satz 7.19), Folgerung 8.28 über Infimum und Supremum. Die Beispiele mit $\sqrt{x}$ und $\sqrt{2}$ (Absatz vor Definition 8.6, Absatz nach Folgerung 8.28, Beispiel (d) in 8.4, (G4), Beispiel 5) benutzen sie über die Existenz der Wurzeln (Satz 2.39). Alle anderen Aussagen der Einheit benutzen sie nur über diese Stellen; die Sätze 8.2, 8.4, 8.7, 8.25 und Lemma 8.12 kommen ohne sie aus.

Zum Vergleich.[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage 2016, behandelt in § 11 den Satz vom Maximum und Minimum und die gleichmäßige Stetigkeit für kompakte Intervalle $[a, b]$; offene, abgeschlossene und kompakte Mengen und den Satz von Heine-Borel enthält dieser Band nicht. Der Beweis von Satz 8.21 mit Punktpaaren und Bolzano-Weierstraß folgt dem Beweis von Satz 4 in § 11, Folgerung 8.22 mit gleichabständigen Teilpunkten dem Beweis von Satz 5 in § 11. Die Aussage von Satz 8.24 ist dort Aufgabe 11.5 (im *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage 2011, Aufgabe 11 D, für $(0, 1]$); der Beweis hier geht über Satz 8.23 und das Cauchy-Kriterium. Lipschitz-Stetigkeit sowie die Beispiele (b) und (d) in Abschnitt 8.4 sind bei Forster die Aufgaben 11.2 und 11.3 (im Übungsbuch Aufgabe 11 B); die Rechnungen hier sind eigene. Weitere Aufgaben zu Punktmengen, Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit enthält das Übungsbuch in § 9 bis § 11.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 8

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, beides oder keines sind, und welche kompakt sind.

(a) $[0,1) \cup (2,3]$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 < 2\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : \ x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0\}$

(d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

(e) $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ und $E \cup \{0\}$

(f) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : \ n, m \in \mathbb{N}\}$ (nur: abgeschlossen oder nicht? Hinweis: Satz 8.4 und zweimal Bolzano-Weierstraß; diese Teilaufgabe ist schwerer als die übrigen.)

R2. Sei $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Bestimmen Sie Supremum und Infimum von f auf $[0,2]$, auf $[0,\infty)$ und auf $(0,\infty)$, und geben Sie jeweils an, ob sie angenommen werden. Benutzen Sie keine Ableitung. Steht das Ergebnis auf $[0,\infty)$ im Widerspruch zu (G2)?

R3. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lipschitz-stetig sind, und geben Sie eine Lipschitz-Konstante und zu $\varepsilon > 0$ ein δ für die gleichmäßige Stetigkeit an.

(a) $f(x) = x^3$ auf $[-2,2]$

(b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$

(c) $h(x) = \frac{1}{x}$ auf $[\frac{1}{2}, \infty)$

R4. (Überdeckungen) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass die U_n das Intervall $(0,1)$ überdecken.

(b) Zeigen Sie, dass der Punkt $\frac{1}{n+1}$ in U_n und in keinem anderen U_m liegt. Folgern Sie: Keine echte Teilfamilie der (U_n) überdeckt $(0,1)$, insbesondere keine endliche.

(c) Ergänzen Sie die Familie durch $W = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ und $W' = (\frac{9}{10}, 2)$ zu einer offenen Überdeckung von $[0,1]$ und geben Sie eine endliche Teilüberdeckung ausdrücklich an.

(d) Geben Sie eine Familie offener Mengen an, die $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ überdeckt, aber keine endliche Teilüberdeckung besitzt. (Hinweis: Beweis von Satz 8.13, Teil „abgeschlossen“, mit einem irrationalen Punkt.)

R5. Bestimmen Sie für $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$ und $\varepsilon = \frac{1}{10}$ das kleinste n, für das die Aussage von Folgerung 8.22 gilt. Begründen Sie mit der Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ aus Abschnitt 8.4.

R6. (Stetige Bilder und Umkehrfunktionen) Sei $K = [0,1] \cup [2,3]$ und $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für $x \in [0,1]$ und $f(x) = 5 - x$ für $x \in [2,3]$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig und injektiv, aber nicht monoton ist, und bestimmen Sie $f(K)$.

(b) Geben Sie $f^{-1} : f(K) \to K$ als Formel an und bestätigen Sie die Stetigkeit von f^{-1} direkt. Welcher Satz sagt sie voraus, und warum ist Satz 7.26 nicht anwendbar?

(c) Gibt es eine stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g([0,1]) = (0,1)$? Gibt es eine mit $g([0,1]) = K$?

Stufe B – Beweisen

B1. Zeigen Sie: Die Vereinigung zweier kompakter Mengen ist kompakt, und der Durchschnitt einer nichtleeren Familie kompakter Mengen ist kompakt. Ist die Vereinigung unendlich vieler kompakter Mengen kompakt?

B2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, und es gebe ein x_0 mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass f ein Maximum annimmt. Muss f auch ein Minimum annehmen?

B3. (Abstand zweier Mengen) Für nichtleere $A, C \subseteq \mathbb{R}$ sei $d(A,C) = \inf\{|a-c| : a \in A,\ c \in C\}$.

(a) Sei A kompakt und C abgeschlossen. Zeigen Sie: Es gibt $a^* \in A$ und $c^* \in C$ mit $|a^* - c^*| = d(A,C)$.

(b) Folgern Sie: Sind A kompakt und C abgeschlossen und disjunkt, so ist $d(A,C) > 0$. Folgern Sie außerdem: Zu jeder nichtleeren abgeschlossenen Menge C und jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $c^* \in C$ mit kleinstem Abstand von x.

(c) Zeigen Sie an $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ und $C = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$, dass die erste Aussage von (b) falsch wird, wenn A nur abgeschlossen ist.

B4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode $p > 0$, das heißt $f(x+p) = f(x)$ für alle x. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist, Maximum und Minimum annimmt und gleichmäßig stetig ist.

B5. Für $A, C \subseteq \mathbb{R}$ sei $A + C = \{a + c : a \in A,\ c \in C\}$.

(a) Zeigen Sie: Sind A und C kompakt, so ist $A + C$ kompakt.

(b) Zeigen Sie an $A = \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq 2\}$ und $C = \{-n + \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$, dass $A + C$ für abgeschlossene A, C nicht abgeschlossen zu sein braucht.

B6. (Bilder geschachtelter kompakter Mengen) Seien $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ nichtleere kompakte Mengen und $f : K_1 \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Zeigen Sie $f\big(\bigcap_n K_n\big) = \bigcap_n f(K_n)$.

(b) Sei $K_n = (0, \frac{1}{n}]$ und $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ konstant gleich 0. Bestimmen Sie beide Seiten der Gleichung in (a). Welche Voraussetzung von Folgerung 8.14 fehlt?

Stufe V – Vertiefen

V1. Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden reellen Wert genau zweimal annimmt.

V2. Beweisen Sie Lemma 8.11 ein zweites Mal, mit der Intervallschachtelung statt des Supremums: Nehmen Sie an, eine offene Überdeckung von $[a, b]$ habe keine endliche Teilüberdeckung, und halbieren Sie.

V3. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

(a) Zeigen Sie, dass $f + g$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass fg nicht gleichmäßig stetig zu sein braucht.

(c) Zeigen Sie: Sind f und g zusätzlich beschränkt, so ist fg gleichmäßig stetig.

(d) Zeigen Sie: Ist $f(D) \subseteq E$ und $h : E \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist $h \circ f$ gleichmäßig stetig.

V4. (Lebesgue-Zahl) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $\lambda > 0$, so dass zu jedem $x \in K$ ein $i \in I$ mit $B_\lambda(x) \subseteq U_i$ existiert.

(b) Beweisen Sie damit Satz 8.21 ein zweites Mal, ohne Teilfolgen von Punktpaaren.

V5. (Heine-Borel in $\mathbb{Q}$) Sei $D = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = \{x \in D : \ |x^2 - 2| > \tfrac{1}{n}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass jedes U_n offen in D ist (Definition 8.6) und dass die U_n die Menge D überdecken.

(b) Zeigen Sie, dass keine endliche Auswahl der U_n die Menge D überdeckt.

(c) Führen Sie den Beweis von Lemma 8.11 in $\mathbb{Q}$ mit dieser Überdeckung durch, das heißt mit $S = \{x \in D : \ [1, x] \cap \mathbb{Q}$ wird von endlich vielen U_n überdeckt$\}$. An welcher Stelle bricht er ab?

V6. (Fortsetzung von $\mathbb{Q}$ aus) Sei $D = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

(a) Zeigen Sie: Zu jedem $x \in [0,1]$ gibt es eine Folge in D, die gegen x konvergiert. Für jede solche Folge (q_n) konvergiert $(f(q_n))$, und der Grenzwert hängt nicht von der Wahl der Folge ab; er heiße $F(x)$.

(b) Zeigen Sie: $F = f$ auf D, und $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

(c) Zeigen Sie: F ist die einzige stetige Funktion auf $[0,1]$, die auf D mit f übereinstimmt.

(d) Die Teile (a)–(c) gelten mit demselben Beweis für $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Folgern Sie daraus und aus Satz 8.16 noch einmal, dass die Funktion aus (G4) nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösungen

Lösung R1. (a) Weder offen noch abgeschlossen: Jede Umgebung von 0 enthält negative Zahlen, die nicht in der Menge liegen; jede Umgebung des Nicht-Elements 1 enthält Punkte von $[0,1)$. Nicht kompakt (nicht abgeschlossen).

(b) Die Menge ist $\{x : g(x) < 2\}$ mit der stetigen Funktion $g(x) = x^2$, nach Folgerung 8.8 offen. Sie ist $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, also nicht abgeschlossen: $\sqrt{2}$ ist Berührpunkt, aber kein Element. Nicht kompakt.

(c) Es ist $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4)$. Wegen $x^2 - 4 < x^2 - 1$ ist das Produkt genau dann ≤ 0, wenn $x^2 - 4 \le 0 \le x^2 - 1$, also $1 \le |x| \le 2$. Die Menge ist $[-2,-1] \cup [1,2]$. Nach Folgerung 8.8 (mit dem Polynom $x^4 - 5x^2 + 4$, Folgerung 7.12) ist sie abgeschlossen, ohne dass man sie ausrechnen muss; sie liegt in $[-2,2]$, ist also beschränkt und nach Satz 8.13 kompakt. Sie ist nicht offen: Jede Umgebung von 1 enthält Punkte aus $(0,1)$, die nicht dazugehören.

(d) Weder noch: Jede Umgebung eines Punktes enthält irrationale Zahlen (Beispiel (e) in 8.1), also ist die Menge nicht offen. Die Zahl $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt in $(0,1)$ und ist irrational, sonst wäre $\sqrt{2} = \frac{1}{c}$ rational (Satz 2.9). Zu $\varepsilon > 0$ enthält das nichtleere Intervall $(\max\{c-\varepsilon, 0\}, \min\{c+\varepsilon, 1\})$ nach Satz 2.31 eine rationale Zahl. Also ist c Berührpunkt, aber kein Element, und die Menge ist nach Satz 8.4 nicht abgeschlossen. Nach Satz 8.13 ist sie nicht kompakt.

(e) Jedes $x \in E$ ist positiv, und $1 \in E$ ($n = 1$). *Nicht offen:* Jede Umgebung von 1 enthält Zahlen > 1, die nicht in E liegen. *Nicht abgeschlossen:* $\frac{1}{2n} \in E$ und $\frac{1}{2n} \to 0$, also ist 0 Berührpunkt von E, aber $0 \notin E$. Also ist E nicht kompakt.

$E \cup \{0\}$ *ist abgeschlossen.* Wir zeigen, dass das Komplement die offene Menge

$$V = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \Big)$$

ist (offen nach Satz 8.2). Die Intervalle $(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ treffen E nicht: Die Punkte von $[\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m-1}]$ sind für $m \le n$ mindestens $\frac{1}{2n}$ und für $m > n$ höchstens $\frac{1}{2n+1}$. Also ist V disjunkt zu $E \cup \{0\}$. Sei umgekehrt $x \in (0,1]$ und $x \notin E$. Nach Lemma 2.30 gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le \frac{1}{x} < k+1$, also $\frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k}$. Ist $k = 2n-1$ ungerade, so liegt x in $[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}] \subseteq E$, was ausgeschlossen ist. Also ist $k = 2n$ gerade, und wegen $\frac{1}{2n} \in E$ ist $x \ne \frac{1}{2n}$, also $x \in (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}) \subseteq V$. Punkte $x < 0$ und $x > 1$ liegen ohnehin in V. Damit ist $\mathbb{R} \setminus (E \cup \{0\}) = V$ offen. Als beschränkte abgeschlossene Menge ist $E \cup \{0\}$ nach Satz 8.13 kompakt, aber nicht offen, denn jede Umgebung von 0 enthält negative Zahlen.

Satz 8.2 sagt über unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen nichts; hier fehlt der Vereinigung genau ein Berührpunkt.

(f) Die Menge $F = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ ist abgeschlossen. Sei x Berührpunkt von F und (x_j) eine Folge in F mit $x_j \to x$. Ist $x_j = 0$ für unendlich viele j, so ist $x = 0 \in F$ (Satz 4.24 (1) und Satz 4.3). Andernfalls ist ab einer Stelle $x_j = \frac{1}{n_j} + \frac{1}{m_j}$. Die Folgen $(\frac{1}{n_j})$ und $(\frac{1}{m_j})$ sind beschränkt; nach Bolzano-Weierstraß (Folgerung 5.15 (1)), zweimal angewandt, gibt es eine Teilfolge, längs der $\frac{1}{n_j} \to u$ und $\frac{1}{m_j} \to v$. Da $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen ist (Beispiel (f) in 8.1), liegen u und v in dieser Menge, und $x = u + v$ (Satz 4.24 (1), Satz 4.9). Drei Fälle: $u = v = 0$ ergibt $x = 0 \in F$; ist genau einer der Werte null, etwa $u = \frac{1}{n}$, so ist $x = \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \in F$; sind beide von null verschieden, so ist $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \in F$. Nach Satz 8.4 ist F abgeschlossen. Wegen $0 \le x \le 2$ ist F beschränkt, also kompakt. Nicht offen ist F, weil jede Umgebung von 0 negative Zahlen enthält.

Lösung R2. Für alle x gilt $2|x| \le 1 + x^2$, denn $1 + x^2 - 2|x| = (1 - |x|)^2 \ge 0$, mit Gleichheit genau für $|x| = 1$. Für $x \ge 0$ folgt $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$, mit $f(x) = \frac{1}{2}$ genau für $x = 1$ und $f(x) = 0$ genau für $x = 0$.

- Auf $[0, 2]$: Maximum $\frac{1}{2}$ in 1, Minimum 0 in 0 (wie von Satz 8.16 garantiert).
- Auf $[0, \infty)$: ebenfalls Maximum $\frac{1}{2}$ in 1 und Minimum 0 in 0.
- Auf $(0, \infty)$: Maximum $\frac{1}{2}$ in 1; das Infimum ist 0, denn $f(x) \le \frac{1}{x}$ und $f(x) > 0$; es wird nicht angenommen.

Kein Widerspruch zu (G2): Satz 8.16 gibt eine hinreichende Bedingung. Auf nicht kompakten Mengen können Extrema angenommen werden oder nicht; (G2) zeigt nur, dass es dort keine Garantie gibt.

Lösung R3. (a) $|x^3 - y^3| = |x-y|\,|x^2+xy+y^2| \le (4+4+4)|x-y| = 12\,|x-y|$ für $x, y \in [-2,2]$. $L = 12$, $\delta = \frac{\varepsilon}{12}$.

(b) Es ist

$$\Big|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\Big| = \frac{|y^2-x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} \le |x-y|\Big(\frac{|x|}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2} + \frac{|y|}{1+y^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big).$$

Nach R2 ist $\frac{|t|}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$, und $\frac{1}{1+t^2} \le 1$. Die Klammer ist also höchstens 1; $L = 1$, $\delta = \varepsilon$. Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, obwohl $\mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

(c) $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{|x-y|}{xy} \le 4|x-y|$ für $x, y \ge \frac{1}{2}$. $L = 4$, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Lösung R4. (a) Sei $x \in (0,1)$. Nach Lemma 2.30 gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le \frac{1}{x} < k+1$, also $\frac{1}{k+1} < x \le \frac{1}{k}$. Ist $x < \frac{1}{k}$, so liegt x in $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}) \subseteq U_k$. Ist $x = \frac{1}{k}$, so ist $k \ge 2$ wegen $x < 1$, und x liegt in $U_{k-1} = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k-1})$.

(b) Es ist $\frac{1}{n+1} \in U_m$ genau dann, wenn $\frac{1}{m+2} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$, also $m < n+1 < m+2$, also $m = n$. Lässt man U_n weg, so bleibt $\frac{1}{n+1} \in (0,1)$ unbedeckt. Eine endliche Teilfamilie lässt unendlich viele U_n weg.

(c) Die Familie $W, W', U_1, U_2, \ldots$ überdeckt $[0,1]$, denn $0 \in W$, $1 \in W'$, und $(0,1)$ wird nach (a) überdeckt. Endliche Teilüberdeckung: $W, U_1, \ldots, U_9, W'$. Begründung: Punkte aus $[0, \frac{1}{10})$ liegen in W, der Punkt 1 in W'. Für $x \in [\frac{1}{10}, 1)$ ist das k aus (a) höchstens 10, und $k = 10$ kommt nur für $x = \frac{1}{10}$ vor; dann ist $x \in U_9$. In allen anderen Fällen liegt x in U_k oder U_{k-1} mit $k \le 9$. Der eine zusätzliche Punkt 0 zwingt eine Menge, die alle Punkte nahe 0 einfängt; danach genügen endlich viele U_n, und ihre Anzahl hängt von der Größe von W ab.

(d) Sei $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$; c ist irrational, sonst wäre $\sqrt{2} = \frac{1}{c}$ rational (Satz 2.9), und $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{4}$ wegen $\frac{1}{4} < c^2 = \frac{1}{2} < \frac{9}{16}$. Sei $V_n = \{x : |x-c| > \frac{1}{n}\}$, offen nach Folgerung 8.8. Jede rationale Zahl ist von c verschieden, also liegt sie in einem V_n. Die V_n wachsen mit n, endlich viele ergeben V_N. Nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) gibt es ein rationales q mit $|q-c| < \min\{\frac{1}{N}, \frac{1}{4}\}$; es liegt in $(\frac{1}{4}, 1) \subseteq [0,1]$ und nicht in V_N. Nach Satz 8.13 musste es eine solche Überdeckung geben, weil $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht abgeschlossen ist; der fehlende Berührpunkt c wird von den Mengen „umzingelt“, ohne dass eine von ihnen ihn erreicht.

Lösung R5. Für $x, y \in [0,1]$ mit $|x-y| \le \frac{1}{n}$ ist $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$. Auf jedem Teilintervall $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ ist $\sqrt{\ }$ wachsend, die Schwankung ist $\sqrt{\frac{k}{n}} - \sqrt{\frac{k-1}{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, und für $k = 1$

gilt Gleichheit: Die Schwankung auf $[0, \frac{1}{n}]$ ist genau $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Die Bedingung $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10}$ ist gleichwertig mit $n > 100$. Das kleinste n ist 101.

Zum Vergleich: Für eine Lipschitz-stetige Funktion auf $[0,1]$ mit Konstante L genügt $n > L/\varepsilon$, die Anzahl wächst wie $\frac{1}{\varepsilon}$. Bei $\sqrt{x}$ wächst sie wie $\frac{1}{\varepsilon^2}$, weil die Funktion an der Stelle 0 beliebig steil ist.

Lösung R6. (a) *Stetigkeit.* Punkte von $[0,1]$ und von $[2,3]$ haben voneinander mindestens den Abstand 1. Ist $a \in [0,1]$ und $x \in K$ mit $|x-a| < 1$, so ist $x \in [0,1]$ und $f(x) = x^2$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Folgerung 7.12 ein $\delta > 0$ mit $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ für $|x-a| < \delta$; mit $\min\{\delta, 1\}$ ist f in a stetig. Ebenso in $a \in [2,3]$ mit $5 - x$.

Bild und Injektivität. Nach Folgerung 7.27 ist $x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend auf $[0,\infty)$; wegen $0^2 = 0$ und $1^2 = 1$ bildet sie $[0,1]$ bijektiv auf $[0,1]$ ab (Satz 7.19 für die Surjektivität). Die Abbildung $x \mapsto 5-x$ bildet $[2,3]$ streng fallend und bijektiv auf $[2,3]$ ab. Auf jedem Stück ist f also injektiv, und die Bilder $[0,1]$ und $[2,3]$ sind disjunkt; f ist injektiv und $f(K) = [0,1] \cup [2,3] = K$.

Nicht monoton. Es ist $1 < 2 < 3$, aber $f(1) = 1 < f(2) = 3$ und $f(2) = 3 > f(3) = 2$.

(b) $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ für $y \in [0,1]$ und $f^{-1}(y) = 5 - y$ für $y \in [2,3]$. Die Stetigkeit folgt wie in (a): Die beiden Stücke von $f(K)$ haben Abstand 1, $\sqrt{\ }$ ist nach Folgerung 7.27 stetig, $5-y$ als Polynom. Satz 8.18 sagt die Stetigkeit voraus, denn K ist als Vereinigung zweier abgeschlossener Intervalle nach Satz 8.2 abgeschlossen und beschränkt, nach Satz 8.13 also kompakt und f stetig und injektiv. Satz 7.26 verlangt ein Intervall als Definitionsbereich und eine streng monotone Funktion; beides fehlt hier.

(c) Nein, in beiden Fällen. Nach Satz 8.15 ist $g([0,1])$ kompakt, nach Satz 8.13 also abgeschlossen; $(0,1)$ ist nicht abgeschlossen. Nach Satz 7.19 ist $g([0,1])$ ein Intervall; K ist keines, denn $1, 2 \in K$, aber $\frac{3}{2} \notin K$. Die erste Antwort benutzt die Kompaktheit, die zweite den Zwischenwertsatz; Folgerung 8.17 (1) vereint beide.

Lösung B1. Seien K, L kompakt, nach Satz 8.13 beschränkt und abgeschlossen. $K \cup L$ ist beschränkt (eine gemeinsame Schranke ist das Maximum der beiden) und nach Satz 8.2 abgeschlossen, also kompakt. Ist $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Mengen mit $I \neq \varnothing$, so ist $\bigcap_i K_i$ nach Satz 8.2 abgeschlossen und als Teilmenge eines K_{i_0} beschränkt, also kompakt. (Für $I = \varnothing$ wäre der Durchschnitt nach Abschnitt 1.4 die Grundmenge $\mathbb{R}$; deshalb die Voraussetzung.)

Unendliche Vereinigungen: nein. $\mathbb{N} = \bigcup_n \{n\}$ ist eine Vereinigung kompakter Mengen und nicht kompakt; ebenso $(0,1] = \bigcup_n [\frac{1}{n}, 1]$.

Lösung B2. Sei $c = f(x_0) > 0$. Wegen der Grenzwerte gibt es R mit $|f(x)| < c$ für $|x| > R$. Insbesondere ist $|x_0| \leq R$, denn $|f(x_0)| = c$. Auf dem kompakten $[-R, R]$ nimmt

f nach Satz 8.16 (angewandt auf die nach Lemma 7.28 (1) stetige Einschränkung) ein Maximum $f(q)$ an, und $f(q) \geq f(x_0) = c$. Für $|x| > R$ ist $f(x) < c \leq f(q)$. Also ist $f(q)$ das Maximum auf ganz $\mathbb{R}$.

Ein Minimum braucht es nicht zu geben: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist positiv mit Infimum 0, das nicht angenommen wird. Hat f zusätzlich einen negativen Wert, so nimmt f nach demselben Argument, angewandt auf $-f$, auch ein Minimum an.

Lösung B3. (a) Sei $d = d(A, C)$; das Infimum existiert, weil die Menge nichtleer und durch 0 nach unten beschränkt ist (Folgerung 2.35). Zu jedem n gibt es $a_n \in A$, $c_n \in C$ mit $d \leq |a_n - c_n| < d + \frac{1}{n}$. Nach Satz 8.13 hat (a_n) eine Teilfolge $a_{n_k} \to a^* \in A$, und A ist beschränkt, etwa $|a| \leq M$ für $a \in A$. Dann ist $|c_{n_k}| \leq |a_{n_k}| + |a_{n_k} - c_{n_k}| \leq M + d + 1$; nach Bolzano-Weierstraß (Folgerung 5.15 (1)) hat (c_{n_k}) eine Teilfolge $c_{n_{k_j}} \to c^*$, und $c^* \in C$ nach Satz 8.4, weil C abgeschlossen ist. Auch $a_{n_{k_j}} \to a^*$ (Satz 4.24 (1)). Wegen $||u| - |v|| \leq |u - v|$ konvergiert $|a_{n_{k_j}} - c_{n_{k_j}}|$ gegen $|a^* - c^*|$, und aus $d \leq |a_{n_{k_j}} - c_{n_{k_j}}| < d + \frac{1}{n_{k_j}}$ folgt nach Satz 4.11 und Satz 4.3 $|a^* - c^*| = d$.

(b) Wäre $d(A, C) = 0$, so wäre nach (a) $a^* = c^* \in A \cap C$, im Widerspruch zur Disjunktheit. Für die zweite Aussage wende man (a) auf die kompakte Menge $A = \{x\}$ an (Beispiel (a) in 8.2). Ohne Abgeschlossenheit von C ist das falsch: $C = (0, 1)$, $x = 0$, $d(\{0\}, C) = 0$, aber kein Punkt von C hat Abstand 0.

(c) A ist abgeschlossen als Durchschnitt von $\mathbb{Z}$ (Beispiel (e) in 8.1) mit $[2, \infty)$. C ist abgeschlossen: Für $2 \leq m < n$ ist

$$\left(n + \frac{1}{n}\right) - \left(m + \frac{1}{m}\right) = (n - m) - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Eine konvergente Folge in C ist eine Cauchy-Folge (Satz 4.30 (1)), ihre Glieder unterscheiden sich ab einer Stelle um weniger als $\frac{1}{2}$, sind dort also gleich; ihr Grenzwert liegt in C, und nach Satz 8.4 ist C abgeschlossen. A und C sind disjunkt, weil $n + \frac{1}{n}$ wegen $0 < \frac{1}{n} < 1$ keine ganze Zahl ist. Aber $d(A, C) \leq |n - (n + \frac{1}{n})| = \frac{1}{n}$ für jedes $n \geq 2$, also $d(A, C) = 0$ (Satz 2.29). Im Beweis von (a) fehlt die konvergente Teilfolge von $(a_n) = (n)$.

Lösung B4. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $k = \lfloor \frac{x}{p} \rfloor$ (Lemma 2.30), also $k \leq \frac{x}{p} < k + 1$ und $x - kp \in [0, p)$. Aus $f(t + p) = f(t)$ folgt durch Induktion $f(t + mp) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}_0$; mit $t = s - mp$ auch $f(s - mp) = f(s)$. Also ist $f(t + kp) = f(t)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und insbesondere $f(x) = f(x - kp)$. Damit ist $f(\mathbb{R}) \subseteq f([0, p)) \subseteq f([0, p]) \subseteq f(\mathbb{R})$, also $f(\mathbb{R}) = f([0, p])$. Nach Lemma 8.11 und Satz 8.16, angewandt auf die nach Lemma 7.28 (1) stetige Einschränkung auf $[0, p]$, ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an.

Gleichmäßige Stetigkeit. f ist auf $[0, 2p]$ gleichmäßig stetig (Satz 8.21 mit Lemma 7.28 (1)). Zu $\varepsilon > 0$ sei δ dafür gewählt, und $\delta' = \min\{\delta, p\}$. Seien $x \le y$ mit $y - x < \delta'$. Wähle k mit $x - kp \in [0, p)$; dann ist $y - kp \in [0, 2p)$, weil $y - x < p$. Also ist

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - kp) - f(y - kp)| < \varepsilon.$$

Lösung B5. (a) Wir zeigen Folgenkompaktheit. Sei (z_n) eine Folge in $A+C$, $z_n = a_n + c_n$. Nach Satz 8.13 hat (a_n) eine Teilfolge $a_{n_k} \to a \in A$. Die Folge (c_{n_k}) liegt in C und hat eine Teilfolge $c_{n_{k_j}} \to c \in C$. Dann gilt $a_{n_{k_j}} \to a$ (Satz 4.24 (1)) und nach Satz 4.9 $z_{n_{k_j}} \to a + c \in A + C$. Nach Satz 8.13 ist $A + C$ kompakt.

(b) A ist abgeschlossen (wie $\mathbb{Z}$, Beispiel (e) in 8.1). C ist abgeschlossen: Je zwei verschiedene Punkte von C haben einen Abstand größer als 1, denn für $2 \le m < n$ ist $(-m + \frac{1}{m}) - (-n + \frac{1}{n}) = (n - m) + (\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) > 1$. Eine konvergente Folge in C ist eine Cauchy-Folge (Satz 4.30 (1)); ihre Glieder haben ab einer Stelle Abstand kleiner als 1, sind also ab dort gleich, und ihr Grenzwert liegt in C. Nun ist $\frac{1}{n} = n + (-n + \frac{1}{n}) \in A + C$ für $n \ge 2$, und $\frac{1}{n} \to 0$. Aber $0 \notin A + C$: Aus $m - n + \frac{1}{n} = 0$ folgte $\frac{1}{n} = n - m \in \mathbb{Z}$, unmöglich für $n \ge 2$. Nach Satz 8.4 ist $A + C$ nicht abgeschlossen.

Lösung B6. (a) „$\subseteq$“: Ist $x \in K_n$ für alle n, so ist $f(x) \in f(K_n)$ für alle n.

„$\supseteq$“: Sei $y \in f(K_n)$ für alle n. Setze $L_n = \{x \in K_n : f(x) = y\}$. Nach Voraussetzung ist $L_n \neq \emptyset$, und $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots$, weil die K_n geschachtelt sind. Jedes L_n ist kompakt: Es ist als Teilmenge von K_n beschränkt. Ist (x_j) eine Folge in L_n mit $x_j \to x$, so liegt x in K_n, weil K_n abgeschlossen ist (Satz 8.13, Satz 8.4), und nach dem Folgenkriterium (Satz 7.10) ist $f(x) = \lim f(x_j) = y$; also $x \in L_n$, und L_n ist nach Satz 8.4 abgeschlossen. Nach Folgerung 8.14 gibt es ein $x \in \bigcap_n L_n$. Dann ist $x \in \bigcap_n K_n$ und $f(x) = y$.

(b) Für jedes n ist $f(K_n) = \{0\}$, also $\bigcap_n f(K_n) = \{0\}$. Aber $\bigcap_n K_n = \emptyset$: Zu $x > 0$ gibt es nach der archimedischen Eigenschaft n mit $\frac{1}{n} < x$, und dann ist $x \notin K_n$. Also ist die linke Seite $f(\emptyset) = \emptyset \neq \{0\}$. Die Mengen $(0, \frac{1}{n}]$ sind beschränkt, aber nicht abgeschlossen; im Beweis von (a) bricht der Schritt „L_n ist kompakt“ ab, und Folgerung 8.14 ist nicht anwendbar.

Lösung V1. Angenommen, f ist stetig und nimmt jeden Wert genau zweimal an. Die Funktion $-f$ hat dieselbe Eigenschaft. Sei $y_0 = f(0)$ und seien $a < b$ die beiden Stellen mit $f(a) = f(b) = y_0$. Auf (a, b) nimmt f den Wert y_0 nicht an, nach dem Zwischenwertsatz hat $f - y_0$ dort ein festes Vorzeichen; indem wir nötigenfalls f durch $-f$ ersetzen, sei $f > y_0$ auf (a, b). Nach Satz 8.16 nimmt f auf $[a, b]$ ein Maximum M an, in einem Punkt c; wegen $f > y_0$ auf (a, b) ist $M > y_0$ und $c \in (a, b)$. Der Wert M wird an genau einer weiteren Stelle $d \neq c$ angenommen.

Fall $d \in [a,b]$. Dann ist $d \in (a,b)$, weil $f(a) = f(b) = y_0 < M$. Sei etwa $c < d$ (sonst vertausche die Namen). Für einen Punkt $e \in (c,d)$ ist $f(e) \le M$, und $f(e) = M$ hieße, dass M dreimal angenommen wird; also $f(e) < M$. Wähle y mit $\max\{y_0, f(e)\} < y < M$. Nach dem Zwischenwertsatz wird y angenommen in (a,c) (zwischen y_0 und M), in (c,e) (zwischen M und $f(e)$), in (e,d) (zwischen $f(e)$ und M) und in (d,b) (zwischen M und y_0). Diese vier Intervalle sind disjunkt; y wird mindestens viermal angenommen.

Fall $d > b$. Wähle y mit $y_0 < y < M$. Dann wird y angenommen in (a,c), in (c,b) und in (b,d) (zwischen $f(b) = y_0$ und $f(d) = M$), also mindestens dreimal.

Fall $d < a$. Spiegelbildlich: y wird in (d,a), (a,c) und (c,b) angenommen.

In jedem Fall ein Widerspruch. Der Satz vom Maximum wird an genau einer Stelle gebraucht: für die Existenz des Punktes c, an dem der Wert M „von oben" erreicht wird.

Bemerkung (ohne Beweis). Für „genau dreimal" gibt es dagegen stetige Funktionen, etwa stückweise lineare; die Konstruktion wird hier nicht ausgeführt.

Lösung V2. Für $a = b$ ist $[a,b]$ endlich und nach Beispiel (a) in 8.2 kompakt; sei $a < b$. Sei (U_i) eine offene Überdeckung von $[a,b]$ ohne endliche Teilüberdeckung. Setze $[a_0,b_0] = [a,b]$. Hat $[a_n,b_n]$ keine endliche Teilüberdeckung, so hat mindestens eine der Hälften $[a_n,m]$, $[m,b_n]$ mit $m = \frac{a_n+b_n}{2}$ keine; denn hätten beide eine, so wäre deren Vereinigung eine für $[a_n,b_n]$. Man nehme die linke Hälfte, falls sie keine hat, sonst die rechte. So entsteht eine Intervallschachtelung mit $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ und einem Punkt ξ in allen Intervallen (Folgerung 5.15 (3)). Es ist $\xi \in [a,b]$, also $\xi \in U_j$ für ein j, und $B_\varepsilon(\xi) \subseteq U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Wähle n mit $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$. Für $x \in [a_n,b_n]$ ist $|x-\xi| \le b_n - a_n < \varepsilon$, also $[a_n,b_n] \subseteq U_j$: Eine einzige Menge überdeckt $[a_n,b_n]$. Widerspruch.

Der Beweis benutzt die Vollständigkeit als Intervallschachtelung, der Beweis im Kapitel als Supremum. Die Halbierung kennt man aus dem zweiten Beweis von Satz 7.15.

Lösung V3. (a) Zu $\varepsilon > 0$ seien δ_f, δ_g die Zahlen zu $\frac{\varepsilon}{2}$; für $|x-y| < \min\{\delta_f,\delta_g\}$ ist $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \varepsilon$.

(b) $f(x) = g(x) = x$ auf $\mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig, $fg = x^2$ nicht (Beispiel (b) in 8.4).

(c) Sei $|f| \le S$ und $|g| \le T$ mit $S, T > 0$. Es ist

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \le |f(x)|\,|g(x)-g(y)| + |g(y)|\,|f(x)-f(y)| \le S\,|g(x)-g(y)| + T\,|f(x)-f(y)|$$

(Aufgabe B8 (b) der Einheit 1). Zu $\varepsilon > 0$ wähle δ so, dass $|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2S}$ und $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2T}$ für $|x-y| < \delta$. Dann ist die rechte Seite kleiner als ε.

(d) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\eta > 0$ mit $|h(u)-h(v)| < \varepsilon$ für $u, v \in E$, $|u-v| < \eta$, und zu η ein $\delta > 0$ mit $|f(x)-f(y)| < \eta$ für $|x-y| < \delta$. Dann ist $|h(f(x)) - h(f(y))| < \varepsilon$.

Lösung V4. (a) Angenommen, es gibt kein solches λ. Dann gibt es zu jedem n ein $x_n \in K$, so dass $B_{1/n}(x_n)$ in keinem U_i liegt. Nach Satz 8.13 gibt es eine Teilfolge $x_{n_k} \to x \in K$. Es ist $x \in U_j$ für ein j und $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j$ für ein $\varepsilon > 0$. Wähle k mit $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $z \in B_{1/n_k}(x_{n_k})$ ist $|z - x| < \frac{1}{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also $B_{1/n_k}(x_{n_k}) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. Widerspruch.

(b) Sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Sei P die Menge aller Paare (a, δ) mit $a \in K$, $\delta > 0$ und $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in K \cap B_\delta(a)$. Wegen der Stetigkeit gibt es zu jedem $a \in K$ ein solches δ; die Mengen $B_\delta(a)$, $(a, \delta) \in P$, bilden also eine offene Überdeckung von K. (Indem man über alle Paare indiziert, braucht man kein δ pro Punkt auszuwählen.) Sei λ eine Lebesgue-Zahl nach (a). Für $x, y \in K$ mit $|x - y| < \lambda$ liegt $B_\lambda(x)$, das x und y enthält, in einem $B_\delta(a)$ mit $(a, \delta) \in P$. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also leistet λ das Verlangte, und f ist gleichmäßig stetig.

Lösung V5. (a) Die Funktion $g(x) = |x^2 - 2|$ ist auf D stetig, und $U_n = g^{-1}((\frac{1}{n}, \infty))$; nach Satz 8.7 ist U_n offen in D. Für $x \in D$ ist $x^2 \neq 2$, weil $\sqrt{2}$ irrational ist (Satz 2.9); also $|x^2 - 2| > 0$, und es gibt n mit $\frac{1}{n} < |x^2 - 2|$. Die U_n überdecken D.

(b) Die U_n wachsen mit n; endlich viele ergeben U_N. Für $x \in [1, 2]$ ist $|x^2 - 2| = |x - \sqrt{2}|\,(x + \sqrt{2}) \le 4|x - \sqrt{2}|$. Nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) gibt es ein rationales $q \in [1, 2]$ mit $|q - \sqrt{2}| < \frac{1}{4N}$ (etwa $q \in (\sqrt{2} - \frac{1}{4N}, \sqrt{2})$, das wegen $\sqrt{2} - \frac{1}{4} > 1$ in $[1, 2]$ liegt). Dann ist $|q^2 - 2| < \frac{1}{N}$, also $q \notin U_N$.

(c) Es ist $1 \in S$, denn $[1, 1] \cap \mathbb{Q} = \{1\}$ und $|1^2 - 2| = 1 > \frac{1}{2}$, also $1 \in U_2$. Jedes rationale $x \in [1, \sqrt{2})$ liegt in S: Auf $[1, x]$ ist $|t^2 - 2| \ge 2 - x^2 > 0$, und ein U_n mit $\frac{1}{n} < 2 - x^2$ überdeckt $[1, x] \cap \mathbb{Q}$. Kein rationales $x > \sqrt{2}$ liegt in S, denn $[1, x] \cap \mathbb{Q}$ enthält rationale Zahlen beliebig nahe an $\sqrt{2}$, und nach (b) überdeckt kein U_N diese. Die Menge S ist $[1, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ und hat in $\mathbb{Q}$ kein Supremum. Der Beweis bricht beim ersten Schritt ab, der die Vollständigkeit benutzt: „$s = \sup S$ existiert“. Hätte S ein Supremum $s \in D$, so läge s in einem U_n, und das Argument ginge weiter; genau das verhindert die Lücke bei $\sqrt{2}$. Nach der Bemerkung nach Lemma 8.12 ist D also nicht kompakt, obwohl D beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ ist.

Lösung V6. (a) Sei $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Das Intervall $J_n = \big(\max\{x - \frac{1}{n}, 0\},\ \min\{x + \frac{1}{n}, 1\}\big)$ ist nicht leer, denn wegen $0 \le x \le 1$ ist der linke Randpunkt kleiner als der rechte. Nach Satz 2.31 enthält J_n eine rationale Zahl q_n; sie liegt in D, und $|q_n - x| < \frac{1}{n}$, also $q_n \to x$.

Sei nun (q_n) irgendeine Folge in D mit $q_n \to x$. Sie ist konvergent, also eine Cauchy-Folge (Satz 4.30 (1)); nach Satz 8.23 ist $(f(q_n))$ eine Cauchy-Folge, nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 4.31) konvergiert sie. Ist (r_n) eine zweite solche Folge, so ist die gemischte Folge $q_1, r_1, q_2, r_2, \ldots$ eine Folge in D mit Grenzwert x (wie im Beweis von Satz 8.24); ihre Bildfolge konvergiert also, und ihre Teilfolgen $(f(q_n))$ und $(f(r_n))$ haben nach Satz 4.24 (1) denselben Grenzwert.

(b) Für $x \in D$ ist die konstante Folge $q_n = x$ zulässig, also $F(x) = f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $|f(q) - f(r)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $q, r \in D$ mit $|q - r| < \delta$. Seien $x, y \in [0,1]$ mit $|x - y| < \delta$ und $q_n \to x$, $r_n \to y$ Folgen in D. Dann gilt $|q_n - r_n| \to |x - y| < \delta$, also $|q_n - r_n| < \delta$ für fast alle n und für diese $|f(q_n) - f(r_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Beim Grenzübergang (Satz 4.10) folgt $|F(x) - F(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(c) Sei $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $G = f$ auf D, und sei $x \in [0,1]$. Mit einer Folge $q_n \to x$ in D gilt nach Satz 7.10 $G(x) = \lim G(q_n) = \lim f(q_n) = F(x)$.

(d) In (G4) ist $D = [0,2] \cap \mathbb{Q}$ und $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$ unbeschränkt. Wäre f gleichmäßig stetig, so hätte f nach (a)–(b) eine stetige Fortsetzung F auf $[0,2]$; nach Lemma 8.11 und Satz 8.16 wäre F beschränkt, also auch $f = F|_D$. Widerspruch.

Bemerkung. Satz 8.24 ist der Fall, in dem nur zwei Randpunkte fehlen; hier fehlen alle irrationalen Punkte. Ohne gleichmäßige Stetigkeit gibt es im Allgemeinen keine stetige Fortsetzung, wie (d) zeigt.

EINHEIT 9

Die elementaren Funktionen

Leitfrage

Was ist $2^{\sqrt{2}}$? Für ganze Exponenten ist 2^n ein wiederholtes Produkt. Für rationale Exponenten liegt $2^{p/q} = \left(\sqrt[q]{2}\right)^p$ nahe, mit der positiven q-ten Wurzel aus Satz 2.39; erklärt ist diese Schreibweise bisher aber nicht, und man müsste erst zeigen, dass der Wert nicht von der Darstellung des Bruchs abhängt. Der Exponent $\sqrt{2}$ ist nicht einmal rational. Ebenso wenig ist bisher erklärt, was $\sin 1$ bedeutet. Die Schule erklärt den Sinus am rechtwinkligen Dreieck oder am Einheitskreis, mit dem Winkel als Länge eines Kreisbogens; die Zahl π ist dort das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises. Beides setzt voraus, dass man die Länge einer gekrümmten Kurve messen kann, und dieser Begriff braucht das Integral; in diesem Kurs wird er nicht entwickelt. Die Analysis geht deshalb den umgekehrten Weg. Sie erklärt Sinus, Kosinus und π ohne Geometrie und stellt die Verbindung zum Kreis nachträglich her: Einheit 13 zeigt, dass das hier definierte π die Fläche des Einheitskreises ist.

Wie definiert man Potenzen mit beliebigem reellen Exponenten, den Logarithmus, Sinus, Kosinus und die Zahl π allein mit Reihen und Stetigkeit, und wie beweist man ihre bekannten Eigenschaften? Die Antwort dieser Einheit ist überraschend sparsam: Eine einzige Reihe,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

leistet alles. Ihre reelle Gestalt liefert Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz, ihre Gestalt auf der imaginären Achse Kosinus und Sinus. Die Zahl π entsteht als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus, und die Periodizität folgt aus der Funktionalgleichung.

Voraussetzungen. Die Ableitung steht noch nicht zur Verfügung; sie folgt in Einheit 10. Benutzt werden:

1. aus Einheit 1: der Binomialsatz (Satz 1.20), die Anordnungsregeln (O0)–(O6) aus Abschnitt 1.8 und die Festlegung $x^0 = 1$ (Abschnitt 1.6), in den Aufgaben außerdem

die geometrische Summe (Satz 1.13), die Wohlordnung (Satz 1.16) und die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24);

2. aus Einheit 2: die Nullteilerfreiheit und ganzzahlige Potenzen in Körpern (Lemma 2.2 und der Absatz danach), die archimedische Eigenschaft (Satz 2.29), der ganze Teil (Lemma 2.30), die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) sowie Existenz und Eindeutigkeit nichtnegativer k-ter Wurzeln (Satz 2.39), in den Aufgaben außerdem die Monotonie von Potenzen (Lemma 2.38);

3. aus Einheit 3: der Körper $\mathbb{C}$, in dem nach Abschnitt 3.1 Bruchrechnung, ganzzahlige Potenzen, geometrische Summe und Binomialsatz gelten; Realteil, Imaginärteil und Konjugation (Definition 3.5, Satz 3.6, Folgerung 3.22); der Vergleich von Quadraten (Lemma 3.8); der Betrag (Satz 3.9, Folgerung 3.23 mit $|z^n| = |z|^n$), die Dreiecksungleichung und ihre Umkehrung (Satz 3.10, Folgerung 3.24); die Wahl der Quadratwurzel (Satz 3.12 mit der Bemerkung danach); die Polardarstellung im Vorgriff (Abschnitt 3.6) und die rationale Parametrisierung des Einheitskreises (Satz 3.18);

4. aus Einheit 4: Konvergenz von Folgen in $\mathbb{K}$ (Definition 4.2), Real- und Imaginärteil (Satz 4.5), die Rechenregeln einschließlich $|z_n| \to |z|$ und $\bar{z}_n \to \bar{z}$ (Satz 4.9), Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.10), Einschließung (Satz 4.11), Teilfolgen (Satz 4.24); die Eulersche Zahl $e = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ (Definition 4.19), ihre Darstellung $e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ mit $0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!\,n}$ (Satz 4.20) und ihre Irrationalität (Satz 4.21);

5. aus Einheit 6: Reihen komplexer Zahlen, die geometrische Reihe (Satz 6.2), die Rechenregeln (Satz 6.3), Folgerung 6.5, absolute Konvergenz mit $\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|$ (Satz 6.9), das Quotientenkriterium mit dem anschließenden Beispiel zur Exponentialreihe (Satz 6.15), das Leibniz-Kriterium mit seiner Fehlerabschätzung (Satz 6.16), das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen (Satz 6.23) und Satz 6.24;

6. aus Einheit 7: Grenzwerte (Definition 7.3) mit dem Folgenkriterium (Satz 7.5) einschließlich der einseitigen Grenzwerte, der Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ und der Werte $\pm\infty$ (Definition 7.7), Stetigkeit (Definition 7.9) mit dem Folgenkriterium (Satz 7.10), die Rechenregeln einschließlich Verkettung (Satz 7.11), der Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16), der Satz über die Umkehrfunktion (Satz 7.26) und die Stetigkeit der k-ten Wurzel (Folgerung 7.27).

Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ sind im Sinn der Bemerkung „Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$“ nach Folgerung 7.12 gemeint: Definition 7.3 und Definition 7.9 mit dem Betrag in $\mathbb{C}$. Folgenkriterium und Rechenregeln gelten dort mit denselben Beweisen, und eine solche Funktion ist genau dann stetig, wenn Real- und Imaginärteil es sind. Für $D \subseteq \mathbb{R}$ und reellwertiges f sind es die bisherigen Begriffe.

Die Nummern 9.1 bis 9.33 folgen der Reihenfolge des Textes. Satz 9.34 (Hauptwert des Arguments) und Satz 9.35 (komplexer Logarithmus) stehen am Ende von Abschnitt 9.7.

9.1 Die Exponentialreihe

Definition 9.1. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

die *Exponentialfunktion*. Die Partialsummen bezeichnen wir mit $s_N(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n/n!$, den Rest mit $R_N(z) = \exp(z) - s_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} z^n/n!$.

Die Definition ist erst sinnvoll, wenn die Reihe für jedes z konvergiert.

Satz 9.2. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe absolut konvergent, und es gilt $|\exp(z)| \le \exp(|z|)$.

Beweis. Die absolute Konvergenz ist das Beispiel zur Exponentialreihe nach Satz 6.15. Nach Satz 6.9 konvergiert die Reihe, und $|\exp(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n/n! = \exp(|z|)$. □

Für das Rechnen braucht man mehr als Konvergenz: eine Schranke für den Fehler, den man beim Abbrechen der Reihe begeht.

Lemma 9.3 (Restglied). Sei $N \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < N + 2$. Dann gilt

$$|R_N(z)| \le \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \frac{N+2}{N+2-|z|}.$$

Insbesondere ist $|R_N(z)| \le \dfrac{2\,|z|^{N+1}}{(N+1)!}$ für $|z| \le \frac{N+2}{2}$.

Beweisidee. Nach dem Glied $z^{N+1}/(N+1)!$ wächst die Fakultät mindestens um den Faktor $N+2$ je Schritt; die Glieder fallen also mindestens wie eine geometrische Folge mit Quotient $\frac{|z|}{N+2}$, und die Summe dieser geometrischen Reihe ist der zweite Faktor.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $(N+1+k)! \ge (N+1)!\,(N+2)^k$; das ist für $k = 0$ eine Gleichung, und der Schritt von k auf $k+1$ ist $(N+2+k)! = (N+1+k)!\,(N+2+k) \ge (N+1)!\,(N+2)^k(N+2)$. Mit $q = \frac{|z|}{N+2} < 1$, Satz 6.9 und der geometrischen Reihe (Satz 6.2) folgt

$$|R_N(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{N+1+k}}{(N+1+k)!} \le \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot \frac{N+2}{N+2-|z|}.$$

Für $|z| \le \frac{N+2}{2}$ ist $N+2-|z| \ge \frac{N+2}{2}$, der zweite Faktor also höchstens 2. □

Für $N = 0$ und $N = 1$ lautet der Zusatz des Lemmas

$$|\exp(z) - 1| \le 2|z| \quad \text{für } |z| \le 1, \qquad |\exp(z) - 1 - z| \le |z|^2 \quad \text{für } |z| \le \tfrac{3}{2}.$$

Diese beiden Abschätzungen tragen die Stetigkeit in Satz 9.6.

Die wichtigste Eigenschaft der Exponentialfunktion ist, dass sie Summen in Produkte verwandelt. Multipliziert man zwei Reihen aus und ordnet die Produkte $a_k b_l$ nach $n = k + l$, so entsteht für $a_k = z^k/k!$ und $b_l = w^l/l!$ genau der Binomialsatz.

Satz 9.4 (Funktionalgleichung). Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w).$$

Beweisidee. Das Glied vom Grad n im ausmultiplizierten Produkt ist $\sum_{k+l=n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} = \frac{(z+w)^n}{n!}$. Dass man die beiden Reihen so ausmultiplizieren darf, sagt der Satz über das Cauchy-Produkt, weil beide absolut konvergieren.

Beweis. Nach Satz 9.2 sind $\sum_k z^k/k!$ und $\sum_l w^l/l!$ absolut konvergent. Nach Satz 6.23 konvergiert ihr Cauchy-Produkt $\sum c_n$ gegen $\exp(z) \exp(w)$. Nach dem Binomialsatz (Satz 1.20), der nach Abschnitt 3.1 in $\mathbb{C}$ gilt, ist

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!}.$$

Das Cauchy-Produkt ist also die Exponentialreihe an der Stelle $z + w$, und sein Wert ist $\exp(z + w)$. □

Die absolute Konvergenz ist dabei wesentlich: Satz 6.23 verlangt sie für beide Faktoren, und ohne sie kann das Cauchy-Produkt divergieren (G1).

Folgerung 9.5. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $\exp(0) = 1$ und $\exp(z) \exp(-z) = 1$; insbesondere ist $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.
2. $\exp(nz) = \exp(z)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
3. $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.

Beweis. (1) In der Reihe für $z = 0$ ist nur das Glied $0^0/0! = 1$ von null verschieden. Nach Satz 9.4 ist $\exp(z) \exp(-z) = \exp(0) = 1$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion: $\exp(0 \cdot z) = 1$, und $\exp((n+1)z) = \exp(nz) \exp(z) = \exp(z)^{n+1}$ nach Satz 9.4. Für $n = -m$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist nach (1) $\exp(-mz) = 1/\exp(mz) = \exp(z)^{-m}$.

(3) Nach Folgerung 3.22 ist $\overline{s_N(z)} = s_N(\bar{z})$. Die linke Seite strebt nach Satz 4.9 (3) gegen $\overline{\exp(z)}$, die rechte gegen $\exp(\bar{z})$. □

Satz 9.6 (Stetigkeit). Für alle $z, z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| \le 1$ gilt

$$|\exp(z) - \exp(z_0)| \le 2\,|\exp(z_0)|\,|z - z_0|.$$

Insbesondere ist exp in jedem Punkt von $\mathbb{C}$ stetig, und aus $z_n \to z_0$ folgt $\exp(z_n) \to \exp(z_0)$. Ferner gilt für $0 < |z| \le \frac{3}{2}$

$$\Big|\frac{\exp(z) - 1}{z} - 1\Big| \le |z|, \qquad \text{also} \qquad \lim_{z\to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1.$$

Beweis. Nach Satz 9.4 ist $\exp(z) - \exp(z_0) = \exp(z_0)\big(\exp(z - z_0) - 1\big)$, und nach Lemma 9.3 mit $N = 0$ ist $|\exp(h) - 1| \le 2|h|$ für $|h| \le 1$. Zu $\varepsilon > 0$ leistet $\delta = \min\big\{1,\ \varepsilon/(2|\exp(z_0)| + 1)\big\}$ das Verlangte; die Folgenaussage ist dann Satz 7.10 in der Lesart der Bemerkung nach Folgerung 7.12. Die zweite Aussage ist Lemma 9.3 mit $N = 1$, geteilt durch $|z|$. □

Damit ist die Stetigkeit direkt aus der Reihe gewonnen, ohne einen allgemeinen Satz über Potenzreihen (Einheit 14), und mit einer ausdrücklichen Konstanten. Die Abschätzung dahinter, $|\exp(z) - 1 - z| \le |z|^2$ aus Lemma 9.3, ergibt in Einheit 10 die Aussage $\exp' = \exp$ und, mit $z = ih$, die Ableitungen von Kosinus und Sinus.

9.2 Die reelle Exponentialfunktion

Bis hierher gilt alles für komplexe Argumente. Ab jetzt wird die Anordnung von $\mathbb{R}$ benutzt, mit Monotonie und Zwischenwertsatz, und die Aussagen beschränken sich auf reelle Argumente.

Satz 9.7. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\exp(x) \in \mathbb{R}$ und $\exp(x) > 0$.
2. $\exp(x) \ge 1 + x$, mit Gleichheit nur für $x = 0$.
3. $\exp(x) < \dfrac{1}{1 - x}$ für $x < 1$, $x \ne 0$.

Beweis. (1) Die Partialsummen $s_N(x)$ sind reell; nach Satz 4.5 ist der Imaginärteil des Grenzwerts der Grenzwert der Imaginärteile 0. Für $x \ge 0$ sind alle Glieder nichtnegativ, also $\exp(x) \ge 1$. Für $x < 0$ ist $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$ nach Folgerung 9.5 (1) und (O6).

(2) und (3) für $0 < x < 1$: Wegen $1/n! \le 1$ gilt gliedweise $x^n/n! \le x^n$, für $n = 2$ sogar $x^2/2 = x^2 - x^2/2$. Für $N \ge 2$ ist deshalb $\sum_{n=0}^{N} x^n - s_N(x) \ge x^2/2$, und im Grenzübergang mit der geometrischen Reihe (Satz 6.2, Satz 4.10)

$$\frac{1}{1 - x} - \exp(x) \ge \frac{x^2}{2} > 0.$$

(2) für $x > 0$: $\exp(x) \geq 1 + x + x^2/2 > 1 + x$, weil alle weiteren Glieder nichtnegativ sind. Für $x \leq -1$ ist $1 + x \leq 0 < \exp(x)$. Für $-1 < x < 0$ ist $t = -x \in (0, 1)$, nach dem schon Gezeigten $\exp(t) < 1/(1 - t)$, also $\exp(x) = 1/\exp(t) > 1 - t = 1 + x$ (O6). Für $x = 0$ steht auf beiden Seiten 1.

(3) für $x < 0$: Nach (2) ist $\exp(-x) > 1 - x > 0$, also $\exp(x) < 1/(1 - x)$. □

Die Ungleichung $\exp(x) \geq 1 + x$ ist die meistbenutzte Abschätzung dieser Einheit. Sie gilt für alle reellen x, auch für negative, obwohl die Reihe dann wechselnde Vorzeichen hat; der Beweis umgeht die Vorzeichen über $\exp(x) = 1/\exp(-x)$.

Satz 9.8. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend, und es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Ferner gilt $\exp(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\exp(x) \to 0$ für $x \to -\infty$.

Beweis. Stetigkeit: Satz 9.6. Monotonie: Für $x < y$ ist nach Satz 9.4 und Satz 9.7

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)\big(\exp(y - x) - 1\big) \geq \exp(x)\,(y - x) > 0.$$

Nach Satz 9.7 (1) ist $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$. Sei umgekehrt $y > 0$. Dann ist $\exp(y) \geq 1 + y > y$ und

$$\exp(-1/y) = \frac{1}{\exp(1/y)} \leq \frac{1}{1 + 1/y} = \frac{y}{y + 1} < y.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16), angewandt auf die stetige Funktion exp auf $[-1/y,\, y]$, gibt es ein x mit $\exp(x) = y$. Die Grenzwerte im Sinn von Definition 7.7: Für $x > 0$ ist $\exp(x) > x$, und für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1/(1 - x) < 1/|x|$ nach Satz 9.7 (3). □

Hier geht die Vollständigkeit der reellen Zahlen zweimal ein: in der Konvergenz der Reihe und im Zwischenwertsatz.

Satz 9.9. Es gilt $\exp(1) = e$; dabei ist $e = \lim_{n\to\infty}\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ die Eulersche Zahl aus Definition 4.19.

Beweis. Nach Definition 9.1 ist $\exp(1)$ der Grenzwert der Partialsummen $s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, und nach Satz 4.20 (in Reihenform Satz 6.24) ist dieser Grenzwert e. □

Die Zahl e hat damit drei gleichwertige Beschreibungen: als Grenzwert der Folge $\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$, als Wert der Reihe $\sum \frac{1}{k!}$ und als Wert der Exponentialfunktion an der Stelle 1. Neu ist hier nicht die Zahl, sondern ihre Rolle: Satz 9.16 (3) wird zeigen, dass $\exp(x)$ die x-te Potenz dieser Zahl ist. Die Folge aus Einheit 4 ist außerdem der Spezialfall $z = 1$ einer Aussage, die für jede komplexe Zahl gilt.

Satz 9.10. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \exp(z).$$

Beweisidee. Nach dem Binomialsatz ist $(1+\frac{z}{n})^n$ die Partialsumme $s_n(z)$, deren k-tes Glied mit einem Faktor zwischen 0 und 1 multipliziert ist; diese Faktoren streben gegen 1. Für $z = x \geq 0$ sind alle Glieder nichtnegativ, und man schließt wie im Beweis von Satz 4.20. Für komplexes z schätzt man den Fehler durch den Fehler beim reellen Argument $|z|$ ab.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ sei $P_{n,k} = \prod_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{n})$; jeder Faktor liegt in $(0,1]$, also ist $P_{n,k} \in (0,1]$. Wegen $\binom{n}{k}n^{-k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}P_{n,k}$ ist nach dem Binomialsatz, der in $\mathbb{C}$ gilt,

$$\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}P_{n,k}.$$

Fall $z = x \geq 0$. Alle Summanden sind nichtnegativ und höchstens $x^k/k!$, also ist $(1+\frac{x}{n})^n \leq s_n(x) \leq \exp(x)$. Für festes $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$ ist $(1+\frac{x}{n})^n \geq y_{m,n} = \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}P_{n,k}$. Für $n \to \infty$ strebt $y_{m,n}$ gegen $s_m(x)$, weil es eine feste endliche Summe von Produkten aus höchstens m Faktoren ist, die gegen 1 streben (Satz 4.9). Zu $\varepsilon > 0$ wähle m mit $s_m(x) > \exp(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ und dann $N \geq m$ mit $y_{m,n} > s_m(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$. Für $n \geq N$ gilt dann $\exp(x) - \varepsilon < (1+\frac{x}{n})^n \leq \exp(x)$.

Allgemeiner Fall. Mit der Dreiecksungleichung (Folgerung 3.24), Folgerung 3.23 und $1 - P_{n,k} \geq 0$ ist

$$\Big|s_n(z) - \Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}(1-P_{n,k})\Big| \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}(1-P_{n,k}) = s_n(|z|) - \Big(1+\frac{|z|}{n}\Big)^n.$$

Nach dem ersten Fall und nach Definition 9.1 streben beide Terme rechts gegen $\exp(|z|)$, die rechte Seite also gegen 0. Wegen $s_n(z) \to \exp(z)$ folgt die Behauptung. □

Für $z = 1$ ist das Definition 4.19 zusammen mit Satz 9.9. Aufgabe B1 gibt für reelles z eine ausdrückliche Fehlerschranke; sie zeigt, wie langsam die Folge im Vergleich zur Reihe konvergiert.

Satz 9.11 (Wachstum). Für $t \geq 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\exp(t) \geq \dfrac{t^m}{m!}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\exp(x)/x^k \to \infty$ und $x^k\exp(-x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Beweis. Für $t \geq 0$ sind alle Glieder der Reihe nichtnegativ; für $N \geq m$ ist also $s_N(t) \geq t^m/m!$, und Satz 4.10 gibt $\exp(t) \geq t^m/m!$. Für $x > 0$ ist sogar $\exp(x) \geq 1+x^{k+1}/(k+1)! >$

$x^{k+1}/(k+1)!$, denn für $k+1 \geq 1$ sind das zwei verschiedene nichtnegative Glieder. Also ist $\exp(x)/x^k > x/(k+1)!$ und $0 < x^k \exp(-x) < (k+1)!/x$. □

Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz. Der Beweis braucht nur ein Glied der Reihe; das ist typisch für Abschätzungen mit positiven Reihen.

9.3 Der Logarithmus

Für die allgemeine Potenz fehlt noch ein Baustein. Schreibt man eine Zahl $a > 0$ als $a = \exp(c)$, so ist $a^n = \exp(nc)$ für $n \in \mathbb{Z}$ (Folgerung 9.5 (2)), und die rechte Seite ist für jeden reellen Exponenten erklärt. Nach Satz 9.8 gibt es zu jedem $a > 0$ genau ein solches c; es ist der Logarithmus von a.

Definition 9.12. Der *natürliche Logarithmus* $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

Nach Satz 9.8 ist exp eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $(0,\infty)$, also ist ln wohldefiniert, und nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz 7.26) ist ln stetig und streng monoton wachsend. Es gilt $\exp(\ln x) = x$ für $x > 0$ und $\ln(\exp y) = y$ für $y \in \mathbb{R}$.

Satz 9.13. Für $x, y > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln 1 = 0$, $\ln(1/x) = -\ln x$, $\ln(x^n) = n \ln x$, $\ln e = 1$.
2. $1 - \dfrac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, in beiden Ungleichungen mit Gleichheit nur für $x = 1$.

Beweis. (1) Nach Satz 9.4 ist $\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = xy = \exp(\ln(xy))$, und exp ist injektiv. Die übrigen Regeln folgen ebenso aus $\exp(0) = 1$, Folgerung 9.5 und Satz 9.9.

(2) Mit $t = \ln x$ liefert Satz 9.7 (2) $x = \exp(t) \geq 1 + t$, also $\ln x \leq x - 1$, mit Gleichheit nur für $t = 0$, das heißt $x = 1$. Wendet man das auf $1/x$ an, so folgt $-\ln x = \ln(1/x) \leq \frac{1}{x} - 1$. □

Folgerung 9.14. Es gilt $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$, $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$, und

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1.$$

Beweis. ln ist streng wachsend und nimmt in $e^n = \exp(n)$ den Wert n an; zu K wähle man $n > K$ und $R = e^n$. Ebenso ist $\ln(e^{-n}) = -n$, und für $0 < x < e^{-n}$ ist $\ln x < -n$. Für den Grenzwert teile man Satz 9.13 (2) durch $x - 1$. Für $x > 1$ erhält man $\frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1$; für $0 < x < 1$ kehren sich beim Teilen durch die negative Zahl $x - 1$ die Ungleichungen um, und man erhält $1 \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{x}$, wegen $1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. In beiden Fällen liegt der

Quotient zwischen 1 und $1/x$, und $1/x \to 1$. Die Einschließung (Satz 4.11 mit dem Folgenkriterium, Satz 7.5) liefert die Behauptung. □

9.4 Die allgemeine Potenz

Für $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist nach Folgerung 9.5 (2) $a^n = \exp(\ln a)^n = \exp(n \ln a)$. Die rechte Seite ist für jeden reellen Exponenten erklärt. Das legt die Definition nahe; dass sie die einzig vernünftige ist, zeigt Satz 9.18.

Definition 9.15. Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Die Schreibweise a^x war für $x \in \mathbb{Z}$ schon vergeben. Der folgende Satz zeigt, dass keine Mehrdeutigkeit entsteht.

Satz 9.16 (Verträglichkeit). Sei $a > 0$.

1. Für $n \in \mathbb{Z}$ stimmt a^n im Sinn von Definition 9.15 mit der ganzzahligen Potenz aus Abschnitt 1.6 und Einheit 2 (Absatz nach Lemma 2.2) überein.
2. Für $q \in \mathbb{N}$ ist $a^{1/q}$ die positive q-te Wurzel von a, und für $p \in \mathbb{Z}$ ist $a^{p/q} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.
3. $e^x = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (1) wurde vor der Definition gezeigt. (2) $y = a^{1/q} = \exp(\frac{1}{q} \ln a)$ ist positiv, und nach Folgerung 9.5 (2) ist $y^q = \exp(\ln a) = a$. Nach Satz 2.39 gibt es genau ein $y \geq 0$ mit $y^q = a$, also ist $y = \sqrt[q]{a}$. Ferner ist $a^{p/q} = \exp\big(p \cdot \frac{1}{q} \ln a\big) = \exp\big(\frac{1}{q} \ln a\big)^p = (\sqrt[q]{a})^p$. (3) folgt aus $\ln e = 1$. □

Bemerkenswert an (2) ist, dass die Frage der Wohldefiniertheit gar nicht entsteht: $a^{p/q} = a^{p'/q'}$ für $p/q = p'/q'$ ist hier keine Behauptung über Wurzeln, sondern ergibt sich, weil Definition 9.15 nur von der Zahl x abhängt, nicht von ihrer Darstellung als Bruch. Ab jetzt schreiben wir e^x und $\exp(x)$ gleichberechtigt.

Satz 9.17 (Rechenregeln). Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, $a^{-x} = 1/a^x = (1/a)^x$, $\ln(a^x) = x \ln a$.
2. $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig; für $a > 1$ streng wachsend, für $0 < a < 1$ streng fallend, für $a = 1$ konstant.
3. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto x^\alpha$ auf $(0, \infty)$ stetig; für $\alpha > 0$ streng wachsend, für $\alpha < 0$ streng fallend, für $\alpha = 0$ konstant gleich 1.

Beweis. (1) $\ln(a^x) = \ln\exp(x\ln a) = x\ln a$. Damit: $(a^x)^y = \exp(y\ln(a^x)) = \exp(xy\ln a) = a^{xy}$. Die übrigen Regeln folgen aus Satz 9.4 und Satz 9.13 (1), etwa $(ab)^x = \exp(x\ln a + x\ln b) = a^x b^x$.

(2) und (3): $x \mapsto x\ln a$ ist stetig und für $\ln a > 0$, also $a > 1$, streng wachsend, für $a < 1$ streng fallend, für $a = 1$ konstant 0; exp ist stetig und streng wachsend. Ebenso ist $x \mapsto \alpha\ln x$ stetig und je nach Vorzeichen von α streng wachsend, streng fallend oder konstant 0. Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig (Satz 7.11), und die Monotonie überträgt sich auf die Verkettung; $\exp(0) = 1$. □

Für $\alpha > 0$ gilt $x^\alpha \to 0$ für $x \to 0+$: Zu $\varepsilon > 0$ ist $x^\alpha < \varepsilon$ für $0 < x < \varepsilon^{1/\alpha}$, nach (3). Man setzt deshalb $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ und erhält eine stetige Funktion auf $[0,\infty)$. Die Festlegung $0^0 = 1$ aus Einheit 1 bleibt bestehen. Für negative Basen wird a^x nicht erklärt; (G3) zeigt, warum.

Bemerkung (Reichweite). Definition 9.15 erklärt a^x für Basen $a > 0$ und reelle Exponenten. Dieselbe Formel $a^z = \exp(z\ln a)$ ist für $a > 0$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ sinnvoll; nach Satz 9.4 gilt dann $a^{z+w} = a^z a^w$, und nach Satz 9.21 (5) ist $|a^z| = a^{\mathrm{Re}\,z}$. Für komplexe Basen müsste man $\ln a$ durch eine Lösung w von $\exp(w) = a$ ersetzen; die ist nur bis auf ein Element von $2\pi i\mathbb{Z}$ bestimmt (Satz 9.35), und die Potenz hinge von dieser Wahl ab. Komplexe Basen werden hier nicht erklärt.

Damit ist die erste Hälfte der Leitfrage beantwortet: $2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln 2)$. Wegen $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ und Satz 9.17 (2) ist $2^{1{,}41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}42}$, und die Schranken sind Wurzelausdrücke im Sinn von Satz 9.16; Beispiel 4 in Abschnitt 9.9 rechnet $2{,}6 < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}7$ aus. Der nächste Satz zeigt, dass Funktionalgleichung und Stetigkeit die Funktion $x \mapsto a^x$ schon festlegen.

Satz 9.18 (Charakterisierung durch die Funktionalgleichung). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, nicht identisch null, mit

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $a = f(1) > 0$ und $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweisidee. Die Funktionalgleichung legt f auf den rationalen Zahlen fest; die Stetigkeit überträgt die Werte auf alle reellen Zahlen, weil $\mathbb{Q}$ dicht liegt.

Beweis. Gäbe es x_0 mit $f(x_0) = 0$, so wäre $f(x) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$ für alle x. Also ist $f(x) \neq 0$ für alle x, und $f(x) = f(x/2)^2 > 0$. Aus $f(0) = f(0)^2$ und $f(0) \neq 0$ folgt $f(0) = 1$, also $f(-x) = 1/f(x)$. Durch Induktion folgt $f(nx) = f(x)^n$ für $n \in \mathbb{N}$, mit $f(0) = 1$ und $f(-x) = 1/f(x)$ dann für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Sei $r = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(r)^q = f(qr) = f(p) = f(1)^p = a^p$, also ist $f(r)$ eine positive q-te Wurzel von a^p. Nach Satz 9.16 (1) und Satz 9.17 (1) ist auch $a^r > 0$ eine solche, denn $(a^r)^q = a^{rq} = a^p$; nach Satz 2.39 ist $f(r) = a^r$.

Sei schließlich $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 2.31 gibt es rationale r_n mit $|r_n - x| < 1/n$. Nach dem Folgenkriterium (Satz 7.10), angewandt auf f und auf $t \mapsto a^t$, ist $f(x) = \lim f(r_n) = \lim a^{r_n} = a^x$. □

Der letzte Absatz des Beweises zeigt insbesondere: Eine stetige Funktion, die auf $\mathbb{Q}$ mit $r \mapsto a^r$ übereinstimmt, ist $x \mapsto a^x$. Ohne Stetigkeit ist der Satz falsch, aber das Gegenbeispiel ist nicht explizit angebbar; siehe (G2). In Aufgabe V1 wird gezeigt, dass Stetigkeit in einem einzigen Punkt genügt.

Satz 9.19 (Logarithmus gegen Potenz). Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty, \qquad\qquad x^\alpha \ln x \to 0 \quad \text{für } x \to 0+.$$

Beweis. Für $x \geq 1$ ist nach Satz 9.13 und Satz 9.17

$$0 \leq \ln x = \frac{2}{\alpha} \ln\bigl(x^{\alpha/2}\bigr) \leq \frac{2}{\alpha}\bigl(x^{\alpha/2} - 1\bigr) < \frac{2}{\alpha} x^{\alpha/2},$$

also $0 \leq \ln x / x^\alpha < \frac{2}{\alpha} x^{-\alpha/2}$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $K = \max\bigl\{1, (2/(\alpha\varepsilon))^{2/\alpha}\bigr\}$. Für $x > K$ ist $x^{\alpha/2} > 2/(\alpha\varepsilon)$ nach Satz 9.17 (1) und (3), also $0 \leq \ln x / x^\alpha < \varepsilon$. Für die zweite Aussage sei $0 < x < 1/K$ und $t = 1/x$. Dann ist $t > K$ und $x^\alpha \ln x = -\ln t / t^\alpha$, also $|x^\alpha \ln x| < \varepsilon$. □

Der Logarithmus wächst also langsamer als jede noch so kleine positive Potenz. Zusammen mit Satz 9.11 ergibt sich eine Rangfolge: Logarithmus, Potenzen, Exponentialfunktion.

9.5 Kosinus und Sinus

Auf der reellen Achse liefert die Exponentialreihe eine wachsende Funktion. Auf der imaginären Achse verhält sie sich völlig anders: Die Werte $\exp(ix)$ haben alle den Betrag 1, und Real- und Imaginärteil schwingen.

Warum gerade $\exp(ix)$? Angenommen, man kennt Kosinus und Sinus aus der Schule samt ihren Additionstheoremen und setzt $E(x) = \cos x + i \sin x$. Multipliziert man $E(x)E(y)$ aus, so sind Real- und Imaginärteil genau die rechten Seiten der Additionstheoreme; diese besagen also $E(x+y) = E(x)E(y)$. Das ist die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Ferner ist $E(x)$ für kleine x ungefähr $1+ix$, und auch $x \mapsto \exp(ix)$ hat beide Eigenschaften (Satz 9.4, Satz 9.6). Das ist kein Beweis, denn die Schulerklärung steht hier nicht zur Verfügung; es ist der Grund, die Definition so zu wählen. Alles Weitere wird aus der Definition bewiesen.

Definition 9.20. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\cos x = \operatorname{Re} \exp(ix), \qquad \sin x = \operatorname{Im} \exp(ix), \qquad \text{also} \qquad \exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Die letzte Gleichung heißt *Eulersche Formel*. Sie ist hier keine Entdeckung, sondern die Definition; was es zu beweisen gibt, sind die Eigenschaften, die man von Kosinus und Sinus erwartet.

Satz 9.21. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|\exp(ix)| = 1$, also $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $|\cos x| \le 1$ und $|\sin x| \le 1$.
2. $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.
3. $\cos x = \dfrac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$ und $\sin x = \dfrac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$.
4. $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ und $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, beide Reihen absolut konvergent.
5. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(z)| = e^x$.

Beweis. Nach Folgerung 9.5 (3) ist $\overline{\exp(ix)} = \exp(\overline{ix}) = \exp(-ix)$.

(1) $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = 1$, und $|\exp(ix)|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

(2) Aus $\exp(-ix) = \overline{\exp(ix)} = \cos x - i \sin x$ und der Definition für $-x$. Ferner $\exp(0) = 1$.

(3) Nach Satz 3.6 (2) ist $u + \bar{u} = 2 \operatorname{Re} u$ und $u - \bar{u} = 2i \operatorname{Im} u$; man setze $u = \exp(ix)$.

(4) Die Potenzen von i sind $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = (-1)^k i$. Die Partialsumme $s_{2m+1}(ix)$ der Exponentialreihe zerfällt deshalb in

$$s_{2m+1}(ix) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Die Folge $(s_{2m+1}(ix))_m$ ist eine Teilfolge der Partialsummen und strebt gegen $\exp(ix)$ (Satz 4.24); nach Satz 4.5 streben die beiden Summen gegen $\cos x$ und $\sin x$. Absolute Konvergenz: Beide Reihen haben die Majorante $\sum |x|^n/n!$.

(5) $\exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy)$, $|\exp(iy)| = 1$ und $\exp(x) = e^x > 0$. □

Geometrisch heißt (1): Der Punkt $\exp(ix)$ liegt auf dem Einheitskreis. Dass x dabei die Länge des durchlaufenen Bogens ist, setzt den Begriff der Bogenlänge voraus, der über diesen Kurs hinausgeht. Einheit 13 verbindet die Definition stattdessen mit der Fläche des Kreises.

Satz 9.22 (Additionstheoreme). Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Insbesondere ist $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ und $\sin 2x =$

$2 \sin x \cos x$, und für $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ gilt

$$\cos x - \cos y = -2 \sin u \, \sin v, \qquad \sin x - \sin y = 2 \cos u \, \sin v.$$

Beweis. Nach Satz 9.4 ist $\exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)$, also

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y).$$

Man vergleiche Real- und Imaginärteil. Die Formeln für $2x$ folgen mit $y = x$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Für die Differenzen schreibe man $x = u + v$, $y = u - v$ und wende die Additionstheoreme auf $\cos(u \pm v)$ und $\sin(u \pm v)$ an, mit $\cos(-v) = \cos v$, $\sin(-v) = -\sin v$: Es bleibt $\cos(u+v) - \cos(u-v) = -2 \sin u \sin v$ und $\sin(u+v) - \sin(u-v) = 2 \cos u \sin v$. □

Die Additionstheoreme sind die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, in Real- und Imaginärteil zerlegt. Die Differenzformeln sind das Werkzeug für Monotonie und Stetigkeit.

Um Vorzeichen von sin und cos zu bestimmen, braucht man Abschätzungen. Die Reihen haben wechselnde Vorzeichen; für solche Reihen liegt der Wert nach dem Leibniz-Kriterium zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen, sobald die Beträge der Glieder monoton gegen 0 fallen.

Lemma 9.23 (strikte Fehlerabschätzung für alternierende Reihen). Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine streng monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_k \to 0$, sei $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$s_{2m+1} < s < s_{2m}.$$

Beweis. Nach Satz 6.16 konvergiert die Reihe, und s liegt zwischen s_{2m+2} und s_{2m+3}. Die Folge fällt streng gegen 0, also ist $a_k > a_{k+1} \geq 0$ (Satz 4.10) und insbesondere $a_{2m+3} > 0$; damit ist $s_{2m+3} = s_{2m+2} - a_{2m+3} < s_{2m+2}$, das heißt $s_{2m+3} \leq s \leq s_{2m+2}$. Ferner ist $s_{2m+2} = s_{2m} - (a_{2m+1} - a_{2m+2}) < s_{2m}$ und $s_{2m+3} = s_{2m+1} + (a_{2m+2} - a_{2m+3}) > s_{2m+1}$. □

Das Lemma verschärft die Fehlerabschätzung aus Satz 6.16, nach der s zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen liegt: Fallen die a_k streng, so sind die Ungleichungen streng. Gebraucht wird das in Folgerung 9.25 (1): Erst die strenge Ungleichung $\sin t < t$ zeigt, dass Gleichheit nur für $t = 0$ eintritt. Ohne die Monotonie der a_k ist die Aussage falsch, selbst bei absoluter Konvergenz (G7).

Satz 9.24 (Abschätzungen auf $(0, 2]$). Seien

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

die Partialsummen der Sinus- und der Kosinusreihe. Für $0 < x \le 2$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$S_{2m+1}(x) < \sin x < S_{2m}(x), \qquad C_{2m+1}(x) < \cos x < C_{2m+2}(x).$$

Insbesondere gilt für $0 < x \le 2$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \qquad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

und $\sin x > 0$.

Beweis. Sinus: Für $a_k = x^{2k+1}/(2k+1)!$ ist $a_{k+1}/a_k = x^2/((2k+2)(2k+3)) \le 4/6 < 1$, die Folge fällt also streng. Als Beträge der Glieder der konvergenten Sinusreihe (Satz 9.21 (4)) bilden die a_k eine Nullfolge (Folgerung 6.5), und Lemma 9.23 liefert die Behauptung. Kosinus: Hier fallen die Beträge der Glieder nicht von Anfang an (für $x = 2$ ist $x^2/2 = 2 > 1$). Man trennt deshalb das erste Glied ab:

$$1 - \cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j b_j, \qquad b_j = \frac{x^{2j+2}}{(2j+2)!}.$$

Wegen $b_{j+1}/b_j = x^2/((2j+3)(2j+4)) \le 4/12 < 1$ fallen die b_j streng, und als Beträge von Gliedern der Kosinusreihe gehen sie gegen 0 (Folgerung 6.5). Lemma 9.23 liefert also für die Partialsummen $T_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j b_j$ die Ungleichung $T_{2m+1} < 1 - \cos x < T_{2m}$. Wegen $1 - T_n = C_{n+1}(x)$ ist das $C_{2m+1}(x) < \cos x < C_{2m+2}(x)$. Die im Satz hervorgehobenen Ungleichungen sind der Fall $m = 0$. Wegen $x^2 \le 4 < 6$ ist $x - \frac{x^3}{6} = \frac{x(6-x^2)}{6} > 0$, also $\sin x > 0$. □

Folgerung 9.25.

1. $|\sin t| \le |t|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, mit Gleichheit nur für $t = 0$.
2. $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$ und $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$; insbesondere sind cos und sin auf $\mathbb{R}$ stetig.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Beweis. (1) Für $0 < t \le 2$ ist $\sin t < t$ und $\sin t > 0$ nach Satz 9.24; für $t > 2$ ist $|\sin t| \le 1 < t$. Für negative t folgt die Aussage, weil sin ungerade ist.

(2) Nach Satz 9.22 und (1) ist $|\cos x - \cos y| = 2|\sin u|\,|\sin v| \le 2 \cdot 1 \cdot |v| = |x - y|$, ebenso für den Sinus mit $|\cos u| \le 1$.

(3) Für $0 < |x| \le 2$ ist nach Satz 9.24 (für negative x wegen der Symmetrie)

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2},$$

und die Einschließung liefert die Grenzwerte. □

9.6 Die Zahl π

Jetzt wird π gefunden, ohne dass von Kreisen die Rede ist. In der Schulgeometrie ist $\frac{\pi}{2}$ der Winkel einer Vierteldrehung; dort hat der Punkt auf dem Einheitskreis den Realteil 0, und der Kosinus hat seine erste positive Nullstelle. Diese Eigenschaft lässt sich ohne Kreisbogen aussprechen und wird deshalb zur Definition. Der Kosinus beginnt bei $\cos 0 = 1$; Satz 9.24 zeigt, dass er bei $\frac{8}{5}$ schon negativ ist. Dazwischen liegt nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, und der folgende Satz zeigt, dass es genau eine ist.

Satz 9.26. Der Kosinus ist auf $[0,2]$ streng fallend, und er hat in $[0,2]$ genau eine Nullstelle ξ. Es gilt $1{,}5 < \xi < 1{,}6$.

Beweis. Monotonie: Seien $0 \le y < x \le 2$, $u = \frac{x+y}{2} \in (0,2]$, $v = \frac{x-y}{2} \in (0,1]$. Nach Satz 9.24 ist $\sin u > 0$ und $\sin v > 0$, nach Satz 9.22 also $\cos x - \cos y = -2 \sin u \sin v < 0$.

Existenz und Lage: Nach Satz 9.24 mit $m = 1$ beziehungsweise $m = 0$ ist

$$\cos\tfrac{3}{2} > C_3\big(\tfrac{3}{2}\big) = 1 - \frac{9}{8} + \frac{81}{384} - \frac{729}{46080} = \frac{359}{5120} > 0,$$

$$\cos\tfrac{8}{5} < C_2\big(\tfrac{8}{5}\big) = 1 - \frac{32}{25} + \frac{4096}{15000} = -\frac{13}{1875} < 0.$$

Der Kosinus ist stetig (Folgerung 9.25); nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) hat er eine Nullstelle ξ mit $\frac{3}{2} < \xi < \frac{8}{5}$. Wegen der strengen Monotonie hat er in $[0,2]$ keine weitere. □

Definition 9.27. $\pi = 2\xi$, wobei ξ die Nullstelle des Kosinus in $[0,2]$ aus Satz 9.26 ist.

Es ist also $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $3 < \pi < 3{,}2$. Weil cos auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng fällt, ist $\cos x > 0$ für $0 \le x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ ist demnach die *kleinste positive Nullstelle des Kosinus*. Genauere Schranken folgen in Abschnitt 9.9. Dass π die vertraute Kreiszahl ist, zeigt Einheit 13 über die Fläche: Der Einheitskreis hat die Fläche π.

Satz 9.28 (Spezielle Werte und Verschiebungen). (1) Es ist $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, also $\exp\big(i\frac{\pi}{2}\big) = i$, ferner $\exp(i\pi) = -1$ und $\exp(2\pi i) = 1$.

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = -\sin x, \qquad \sin\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = \cos x, \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x, \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x,$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \sin x, \qquad \sin\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) = \cos x.$$

(3) Es ist $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. (1) $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1-\cos^2\frac{\pi}{2} = 1$, und wegen $0 < \frac{\pi}{2} \le 2$ ist $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ (Satz 9.24). Also $\exp(i\frac{\pi}{2}) = 0 + i\cdot 1 = i$, und nach Folgerung 9.5 (2) $\exp(i\pi) = i^2 = -1$, $\exp(2\pi i) = i^4 = 1$.

(2) Nach Satz 9.4 ist $\exp(i(x+\frac{\pi}{2})) = i\exp(ix) = -\sin x + i\cos x$; Real- und Imaginärteil vergleichen. Ebenso mit dem Faktor $\exp(i\pi) = -1$ und $\exp(2\pi i) = 1$. Die letzten beiden Formeln: $\sin x = \sin\big((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\big) = \cos(x-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)$, und $\cos x = \cos\big((x-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}\big) = -\sin(x-\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$.

(3) Satz 9.4 und (1). □

Die Gleichung $\exp(i\pi) = -1$ verbindet e, i und π. Nach der hier gewählten Definition ist sie eine kurze Folgerung; ihr Gehalt steckt darin, dass das so definierte π die Kreiszahl ist.

Satz 9.29 (Nullstellen und Perioden).

1. $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$, und $\cos x > 0$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
2. $\sin x = 0$ genau dann, wenn $x \in \pi\mathbb{Z}$; $\cos x = 0$ genau dann, wenn $x \in \frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$; $\exp(ix) = 1$ genau dann, wenn $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
3. Für $p \in \mathbb{R}$ sind gleichwertig: (a) $\cos(x+p) = \cos x$ für alle x; (b) $\sin(x+p) = \sin x$ für alle x; (c) $\exp(i(x+p)) = \exp(ix)$ für alle x; (d) $p \in 2\pi\mathbb{Z}$. Insbesondere ist 2π die kleinste positive Periode von cos, sin und $x \mapsto \exp(ix)$.
4. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) = \exp(w)$ genau dann, wenn $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis. (1) Für $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ ist $x \le 2$, also $\sin x > 0$ nach Satz 9.24. Für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ist $\sin x = \cos(x-\frac{\pi}{2})$ nach Satz 9.28 (2), und $0 < x-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, also $\sin x > 0$, weil cos auf $[0, \frac{\pi}{2})$ positiv ist (Absatz nach Definition 9.27). Der Kosinus ist gerade und auf $[0, \frac{\pi}{2})$ positiv, also auf ganz $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \le x/\pi < k+1$ (Lemma 2.30); dann ist $r = x - k\pi \in [0, \pi)$. Aus $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$ folgt durch Induktion $\sin x = (-1)^k \sin r$, und nach (1) ist $\sin r = 0$ genau für $r = 0$. Also ist $\sin x = 0$ genau für $x \in \pi\mathbb{Z}$. Wegen $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ ist $\cos x = 0$ genau für $x+\frac{\pi}{2} \in \pi\mathbb{Z}$. Schließlich ist $\exp(ix) = 1$ gleichwertig mit $\sin x = 0$ und $\cos x = 1$, also mit $x = k\pi$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k = 1$, das heißt mit k gerade.

(3) (d)⇒(a),(b),(c): Satz 9.28. (c)⇒(d): Mit $x = 0$ folgt $\exp(ip) = 1$, nach (2) also $p \in 2\pi\mathbb{Z}$. (a)⇒(d): Mit $x = 0$ folgt $\cos p = 1$, wegen $\cos^2 p + \sin^2 p = 1$ also $\sin p = 0$ und $\exp(ip) = 1$. (b)⇒(d): Mit $x = \frac{\pi}{2}$ folgt $\cos p = \sin(\frac{\pi}{2}+p) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, und weiter wie eben.

(4) $\exp(z) = \exp(w)$ ist nach Folgerung 9.5 gleichwertig mit $\exp(z-w) = 1$. Sei $z - w = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Aus $\exp(a+ib) = 1$ folgt nach Satz 9.21 (5) $e^a = 1$, also $a = 0$, und dann $\exp(ib) = 1$, also $b \in 2\pi\mathbb{Z}$ nach (2). Die Umkehrung ist Satz 9.28 (3). □

Die Periodizität ist damit aus der Funktionalgleichung gewonnen: $x \mapsto \exp(ix)$ ist periodisch, weil der Wert 1 an der Stelle 2π wieder angenommen wird, und Satz 9.4 trägt das auf jede Stelle weiter. Die reelle Exponentialfunktion ist dagegen injektiv. Erst im Komplexen zeigt sich, dass beide Verhaltensweisen dieselbe Funktion sind.

Satz 9.30 (Monotonie und Umkehrfunktionen). Der Kosinus ist auf $[0,\pi]$ streng fallend mit $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$; der Sinus ist auf $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ streng wachsend mit $\sin([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$. Die Umkehrfunktionen

$$\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi], \qquad \arcsin\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

sind stetig, arccos streng fallend, arcsin streng wachsend.

Beweis. Seien $0 \le y < x \le \pi$, $u = \frac{x+y}{2} \in (0,\pi)$, $v = \frac{x-y}{2} \in (0,\frac{\pi}{2}]$. Nach Satz 9.29 (1) sind $\sin u$ und $\sin v$ positiv, nach Satz 9.22 also $\cos x < \cos y$. Seien $-\frac{\pi}{2} \le y < x \le \frac{\pi}{2}$, $u = \frac{x+y}{2} \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $v \in (0,\frac{\pi}{2}]$. Dann ist $\cos u > 0$ und $\sin v > 0$, also $\sin x - \sin y = 2\cos u \sin v > 0$. Die Bilder: $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$; nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) wird jeder Wert in $[-1,1]$ angenommen, und nach Satz 9.21 (1) kein anderer. Der Rest ist Satz 7.26. □

Satz 9.31 (Tangens). Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ sei $\tan x = \sin x/\cos x$. Dann ist $\tan(x+\pi) = \tan x$, und tan ist auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ stetig, streng wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ist stetig und streng wachsend.

Beweis. Nach Satz 9.29 (2) ist der Nenner außerhalb von $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ nicht null; Stetigkeit folgt aus der von sin und cos (Satz 7.11). Die Periode π: Zähler und Nenner wechseln beide das Vorzeichen (Satz 9.28). Monotonie: Für $-\frac{\pi}{2} < y < x < \frac{\pi}{2}$ ist nach Satz 9.22

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin x\cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} > 0,$$

denn $x - y \in (0,\pi)$ und $\cos x, \cos y > 0$. Unbeschränktheit: Für $n \in \mathbb{N}$ liegt $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ in $(0,\frac{\pi}{2})$, weil $\frac{\pi}{2} > 1$. Nach Satz 9.28 und Satz 9.24 ist $\cos x_n = \sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ und $\sin x_n = \cos\frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{2n^2} \ge \frac{1}{2}$, also $\tan x_n > \frac{n}{2}$. Da tan ungerade ist, ist $\tan(-x_n) < -\frac{n}{2}$. Nach dem Zwischenwertsatz auf $[-x_n, x_n]$ wird jeder Wert zwischen $-\frac{n}{2}$ und $\frac{n}{2}$ angenommen, für $n \to \infty$ also jeder reelle Wert. Der Rest ist Satz 7.26. □

9.7 Polardarstellung und komplexer Logarithmus

Einheit 3 hat die Polardarstellung komplexer Zahlen im Vorgriff mitgeteilt (Abschnitt 3.6). Jetzt kann sie bewiesen werden.

Satz 9.32 (Polardarstellung). Zu jedem $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$z = |z| \exp(i\varphi).$$

Für $\psi \in \mathbb{R}$ gilt $z = |z| \exp(i\psi)$ genau dann, wenn $\psi - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Jedes solche ψ heißt *ein Argument* von z (wie in Abschnitt 3.6); das eindeutige $\varphi \in (-\pi, \pi]$ heißt *Hauptwert des Arguments* und wird mit $\arg z$ bezeichnet. Für $z = 0$ ist kein Argument erklärt.

Beweisidee. $w = z/|z|$ liegt auf dem Einheitskreis. Der Realteil von w bestimmt den Winkel bis auf das Vorzeichen über den Arkuskosinus; das Vorzeichen des Imaginärteils entscheidet.

Beweis. Sei $w = z/|z| = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$; dann ist $u^2 + v^2 = 1$, also $u \in [-1, 1]$. Sei $\alpha = \arccos u \in [0, \pi]$. Nach Satz 9.29 (1) und $\sin 0 = \sin \pi = 0$ ist $\sin \alpha \geq 0$, und $\sin^2 \alpha = 1 - u^2 = v^2$; also $\sin \alpha = |v|$. Ist $v \geq 0$, so setze $\varphi = \alpha$; dann ist $\exp(i\varphi) = u + i|v| = w$. Ist $v < 0$, so ist $u^2 < 1$, also $\alpha \in (0, \pi)$; setze $\varphi = -\alpha \in (-\pi, 0)$, dann ist $\exp(i\varphi) = u - i|v| = w$. In beiden Fällen ist $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Für $\psi \in \mathbb{R}$ ist $|z| \exp(i\psi) = |z| \exp(i\varphi)$ gleichwertig mit $\exp(i(\psi - \varphi)) = 1$, nach Satz 9.29 (2) also mit $\psi - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Zwei Zahlen in $(-\pi, \pi]$ unterscheiden sich um weniger als 2π; liegt ihre Differenz in $2\pi\mathbb{Z}$, so ist sie null. Das zeigt die Eindeutigkeit. □

Folgerung 9.33.

1. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv: $z = \exp(\ln |z| + i \arg z)$.
2. Für $z = |z| \exp(i\varphi)$ und $w = |w| \exp(i\psi)$ ist $zw = |z|\,|w| \exp(i(\varphi + \psi))$: Beim Multiplizieren multiplizieren sich die Beträge, und die Argumente addieren sich bis auf ein Vielfaches von 2π.
3. Für $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = 1$ genau die n verschiedenen Lösungen $\zeta_k = \exp(2\pi i k/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (die *n-ten Einheitswurzeln*). Mit $\zeta = \zeta_1$ ist $\zeta_k = \zeta^k$.
4. (*Formel von de Moivre*) Für $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$.
5. Für $n \in \mathbb{N}$ und $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau die n verschiedenen Lösungen $z_0\zeta^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, mit $z_0 = \sqrt[n]{|w|}\, \exp\left(\frac{i \arg w}{n}\right)$; ausgeschrieben ist $z_0\zeta^k = \sqrt[n]{|w|}\, \exp\left(i\, \frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)$.

Beweis. (1) Satz 9.32 und $\exp(\ln|z|) = |z|$. (2) Satz 9.4.

(3) Nach Folgerung 9.5 (2) ist $\zeta_k^n = \exp(2\pi i k) = 1$ und $\zeta_k = \exp(2\pi i/n)^k = \zeta^k$. Ist $\zeta_k = \zeta_l$, so ist $2\pi i(k-l)/n \in 2\pi i\mathbb{Z}$ nach Satz 9.29 (4), also $n \mid k-l$ und wegen $|k-l| < n$ dann $k = l$. Sei umgekehrt $z^n = 1$. Dann ist $|z|^n = |z^n| = 1$ (Folgerung 3.23), also $|z| = 1$ (Eindeutigkeit in Satz 2.39), und $z = \exp(i\varphi)$ nach Satz 9.32. Aus $\exp(in\varphi) = z^n = 1$ folgt $n\varphi = 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Schreibt man $m = qn + k$ mit $q = \lfloor m/n \rfloor$ (Lemma 2.30) und $0 \le k < n$, so ist $z = \exp(2\pi i q)\exp(2\pi i k/n) = \zeta_k$.

(4) Nach Definition 9.20 und Folgerung 9.5 (2) ist $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \exp(i\varphi)^n = \exp(in\varphi) = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

(5) Nach Satz 2.39, Folgerung 9.5 (2) und Satz 9.32 ist $z_0^n = \left(\sqrt[n]{|w|}\right)^n \exp(i\arg w) = |w|\exp(i\arg w) = w$, insbesondere $z_0 \neq 0$. Für jedes k ist $(z_0\zeta^k)^n = z_0^n(\zeta^n)^k = w$. Ist umgekehrt $z^n = w$, so ist $(z/z_0)^n = 1$, nach (3) also $z/z_0 = \zeta^k$ für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Die n Zahlen $z_0\zeta^k$ sind verschieden, weil die ζ^k es sind und $z_0 \neq 0$ ist. Die ausgeschriebene Form folgt aus Satz 9.4. □

Nach (5) hat jede komplexe Zahl $w \neq 0$ genau n verschiedene n-te Wurzeln; für $w = 0$ ist $z = 0$ die einzige Lösung, weil $\mathbb{C}$ nullteilerfrei ist (Lemma 2.2). Die Lösungen liegen auf dem Kreis um 0 vom Radius $\sqrt[n]{|w|}$, je um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gegeneinander gedreht. Damit ist der Vorgriff aus Abschnitt 3.6 vollständig eingelöst: So erhält man zu der dritten Wurzel $2+i$ von $2+11i$ aus der Leitfrage von Einheit 3 die beiden anderen als $(2+i)\zeta$ und $(2+i)\zeta^2$ mit $\zeta = \exp(2\pi i/3)$. Wie bei den Quadratwurzeln in Einheit 3 zeichnet keine Rechenregel eine der n Lösungen aus; die Wahl von z_0 über den Hauptwert $\arg w$ ist eine Konvention, und sie springt auf der negativen reellen Achse, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 9.34 (Hauptwert des Arguments).

1. Für $z \neq 0$ ist $\arg z = \arccos\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$, falls $\operatorname{Im} z \ge 0$, und $\arg z = -\arccos\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$, falls $\operatorname{Im} z < 0$.
2. Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist $|z| + \operatorname{Re} z > 0$, $\arg z \in (-\pi, \pi)$ und $\arg z = 2\arctan\dfrac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z}$. Insbesondere ist arg auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ stetig.
3. Für $a < 0$ gilt $\arg(a+ib) \to \pi$ für $b \to 0+$ und $\arg(a+ib) \to -\pi$ für $b \to 0-$. Wegen $\arg a = \pi$ ist arg in keinem Punkt von $(-\infty, 0)$ stetig.

Beweisidee. (1) ist die Konstruktion im Beweis von Satz 9.32. Für (2) drückt man das Argument durch den halben Winkel aus, der in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ liegt, wo der Arkustangens umkehrt. Für (3) nähert man sich der negativen Achse von oben und von unten.

Beweis. (1) Das im Beweis von Satz 9.32 konstruierte φ liegt in $(-\pi, \pi]$, ist also $\arg z$; es ist $\arccos u$ für $v \ge 0$ und $-\arccos u$ für $v < 0$, mit $u + iv = z/|z|$.

(2) Ist $\operatorname{Im} z \neq 0$, so ist $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > (\operatorname{Re} z)^2$, nach Lemma 3.8 also $|z| >$

$|\operatorname{Re} z| \geq -\operatorname{Re} z$. Ist $\operatorname{Im} z = 0$, so ist $z > 0$ nach Voraussetzung und $|z| + \operatorname{Re} z = 2z > 0$. Sei $\varphi = \arg z$. Wäre $\varphi = \pi$, so wäre $z = |z| \exp(i\pi) = -|z| \in (-\infty, 0)$; also ist $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und $\frac{\varphi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, nach Satz 9.29 (1) also $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$. Mit $z/|z| = \cos\varphi + i \sin\varphi$ und den Formeln für den doppelten Winkel (Satz 9.22 mit $x = \frac{\varphi}{2}$) ist

$$\frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z} = \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{2 \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \tan\frac{\varphi}{2}.$$

Da $\frac{\varphi}{2}$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ liegt, ist $\frac{\varphi}{2} = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z}$ (Satz 9.31). Stetigkeit: Die Funktionen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ sind auf $\mathbb{C}$ stetig, denn $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z_0|$, $|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_0|$ und $||z| - |z_0||$ sind nach Satz 3.9 (3) und Satz 3.10 höchstens $|z - z_0|$. Der Nenner verschwindet auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ nicht, und arctan ist stetig. Satz 7.11 in der Lesart der Bemerkung nach Folgerung 7.12 (Quotient und Verkettung) liefert die Stetigkeit von arg.

(3) Für $b \neq 0$ ist $\arg(a + ib) = \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ nach (1), mit dem Vorzeichen von b. Für $b \to 0$ strebt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gegen $\frac{a}{|a|} = -1$, weil die Wurzel stetig ist (Folgerung 7.27, Satz 7.11). arccos ist auf $[-1, 1]$ stetig mit $\arccos(-1) = \pi$ (Satz 9.30, $\cos\pi = -1$). Das gibt die beiden einseitigen Grenzwerte. Ferner ist $a = |a| \exp(i\pi)$, also $\arg a = \pi$. Für $b_n = -\frac{1}{n}$ gilt $a + ib_n \to a$, aber $\arg(a + ib_n) \to -\pi \neq \arg a$; nach dem Folgenkriterium ist arg in a nicht stetig. □

Für $|z| = 1$ ist $\frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z}$ genau der Parameter t aus Satz 3.18. Die rationale Parametrisierung des Einheitskreises ist also die Parametrisierung durch $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, den Tangens des halben Winkels; der ausgelassene Punkt -1 entspricht $\varphi = \pi$, wo der halbe Winkel $\frac{\pi}{2}$ keinen Tangens hat. Dass sich auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ überhaupt kein stetiges Argument wählen lässt, wird hier nicht bewiesen.

Die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{C}$ nicht injektiv (Satz 9.29 (4)); eine Umkehrfunktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es deshalb nicht. Man wählt unter den Lösungen von $\exp(w) = z$ eine aus.

Satz 9.35 (komplexer Logarithmus). Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Die Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\exp(w) = z$ sind genau die Zahlen $\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
2. Genau eine dieser Lösungen hat einen Imaginärteil in $(-\pi, \pi]$, nämlich der *Hauptwert des Logarithmus* $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z$. Für reelles $z > 0$ ist $\operatorname{Log} z = \ln z$.
3. Log ist auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ stetig und in keinem Punkt von $(-\infty, 0)$ stetig.
4. Für $z, w \neq 0$ ist $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w + 2\pi i k$ mit einem $k \in \{-1, 0, 1\}$. Sind $\operatorname{Re} z > 0$ und $\operatorname{Re} w > 0$, so ist $k = 0$.

Beweis. (1) Nach Folgerung 9.33 (1) ist $\exp(\ln|z|+i\arg z) = z$, und nach Satz 9.29 (4) sind die Lösungen genau die Zahlen, die sich davon um ein Element von $2\pi i\mathbb{Z}$ unterscheiden.

(2) Die Imaginärteile der Lösungen sind $\arg z + 2\pi k$; davon liegt $\arg z$ in $(-\pi, \pi]$, und zwei Zahlen in diesem Intervall unterscheiden sich um weniger als 2π. Für $z > 0$ ist $z = z\exp(i \cdot 0)$, also $\arg z = 0$.

(3) $\operatorname{Re}\operatorname{Log} z = \ln|z|$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig (Verkettung stetiger Funktionen), und $\operatorname{Im}\operatorname{Log} z = \arg z$. Eine komplexwertige Funktion ist genau dann stetig, wenn Real- und Imaginärteil es sind (Bemerkung nach Folgerung 7.12). Satz 9.34 (2) und (3) geben die Behauptung.

(4) Nach Satz 9.4 ist $\exp(\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w) = zw = \exp(\operatorname{Log}(zw))$, nach Satz 9.29 (4) also $\operatorname{Log}(zw) - \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} w = 2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Der Imaginärteil gibt $2\pi k = \arg(zw) - \arg z - \arg w$. Hier liegt $\arg(zw)$ in $(-\pi, \pi]$ und $\arg z + \arg w$ in $(-2\pi, 2\pi]$, die Differenz also in $(-3\pi, 3\pi)$; das erzwingt $k \in \{-1, 0, 1\}$. Ist $\operatorname{Re} z > 0$, so ist $\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \in (0, 1]$ und nach Satz 9.34 (1) $|\arg z| = \arccos\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} < \frac{\pi}{2}$, weil $\arccos$ streng fällt und $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ist; ebenso für w. Dann liegt $\arg z + \arg w$ in $(-\pi, \pi)$, die Differenz in $(-2\pi, 2\pi)$, also ist $k = 0$. □

Alle drei Werte von k kommen vor: (G4) zeigt $k = -1$ für $z = w = -1$. Für $z = w = \exp(-\frac{3\pi i}{4})$ ist $\arg z = \arg w = -\frac{3\pi}{4}$ und $zw = \exp(-\frac{3\pi i}{2}) = i$, also $\arg(zw) = \frac{\pi}{2}$ und $2\pi k = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$, das heißt $k = 1$. Der Logarithmus erbt die Mehrdeutigkeit des Arguments; sein Sprung auf der negativen reellen Achse ist dieselbe Erscheinung wie bei der Wahl der Quadratwurzel in Einheit 3 (Bemerkung nach Satz 3.12).

9.8 Gegenbeispiele

(G1) Ausmultiplizieren ohne absolute Konvergenz. Der Beweis von Satz 9.4 stützt sich auf Satz 6.23 und damit auf die absolute Konvergenz beider Faktoren, die für die Exponentialreihe Satz 9.2 liefert. Entbehrlich ist sie nicht: Einheit 6, (G6), gibt zwei konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen an, deren Cauchy-Produkt divergiert, weil seine Glieder keine Nullfolge bilden.

(G2) Die Funktionalgleichung allein bestimmt die Funktion nicht. $f \equiv 0$ erfüllt $f(x + y) = f(x)f(y)$; deshalb schließt Satz 9.18 diese Funktion aus. Ohne die Stetigkeit gibt es weitere Lösungen: Es existieren unstetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ und $f(1) = 2$. Ihre Existenz wird hier nicht bewiesen; man konstruiert sie mit einer Basis von $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$, deren Existenz das Auswahlaxiom benutzt. Angeben kann man keine solche Funktion explizit. Nach Satz 9.18 und Aufgabe V1 ist jede solche Lösung in jedem Punkt unstetig.

(G3) Negative Basen. Erklärte man a^x für $a < 0$ über Wurzeln, so hinge der Wert von der Darstellung des Exponenten ab. -2 ist eine reelle dritte Wurzel von -8, also läge

„$(-8)^{1/3} = -2$“ nahe; mit $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ und der Regel $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ erhielte man dagegen $(-8)^{2/6} = \sqrt[6]{64} = 2$. Ebenso ist $\big((-1)^2\big)^{1/2} = 1$, aber $(-1)^{2\cdot\frac{1}{2}} = -1$; die Regel $(a^x)^y = a^{xy}$ aus Satz 9.17 gilt für negative Basen nicht. Definition 9.15 benutzt $\ln a$ und verlangt deshalb $a > 0$.

(G4) Kein Logarithmus auf $\mathbb{C}$ mit der reellen Rechenregel. Für den Hauptwert Log aus Satz 9.35 gilt $\exp(\operatorname{Log} z) = z$, aber

$$\operatorname{Log}\big((-1)\cdot(-1)\big) = \operatorname{Log} 1 = 0 \neq 2\pi i = \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(-1).$$

Im Beweis von Satz 9.13 (1) ging die Injektivität von exp auf $\mathbb{R}$ ein; auf $\mathbb{C}$ fehlt sie. Satz 9.35 (4) zeigt, dass der Fehler stets ein Vielfaches $2\pi ik$ mit $|k| \leq 1$ ist. Auch kein anderer Logarithmus erfüllt die Regel. Sei $L : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $\exp(L(z)) = z$ und $L(zw) = L(z)+L(w)$ für alle $z, w \neq 0$. Aus $L(1) = L(1\cdot 1) = 2L(1)$ folgt $L(1) = 0$. Aus $2L(-1) = L\big((-1)(-1)\big) = L(1) = 0$ folgt $L(-1) = 0$, also $-1 = \exp(L(-1)) = \exp(0) = 1$, ein Widerspruch.

(G5) Kosinus und Sinus sind nur auf $\mathbb{R}$ beschränkt. Die Formeln aus Satz 9.21 (3) erklären $\cos z$ und $\sin z$ auch für komplexe z. Für $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ ist

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}}{(2k)!} \geq 1 + \frac{y^2}{2},$$

also unbeschränkt. Die Schranke $|\cos x| \leq 1$ beruht auf $|\exp(ix)| = 1$, und das gilt nur für reelle x. Die Gleichung $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ bleibt im Komplexen richtig (Aufgabe V5); sie erzwingt die Beschränktheit nur, wenn beide Summanden nichtnegativ sind.

(G6) Ohne Vollständigkeit keine Exponentialfunktion. Die Partialsummen $s_n(1)$ sind rational und bilden eine Cauchy-Folge, ihr Grenzwert e ist irrational (Satz 4.21 und die Bemerkung danach). In $\mathbb{Q}$ existiert $\exp(1)$ also nicht. Ebenso braucht die Existenz von $\ln y$ und von π den Zwischenwertsatz und damit die Vollständigkeit. Dass der Kosinus auf $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle hat, ist die Irrationalität von π (Lambert); sie wird in diesem Kurs nicht bewiesen.

(G7) Alternierende Restabschätzung ohne Monotonie. Für $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$ und $a_k = 2^{-k}$ für $k \geq 3$ sind alle a_k positiv, $a_k \to 0$, und $\sum(-1)^k a_k$ konvergiert absolut, mit

$$s = 1 - \frac{1}{2} + 1 + \sum_{k=3}^{\infty}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} > 1 = s_0.$$

Die Abschätzung $s < s_0$ aus Lemma 9.23 ist verletzt. Deshalb beschränkt sich Satz 9.24 auf $(0, 2]$. Dort fallen die Beträge der Glieder der Sinusreihe und, nach Abtrennen des ersten Glieds, die der Kosinusreihe. Für $x = 4$ wachsen die Glieder der Kosinusreihe zunächst $(1, 8, \frac{32}{3}, \ldots)$, und das Lemma ist nicht anwendbar.

9.9 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (die Zahl e auf sechs Stellen). Die Partialsumme ist

$$s_9(1) = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} = \frac{98641}{36288} = 2{,}71828152\ldots,$$

und nach Satz 4.20 ist $0 < e - s_9(1) \le \frac{1}{9!\cdot 9} < 3{,}1 \cdot 10^{-7}$. Also gilt $2{,}7182815 < e < 2{,}7182819$. Lemma 9.3 gibt mit $z = 1$ und $N = 9$ die Schranke $\frac{1}{10!} \cdot \frac{11}{10} < 3{,}04 \cdot 10^{-7}$, etwas schärfer als Satz 4.20; der Zusatz mit dem Faktor 2 gibt $\frac{2}{10!} < 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ und gilt für alle komplexen z mit $|z| \le \frac{11}{2}$. Keine der beiden Schranken braucht Kenntnis des Grenzwerts. Beispiel 4 benutzt den Zusatz mit $N = 4$.

Beispiel 2 (die Zahl $\sin 1$). Die Leitfrage fragte, was $\sin 1$ ist. Nach Definition 9.20 ist es der Imaginärteil von $\exp(i)$, nach Satz 9.21 (4) der Wert der Sinusreihe an der Stelle 1. Satz 9.24 mit $x = 1$ und $m = 2$ schließt ihn zwischen zwei Partialsummen ein:

$$\frac{33588829}{39916800} = S_5(1) < \sin 1 < S_4(1) = \frac{305353}{362880}.$$

Die beiden Brüche sind $0{,}841470984\ldots$ und $0{,}841471009\ldots$; also ist $0{,}84147098 < \sin 1 < 0{,}84147101$, auf sechs Nachkommastellen gerundet $\sin 1 = 0{,}841471$. Sechs Glieder der Reihe genügen, weil die Fakultäten in den Nennern schnell wachsen. Die Geometrie der Schule liefert diesen Wert nur über das Messen eines Kreisbogens; hier ist er eine endliche Rechnung mit Brüchen und eine bewiesene Fehlerschranke.

Beispiel 3 (die Zahl π auf zwei Stellen). Behauptung: $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, das heißt $1{,}57 < \frac{\pi}{2} < 1{,}575$. Nach Satz 9.26 genügt $\cos 1{,}57 > 0$ und $\cos 1{,}575 < 0$. Satz 9.24 mit $m = 2$ liefert

$$\cos 1{,}57 > C_5(1{,}57) = 1 - \frac{1{,}57^2}{2} + \frac{1{,}57^4}{24} - \frac{1{,}57^6}{720} + \frac{1{,}57^8}{40320} - \frac{1{,}57^{10}}{3628800} = 0{,}000795\cdots > 0,$$

und mit $m = 1$

$$\cos 1{,}575 < C_4(1{,}575) = 1 - \frac{1{,}575^2}{2} + \frac{1{,}575^4}{24} - \frac{1{,}575^6}{720} + \frac{1{,}575^8}{40320} = -0{,}00417\cdots < 0.$$

Beide Partialsummen sind endliche Summen rationaler Zahlen und lassen sich exakt ausrechnen. Mit weniger Gliedern geht es nicht: $C_3(1{,}57)$ ist negativ, die Schranke also zu grob. Je näher man an $\frac{\pi}{2}$ heranrückt, desto mehr Glieder braucht man, weil der Kosinus dort klein ist und der Fehler kleiner als sein Wert sein muss.

Beispiel 4 (Schranken für $\ln 2$ und $2^{\sqrt{2}}$). Behauptung: $0{,}69 < \ln 2 < 0{,}70$, das heißt $\exp(0{,}69) < 2 < \exp(0{,}70)$, denn ln ist streng wachsend. Untere Schranke für $\exp(0{,}7)$: Alle Glieder sind positiv, also

$$\exp(0{,}7) > s_3(0{,}7) = 1 + 0{,}7 + 0{,}245 + 0{,}0571\overline{6} = 2{,}0021\overline{6} > 2.$$

Obere Schranke für $\exp(0{,}69)$: Nach dem Zusatz von Lemma 9.3 mit $N = 4$ (zulässig, da $0{,}69 \leq 3$) ist

$$\exp(0{,}69) \leq s_4(0{,}69) + \frac{2 \cdot 0{,}69^5}{120} < 1{,}99225 + 0{,}00261 < 2.$$

Damit lässt sich auch die Zahl der Leitfrage einschließen: $2{,}6 < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}7$. Wegen $1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$ ist $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ (Lemma 3.8), mit den eben gezeigten Schranken für $\ln 2$ also $0{,}97566 < \sqrt{2} \ln 2 < 0{,}9905$. Weil exp streng wächst und für positive Argumente alle Glieder der Reihe positiv sind, ist

$$2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2} \ln 2) > \exp(0{,}97566) > s_3(0{,}97566) = 2{,}6064 \ldots > 2{,}6.$$

Nach oben: Nach Satz 9.7 (2) ist $\exp(0{,}0095) \geq 1{,}0095$, also nach Satz 9.4, Satz 9.9 und Beispiel 1

$$2^{\sqrt{2}} < \exp(0{,}9905) = \frac{e}{\exp(0{,}0095)} \leq \frac{e}{1{,}0095} < \frac{2{,}7182819}{1{,}0095} < 2{,}693 < 2{,}7.$$

Beispiel 5 (spezielle Werte). Aus den Additionstheoremen folgt $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2c^2 - 1)c - 2(1 - c^2)c = 4c^3 - 3c$ mit $c = \cos x$. Für $x = \frac{\pi}{3}$ ist $\cos 3x = \cos \pi = -1$, also

$$4c^3 - 3c + 1 = (c + 1)(2c - 1)^2 = 0.$$

Wegen $\frac{\pi}{3} \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $c > 0$ (Satz 9.29), also $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (positiv nach Satz 9.29). Nach Satz 9.28 (2) folgt $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Aus $0 = \cos \frac{\pi}{2} = 2\cos^2 \frac{\pi}{4} - 1$ und $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ folgt $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, nach Satz 9.28 (2) auch $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Insbesondere ist $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, und wegen $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Satz 9.31). Die Werte, die man aus der Geometrie kennt, ergeben sich also aus der Funktionalgleichung und den Vorzeichen.

Bemerkung (wo die Vollständigkeit steckt). In dieser Einheit geht die Vollständigkeit der reellen Zahlen vor allem an drei Stellen ein: in der Konvergenz der Exponentialreihe (über die Konvergenz absolut konvergenter Reihen), im Zwischenwertsatz für die Surjektivität von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ und damit für den Logarithmus, und im Zwischenwertsatz für die Existenz der Nullstelle, die π definiert. Über den Zwischenwertsatz steckt sie außerdem in den Umkehrfunktionen arccos, arcsin und arctan (Satz 9.30, Satz 9.31) und damit in der Polardarstellung (Satz 9.32). (G6) zeigt an $\exp(1) = e$, dass die erste Stelle in $\mathbb{Q}$ scheitert; für die Nullstelle des Kosinus folgt dasselbe aus der Irrationalität von π, die hier nicht bewiesen wird.

Bilanz. Die Leitfrage ist beantwortet. Potenzen mit beliebigem reellen Exponenten sind $a^x = \exp(x \ln a)$ (Definition 9.15). Sie setzen die ganzzahligen Potenzen und die Wurzeln fort (Satz 9.16), und Funktionalgleichung und Stetigkeit legen sie fest (Satz 9.18).

Kosinus und Sinus sind Real- und Imaginärteil von $\exp(ix)$, und π ist das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus. Die vertrauten Eigenschaften folgen aus drei Quellen: aus der einen Funktionalgleichung $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ (Potenzregeln, Additionstheoreme, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, Periodizität), aus Abschätzungen der Reihe (Vorzeichen, Lage von π, Grenzwerte) und aus dem Zwischenwertsatz (Logarithmus, Existenz von π). Zahlenwerte sind endliche Rechnungen mit Fehlerschranke: $2{,}6 < 2^{\sqrt{2}} < 2{,}7$ (Beispiel 4) und $\sin 1 = 0{,}841471$, gerundet (Beispiel 2). Offen bleibt die Verbindung zur Geometrie. Einheit 13 zeigt, dass π die Fläche des Einheitskreises ist; dass x die Länge des Bogens von 1 nach $\exp(ix)$ ist, setzt die Bogenlänge voraus, die dieser Kurs nicht einführt.

9.10 Ausblick

- **Ableitung (Einheit 10).** Die Abschätzung $|\exp(z) - 1 - z| \le |z|^2$ (Lemma 9.3 mit $N = 1$, gleichwertig mit der zweiten Aussage von Satz 9.6) und die Funktionalgleichung ergeben $\exp' = \exp$. Dieselbe Abschätzung mit $z = ih$ zeigt, dass $x \mapsto \exp(ix)$ die Ableitung $i\exp(ix) = -\sin x + i\cos x$ hat; Real- und Imaginärteil liefern $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ (Satz 10.10), und allgemein hat $x \mapsto \exp(cx)$ für $c \in \mathbb{C}$ die Ableitung $c\exp(cx)$ (Satz 10.23). Die Grenzwerte aus Folgerung 9.25 (3) werden dafür nicht gebraucht; sie ergeben sich dort erneut als Ableitungen in 0. Die Ableitung von ln und von arctan liefert der Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion.
- **Konvexität (Einheit 11).** Ungleichungen wie $\exp(x) \ge 1 + x$ und $\ln x \le x - 1$ sind Fälle der Aussage, dass eine konvexe Funktion über ihren Tangenten liegt (Folgerung 11.25). Die Ungleichungen von Young und Hölder (Satz 11.19, Satz 11.20) benutzen die allgemeine Potenz dieser Einheit.
- **Kreisfläche (Einheit 13).** Mit dem Integral und der Substitution $x = \sin t$ zeigt Einheit 13, dass der Einheitskreis die Fläche π hat; das hier definierte π ist also die Kreiszahl der Geometrie. Dass die Kurve $t \mapsto \exp(it)$, $0 \le t \le x$, die Länge x hat und x damit ein Winkel im Sinn der Schule ist, zeigt man mit dem Begriff der Bogenlänge, der über diesen Kurs hinausgeht.
- **Potenzreihen (Einheit 14).** Die Exponentialreihe ist die einfachste Potenzreihe, die für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Die Stetigkeit, hier mit Lemma 9.3 von Hand bewiesen, folgt dort allgemein für Potenzreihen.
- **Komplexe Analysis.** Weil exp auf $\mathbb{C}$ die Periode $2\pi i$ hat, gibt es keinen Logarithmus auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, der die reelle Rechenregel erfüllt (G4), und der Hauptwert springt auf der negativen reellen Achse (Satz 9.35). Wie man mit dieser Mehrdeutigkeit umgeht, ist eine der Grundfragen der Funktionentheorie, jenseits dieses Kurses.
- **Fourier-Reihen.** Die Funktionen $x \mapsto \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$, sind die Bausteine, aus denen man periodische Funktionen zusammensetzt; Einheit 14 gibt im Ausblick einen ersten Eindruck.

Zum Vergleich.[1] Der hier gewählte Weg – Exponentialfunktion über die Reihe, Logarithmus als Umkehrfunktion, Kosinus und Sinus über $\exp(ix)$, π über die Nullstelle des Kosinus – ist klassisch. In Stoff und Reihenfolge entspricht er O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, Springer Spektrum 2016, § 8 (Exponentialreihe), § 12 (Logarithmus und allgemeine Potenz), § 13 (Exponentialfunktion im Komplexen) und § 14 (trigonometrische Funktionen). Lemma 9.3 enthält die Restgliedabschätzung in § 8, Satz 2 (S. 83–84), deren Bedingung $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$ mit dem Faktor 2 hier als Spezialfall erscheint; die Beweisidee, die Majorisierung durch eine geometrische Reihe, ist dieselbe. In Bedingung und Konstanten folgt Satz 9.6 der Stetigkeitsabschätzung in § 13, Satz 9 (S. 144), und der Abschätzung zu (12.7) in § 12 (S. 132), also den Fällen $N = 0$ mit $|z| \leq 1$ und $N = 1$ mit $|z| \leq \frac{3}{2}$. Der Zugang zu π in Satz 9.24, Satz 9.26 und Definition 9.27 folgt dem Satz 6 in § 14 mit seinen Hilfssätzen 2 und 3 (S. 151): Positivität des Sinus auf $(0, 2]$, strenge Monotonie des Kosinus auf $[0, 2]$ über die Differenzformel und $\frac{\pi}{2}$ als einzige Nullstelle des Kosinus in $[0, 2]$. Satz 9.18 entspricht in Aussage und Beweisidee § 12, Satz 6. Eigene Wege geht die Einheit bei den Schranken für Sinus und Kosinus (Lemma 9.23 statt der Restgliedabschätzung in § 14, Satz 5), bei der Lage $\frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{8}{5}$, aus der hier auch die Existenz der Nullstelle folgt, bei den Ungleichungen in Satz 9.7 und Satz 9.13 (2) und bei den durchgerechneten Beispielen. Dass die rationale Parametrisierung des Einheitskreises aus Satz 3.18 die Parametrisierung durch den Tangens des halben Winkels ist, steht als Bemerkung zur Lösung von Aufgabe 14 G im *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage 2011. Eine Gleichung derselben Bauart wie in Aufgabe R5, nämlich $2^x = 3x$, stellt das Übungsbuch als Aufgabe 17 E.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 9

Verweise beziehen sich auf Einheit 9. Ableitungen und Integrale stehen noch nicht zur Verfügung.

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Zeigen Sie $1{,}648 < \sqrt{e} < 1{,}649$. Begründen Sie zuerst, dass $\sqrt{e} = \exp(\frac{1}{2})$ ist, und benutzen Sie dann Lemma 9.3.

R2. Folgen und Gleichungen mit Potenzen:

(a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

(b) Zeigen Sie $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \to 0$ für $n \to \infty$. Welche der beiden Folgen $n^{\ln n}$ und $(\ln n)^n$ wächst also schneller?

(c) Zeigen Sie $(\ln n)^2/\sqrt{n} \to 0$ für $n \to \infty$.

R3. Bestimmen Sie ohne Taschenrechner $\cos\frac{5\pi}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ und $\tan\frac{5\pi}{12}$. Zeigen Sie dabei $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ und $\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$.

R4. Polardarstellung:

(a) Bestimmen Sie Betrag und Argument (Hauptwert) von $-1 + i\sqrt{3}$ und von $1 - i$.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = 8i$, in der Form $a + ib$.

R5. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^x = 3x$ mindestens eine Lösung in $(0,1)$ und mindestens eine in $(1,2)$ hat, aber keine Lösung $x \le 0$. Benutzen Sie für e nur Beispiel 1 des Kapitels.

R6. Kosinus an der Stelle 1:

(a) Zeigen Sie mit Satz 9.24 und exakter Bruchrechnung $0{,}5402 < \cos 1 < 0{,}5404$.

(b) Folgern Sie mit (a) und Beispiel 2 des Kapitels $1 > \frac{\pi}{4}$, ohne die Schranken für π aus Satz 9.26 oder Beispiel 3 zu benutzen.

Stufe B – Beweisen

B1. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$:

$$0 \le e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le \frac{x^2 e^x}{n}.$$

Folgern Sie den reellen Fall von Satz 9.10, und geben Sie ein n an, für das $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ die Zahl e bis auf 10^{-3} genau liefert. Hinweis: Satz 9.7 (2) für $\pm\frac{x}{n}$ und die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24).

B2. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Zeigen Sie:

(a) $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.

(b) $1+\frac{x^2}{2} \le \cosh x \le \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, in beiden Ungleichungen mit Gleichheit nur für $x = 0$.

B3. Zeigen Sie $\sin x < x < \tan x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ohne Ableitungen.

B4. Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|\exp(ix) - \exp(iy)| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x-y|.$$

Folgern Sie $|\exp(ix) - 1| \le |x|$ und vergleichen Sie mit Satz 9.6.

B5. Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Welche Lösung gehört zu dem Fall, den Satz 9.18 ausschließt?

Stufe V – Vertiefen

V1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht identisch null mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle x, y.

(a) Zeigen Sie ohne Stetigkeitsvoraussetzung: $f(x) > 0$ für alle x und $f(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie: Ist f in 0 stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und daher $f(x) = f(1)^x$.

(c) Folgern Sie: Eine Lösung, die nicht von der Form a^x ist, ist in keinem Punkt stetig.

V2. Sei $n \ge 2$ und $\zeta = \exp(2\pi i/n)$. Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0$ und folgern Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi k}{n} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{2\pi k}{n} = 0.$$

V3. Sei $c = \cos\frac{2\pi}{7}$.

(a) Zeigen Sie mit V2 für $n = 7$: $8c^3 + 4c^2 - 4c - 1 = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass c irrational ist. Hinweis: Betrachten Sie $d = 2c$.

V4. Die Funktion $\sin\frac{1}{x}$:

(a) Zeigen Sie, dass $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, keine stetige Fortsetzung auf $[0,1]$ besitzt, und dass f auf jedem Intervall $(0,\delta)$, $0 < \delta \leq 1$, jeden Wert in $[-1,1]$ annimmt.

(b) Zeigen Sie, dass $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ für $x \in (0,1]$, $g(0) = 0$, auf $[0,1]$ stetig ist.

V5. Für $z \in \mathbb{C}$ seien $\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$ und $\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$. Zeigen Sie:

(a) Für reelle z stimmen diese Definitionen mit Definition 9.20 überein.

(b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\sin z = 0$ genau dann, wenn $z \in \pi\mathbb{Z}$. Der komplexe Sinus hat also keine weiteren Nullstellen als der reelle.

(d) $|\sin(iy)| \to \infty$ für $y \to \infty$.

V6. Sei $b = \dfrac{2\ln 3}{\ln 2}$.

(a) Zeigen Sie $(\sqrt{2})^b = 3$.

(b) Zeigen Sie, dass b irrational ist.

(c) Folgern Sie: Es gibt irrationale Zahlen $a, b > 0$, für die a^b rational ist.

Lösungen

Lösung R1. Nach Folgerung 9.5 (2) ist $\exp(\frac{1}{2})^2 = \exp(1) = e$ (Satz 9.9), und $\exp(\frac{1}{2}) > 0$; nach der Eindeutigkeit in Satz 2.39 ist $\exp(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$ (das ist auch Satz 9.16 (2) mit $a = e$, $q = 2$). Alle Glieder der Reihe sind positiv, also

$$\sqrt{e} > s_4\big(\tfrac{1}{2}\big) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{211}{128} = 1{,}6484375 > 1{,}648.$$

Nach Lemma 9.3 mit $N = 4$ (zulässig, da $\frac{1}{2} \leq 3$) ist der Rest höchstens $\frac{2\,(1/2)^5}{5!} = \frac{1}{1920} < 0{,}00053$, also $\sqrt{e} < 1{,}6484375 + 0{,}00053 < 1{,}649$.

Lösung R2. (a) Nach Satz 9.17 (1) ist $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$. Mit $t = 2^x > 0$ lautet die Gleichung $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$, also $t = 1$ oder $t = 2$. Da $x \mapsto 2^x$ streng wächst und $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ ist, sind $x = 0$ und $x = 1$ die einzigen Lösungen.

(b) Für $n \geq 21$ ist $n > e^3$, denn $e^3 < 2{,}72^3 < 20{,}2$ nach Beispiel 1; also $\ln n > 3$ und $\ln\ln n > \ln 3 > \ln e = 1$, weil ln streng wächst und $3 > e$. Nach Satz 9.16 (1)

und Definition 9.15 ist $(\ln n)^n = \exp(n \ln\ln n)$, und nach Definition 9.15 ist $n^{\ln n} = \exp\big((\ln n)^2\big)$. Nach Satz 9.4 und Folgerung 9.5 (1) ist deshalb

$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \exp\big((\ln n)^2 - n \ln\ln n\big) \le \exp\big((\ln n)^2 - n\big) \qquad (n \ge 21),$$

weil exp streng wächst. Nach Satz 9.19 mit $\alpha = \frac{1}{2}$ ist $\frac{\ln n}{n^{1/2}} \to 0$, also auch $\frac{(\ln n)^2}{n} \to 0$ (Satz 4.9, Satz 9.17 (1)); für fast alle n ist daher $(\ln n)^2 \le \frac{n}{2}$ und der Exponent höchstens $-\frac{n}{2}$. Wegen $\exp(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ (Satz 9.8) und $\exp > 0$ folgt die Behauptung mit der Einschließung. Die Folge $(\ln n)^n$ wächst also schneller als $n^{\ln n}$, obwohl $\ln n$ viel kleiner als n ist: Im Exponenten steht einmal n, einmal nur $\ln n$.

(c) Nach Satz 9.19 mit $\alpha = \frac{1}{4}$ ist $\frac{\ln n}{n^{1/4}} \to 0$. Das Quadrat einer Nullfolge ist eine Nullfolge, und $\big(\frac{\ln n}{n^{1/4}}\big)^2 = \frac{(\ln n)^2}{n^{1/2}}$ nach Satz 9.17 (1).

Lösung R3. Nach Satz 9.28 (2) und Beispiel 5 ist $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\big(\frac{\pi}{4} + \pi\big) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\big(\frac{\pi}{6} + \pi\big) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Mit $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ (Satz 9.22) und $x = \frac{\pi}{12}$:

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Wegen $\frac{\pi}{12} \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ (Satz 9.29), also $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Ferner ist $\big(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\big)^2 = \frac{6+2+2\sqrt{12}}{16} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, und $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit in Satz 2.39 ist $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Ebenso ist $\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, und wegen $\frac{\pi}{12} \in (0, \pi)$ ist $\sin\frac{\pi}{12} > 0$ (Satz 9.29 (1)). Da $\big(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\big)^2 = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ und $\sqrt{6} > \sqrt{2}$ ist, folgt $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Nach Satz 9.28 (2) ist $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\big) = \cos\frac{\pi}{12}$ und $\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} \ne 0$, also

$$\tan\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}.$$

Lösung R4. (a) $|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ und $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nach Satz 9.28 (2) und Beispiel 5 ist $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\big(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\big) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ und $\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Wegen $\frac{2\pi}{3} \in (-\pi, \pi]$ ist $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$ (Satz 9.32).

$|1-i| = \sqrt{2}$ und $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})$, denn cos ist gerade und sin ungerade; wegen $-\frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$ ist $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ (Satz 9.32).

(b) Es ist $8i = 8\exp(i\frac{\pi}{2})$. Sei $z^3 = 8i$; dann ist $z \neq 0$, nach Satz 9.32 also $z = r\exp(i\varphi)$ mit $r = |z| > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, und $r^3 = |z^3| = 8$ (Folgerung 3.23), nach der Eindeutigkeit in Satz 2.39 also $r = 2$. Nach Folgerung 9.5 (2) ist $z^3 = 8\exp(3i\varphi)$, also $\exp(3i\varphi) = \exp(i\frac{\pi}{2})$, nach Satz 9.29 (4) also $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$, das heißt $\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$. Weil $\exp(i\varphi)$ nur von m modulo 3 abhängt (Periode 2π), gibt es höchstens die drei Lösungen mit $m = 0, 1, 2$:

$$2\exp\Big(i\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{3} + i, \qquad 2\exp\Big(i\frac{5\pi}{6}\Big) = -\sqrt{3} + i, \qquad 2\exp\Big(i\frac{3\pi}{2}\Big) = -2i.$$

Hier ist $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ und $\exp(i\frac{3\pi}{2}) = i^3 = -i$. Probe: $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ und $(2+2\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3} + 2i + 6i - 2\sqrt{3} = 8i$; ferner $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$. Die drei Zahlen sind verschieden, und alle sind Lösungen, weil $\big(2\exp(i\varphi)\big)^3 = 8\exp(3i\varphi) = 8\exp(i\frac{\pi}{2} + 2\pi i m) = 8i$. Das Ergebnis ist ein Fall von Folgerung 9.33 (5) mit $w = 8i$, $\arg w = \frac{\pi}{2}$.

Lösung R5. Sei $f(x) = e^x - 3x$; f ist stetig. Nach Beispiel 1 ist $2{,}71 < e < 2{,}72$. Dann ist $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = e - 3 < 0$ und $f(2) = e^2 - 6 > 2{,}71^2 - 6 = 7{,}3441 - 6 > 0$ (Folgerung 9.5 (2): $\exp(2) = e^2$). Nach dem Zwischenwertsatz hat f eine Nullstelle in $(0, 1)$ und eine in $(1, 2)$. Für $x \leq 0$ ist $e^x > 0 \geq 3x$, also keine Lösung.

Dass es genau zwei Lösungen sind, folgt mit der Konvexität von exp (Einheit 11, Folgerung 11.24 und der Absatz danach); hier wird es nicht behauptet.

Lösung R6. (a) Nach Satz 9.24 mit $x = 1$ und $m = 1$ ist $C_3(1) < \cos 1 < C_4(1)$. Exakt:

$$C_3(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = \frac{389}{720}, \qquad C_4(1) = \frac{389}{720} + \frac{1}{40320} = \frac{21785}{40320} = \frac{4357}{8064}.$$

Zum Vergleich mit den Dezimalzahlen genügt es, ganze Zahlen zu vergleichen: $389 \cdot 10000 = 3\,890\,000 > 5402 \cdot 720 = 3\,889\,440$ und $4357 \cdot 10000 = 43\,570\,000 < 5404 \cdot 8064 = 43\,577\,856$. Also ist $0{,}5402 < \cos 1 < 0{,}5404$.

(b) Nach Beispiel 2 und (a) ist $\sin 1 > 0{,}8414 > 0{,}5404 > \cos 1$. Angenommen, $1 \leq \frac{\pi}{4}$. Dann liegen 1 und $\frac{\pi}{4}$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Nach Satz 9.30 ist sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wachsend und cos auf $[0, \pi]$ fallend, also $\sin 1 \leq \sin\frac{\pi}{4}$ und $\cos\frac{\pi}{4} \leq \cos 1$. Nach Beispiel 5 ist $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, also $\sin 1 \leq \cos 1$ – ein Widerspruch. Also ist $1 > \frac{\pi}{4}$, das heißt $\pi < 4$. Die Schranke ist gröber als $\pi < 3{,}2$ aus Satz 9.26, kommt aber ohne die Schranken $\frac{3}{2} < \xi < \frac{8}{5}$ aus Satz 9.26 aus; benutzt wird nur, dass $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle des Kosinus in $[0, 2]$ ist.

Lösung B1. Wegen $n > |x|$ ist $1 + \frac{x}{n} > 0$ und $1 - \frac{x}{n} > 0$. Nach Satz 9.7 (2) ist

$$0 < 1 + \frac{x}{n} \le \exp\Big(\frac{x}{n}\Big), \qquad 0 < 1 - \frac{x}{n} \le \exp\Big(-\frac{x}{n}\Big).$$

Nach Lemma 2.38 (1), Folgerung 9.5 (2) und Satz 9.16 (3) folgt $(1 + \frac{x}{n})^n \le e^x$ und $(1 - \frac{x}{n})^n \le e^{-x}$. Die erste Ungleichung ist die linke Behauptung. Multipliziert man die zweite mit $e^x(1 + \frac{x}{n})^n > 0$, so folgt

$$e^x\Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n = e^x\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \le \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n.$$

Wegen $-\frac{x^2}{n^2} \ge -1$ gibt die Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24) $(1 - \frac{x^2}{n^2})^n \ge 1 - \frac{x^2}{n}$, also $(1 + \frac{x}{n})^n \ge e^x - \frac{x^2 e^x}{n}$. Das ist die rechte Behauptung.

Für festes x strebt $\frac{x^2 e^x}{n}$ gegen 0; mit der Einschließung folgt $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$, der reelle Fall von Satz 9.10. Für $x = 1$ und $n \ge 2$ ist $0 \le e - (1 + \frac{1}{n})^n \le \frac{e}{n} < \frac{2{,}72}{n}$ nach Beispiel 1; für $n = 2720$ ist der Fehler also höchstens 10^{-3}. Die Schranke zeigt nur, dass dieses n genügt, nicht, dass ein kleineres nicht genügt. Zum Vergleich: Beispiel 1 erreicht mit zehn Gliedern der Reihe einen Fehler unter $3{,}1 \cdot 10^{-7}$.

Lösung B2. (a) Nach Satz 9.2 konvergieren $\sum x^n/n!$ und $\sum(-x)^n/n!$; für die Partialsummen gilt

$$\frac{s_{2m+1}(x) + s_{2m+1}(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{2m+1} \frac{x^n + (-x)^n}{2\,n!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

weil $x^n + (-x)^n$ für ungerades n verschwindet und für $n = 2k$ gleich $2x^{2k}$ ist. Die linke Seite strebt für $m \to \infty$ gegen $\cosh x$ (Satz 4.24, Satz 4.9). Also konvergiert die Reihe $\sum_k x^{2k}/(2k)!$ gegen $\cosh x$.

(b) Untere Schranke: Alle Glieder in (a) sind nichtnegativ, die Partialsummen wachsen also, und Satz 4.10 gibt $\cosh x \ge 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$; für $x \ne 0$ ist $\frac{x^4}{24} > 0$. Obere Schranke: Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(2k)! = \prod_{j=1}^{k}(2j-1)(2j) \ge \prod_{j=1}^{k} 2j = 2^k\,k!,$$

weil jeder Faktor $2j - 1 \ge 1$ ist; für $k \ge 2$ gilt $>$, weil der Faktor $2j - 1 = 3$ für $j = 2$ vorkommt. Also ist $\frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \frac{(x^2/2)^k}{k!}$ für alle k. Nach Satz 6.3 (1) ist

$$\exp\Big(\frac{x^2}{2}\Big) - \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{(x^2/2)^k}{k!} - \frac{x^{2k}}{(2k)!}\Big),$$

und alle Glieder sind nichtnegativ. Die Summe ist also mindestens jede ihrer Partialsummen und damit mindestens das Glied mit $k = 2$, nämlich $\frac{x^4}{8} - \frac{x^4}{24} = \frac{x^4}{12}$; das ist für $x \neq 0$ positiv. Für $x = 0$ steht überall 1.

Lösung B3. Sei $0 < x < \frac{\pi}{2}$; dann ist $x < 2$ und $\cos x > 0$ (Satz 9.29). Nach Satz 9.24 ist $\sin x < x$. Ferner gilt nach Satz 9.24

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{und} \qquad x \cos x < x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\Big) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}.$$

Es ist $x - \frac{x^3}{6} \geq x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}$ gleichwertig mit $\frac{x^3}{3} \geq \frac{x^5}{24}$, also mit $x^2 \leq 8$, und das gilt wegen $x < 2$. Zusammen: $\sin x > x \cos x$, und Division durch $\cos x > 0$ ergibt $\tan x > x$.

Man beachte, dass die obere Schranke für $\cos x$ hier nur mit dem positiven Faktor x multipliziert wird; ihr Vorzeichen spielt keine Rolle.

Lösung B4. Mit $u = \frac{x+y}{2}$ und $v = \frac{x-y}{2}$ ist $x = u + v$, $y = u - v$, also nach Satz 9.4 und Satz 9.21 (3)

$$\exp(ix) - \exp(iy) = \exp(iu)\big(\exp(iv) - \exp(-iv)\big) = \exp(iu) \cdot 2i \sin v.$$

Wegen $|\exp(iu)| = 1$ ist der Betrag $2|\sin v|$, und nach Folgerung 9.25 (1) ist $2|\sin v| \leq 2|v| = |x - y|$. Mit $y = 0$ folgt $|\exp(ix) - 1| \leq |x|$.

Vergleich: Satz 9.6 liefert nur $|\exp(ix) - 1| \leq 2|x|$ und nur für $|x| \leq 1$. Die schärfere Schranke nutzt, dass ix rein imaginär ist; für reelle z ist sie falsch, etwa $e^1 - 1 > 1$.

Lösung B5. Sei f eine stetige Lösung und $g = 1 + f$. Dann ist g stetig, und

$$g(x + y) = 1 + f(x) + f(y) + f(x)f(y) = \big(1 + f(x)\big)\big(1 + f(y)\big) = g(x)g(y).$$

Ist g identisch null, so ist $f \equiv -1$. Andernfalls ist nach Satz 9.18 $a = g(1) > 0$ und $g(x) = a^x$, also $f(x) = a^x - 1$.

Umgekehrt sind diese Funktionen Lösungen: $f \equiv -1$ erfüllt $-1 = -1 - 1 + 1$; für $f(x) = a^x - 1$ mit $a > 0$ ist nach Satz 9.17 (1)

$$f(x) + f(y) + f(x)f(y) = a^x + a^y - 2 + a^{x+y} - a^x - a^y + 1 = a^{x+y} - 1 = f(x + y).$$

Die stetigen Lösungen sind also genau $f \equiv -1$ und $f(x) = a^x - 1$ mit $a > 0$; für $a = 1$ ist das $f \equiv 0$. Die konstante Lösung -1 gehört zu $g \equiv 0$, dem Fall, den Satz 9.18 mit „nicht identisch null“ ausschließt. Die Aufgabe zeigt, dass diese Voraussetzung keine bloße Formalie ist: Ohne sie wäre Satz 9.18 falsch, und wer den ausgeschlossenen Fall beim Anwenden übergeht, verliert die Lösung $f \equiv -1$.

Lösung V1. (a) Wie im Beweis von Satz 9.18, der dort die Stetigkeit noch nicht benutzt: Hätte f eine Nullstelle x_0, so wäre $f(x) = f(x_0)f(x - x_0) = 0$ für alle x. Also $f(x) = f(x/2)^2 > 0$. Aus $f(0) = f(0)^2$ und $f(0) \neq 0$ folgt $f(0) = 1$.

(b) Sei f stetig in 0 und $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(x+h) - f(x) = f(x)\big(f(h) - f(0)\big)$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f(h) - f(0)| < \varepsilon/f(x)$ für $|h| < \delta$; für diese h ist $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$. Also ist f in x stetig, und Satz 9.18 liefert $f(x) = f(1)^x$.

(c) Ist f in einem Punkt x_0 stetig, so ist f in 0 stetig, denn $f(h) - f(0) = \big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big)/f(x_0)$. Nach (b) ist dann $f(x) = f(1)^x$. Eine Lösung, die nicht von dieser Form ist, kann also in keinem Punkt stetig sein. (Ob es solche Lösungen gibt, ist die Frage von (G2); ihre Existenz wird dort ohne Beweis angegeben.)

Lösung V2. Nach Satz 9.29 (2) ist $\zeta \neq 1$, weil $\frac{2\pi}{n} \in (0, 2\pi)$ nicht in $2\pi\mathbb{Z}$ liegt. Die geometrische Summenformel $S - \zeta S = 1 - \zeta^n$ für $S = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k$ gilt nach Satz 1.13 und Abschnitt 3.1 auch für komplexe ζ. Wegen $\zeta^n = \exp(2\pi i) = 1$ (Folgerung 9.5 (2), Satz 9.28 (1)) ist $(1 - \zeta)S = 0$, und $1 - \zeta \neq 0$ ergibt $S = 0$. Nach Folgerung 9.5 (2) und Definition 9.20 ist $\zeta^k = \exp(2\pi ik/n) = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n}$. Real- und Imaginärteil von $S = 0$ ergeben die beiden Formeln.

Lösung V3. (a) Für $k \in \{1, \dots, 6\}$ ist $\cos\frac{2\pi(7-k)}{7} = \cos\big(2\pi - \frac{2\pi k}{7}\big) = \cos\frac{2\pi k}{7}$ nach Satz 9.28 (2) und weil cos gerade ist. V2 mit $n = 7$ ergibt deshalb

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0.$$

Mit $\cos 2x = 2c^2 - 1$ (Satz 9.22) und $\cos 3x = 4c^3 - 3c$ (Beispiel 5), jeweils für $x = \frac{2\pi}{7}$, folgt $1 + 2c + 4c^2 - 2 + 8c^3 - 6c = 0$, also $8c^3 + 4c^2 - 4c - 1 = 0$.

(b) Für $d = 2c$ lautet die Gleichung aus (a) $d^3 + d^2 - 2d - 1 = 0$. Angenommen, d ist rational. Unter allen Darstellungen $d = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ wähle man eine mit kleinstem q (Wohlordnung, Satz 1.16). Dann sind p und q nicht beide gerade, sonst wäre $d = \frac{p/2}{q/2}$ eine Darstellung mit kleinerem Nenner. Multiplikation mit q^3 ergibt

$$p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3 = 0.$$

Produkte ungerader Zahlen sind ungerade, denn $(2a+1)(2b+1) = 2(2ab + a + b) + 1$; Produkte mit einem geraden Faktor sind gerade. Der Summand $2pq^2$ ist gerade. Sind p und q ungerade, so sind p^3, p^2q und q^3 ungerade; $p^3 + p^2q$ ist dann gerade und $p^3 + p^2q - q^3$ ungerade, nach Abzug der geraden Zahl $2pq^2$ bleibt die linke Seite ungerade. Ist p gerade und q ungerade, so sind p^3, p^2q, $2pq^2$ gerade und q^3 ungerade. Ist p ungerade und q gerade, so ist p^3 ungerade und alle übrigen Summanden sind gerade. In jedem

Fall ist die linke Seite ungerade, also nicht 0 – ein Widerspruch. Also ist d und damit $c = \frac{d}{2}$ irrational.

Lösung V4. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_n = \frac{1}{\pi/2+2\pi n}$ und $y_n = \frac{1}{3\pi/2+2\pi n}$; beide liegen in $(0,1]$ und streben gegen 0. Nach Satz 9.28 ist $\sin\big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\big) = 1$ und $\sin\big(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\big) = \sin\big(\frac{\pi}{2} + \pi\big) = -1$. Also $f(x_n) = 1$ und $f(y_n) = -1$. Wäre F eine stetige Fortsetzung auf $[0,1]$, so wäre nach dem Folgenkriterium $F(0) = \lim f(x_n) = 1$ und $F(0) = \lim f(y_n) = -1$ – ein Widerspruch.

Sei $0 < \delta \leq 1$ und $c \in [-1,1]$. Wähle n mit $x_n < \delta$; dann ist auch $y_n < x_n < \delta$. Die Funktion f ist auf $[y_n, x_n]$ stetig (Verkettung von $x \mapsto 1/x$ und sin), mit $f(y_n) = -1$ und $f(x_n) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $t \in [y_n, x_n] \subseteq (0,\delta)$ mit $f(t) = c$.

(b) Auf $(0,1]$ ist g als Produkt stetiger Funktionen stetig. In 0: $|g(x)-g(0)| = |x|\,|\sin\frac{1}{x}| \leq |x|$, also $|g(x)| < \varepsilon$ für $0 < x < \varepsilon$.

Lösung V5. (a) Satz 9.21 (3).

(b) Mit $A = \exp(iz)$, $B = \exp(-iz)$ und $AB = \exp(0) = 1$ ist

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(A+B)^2}{4} + \frac{(A-B)^2}{(2i)^2} = \frac{(A+B)^2 - (A-B)^2}{4} = AB = 1.$$

(c) $\sin z = 0 \iff A = B \iff A^2 = AB = 1$ (Multiplikation mit $A \neq 0$) $\iff \exp(2iz) = 1$. Nach Satz 9.29 (4) ist das gleichwertig mit $2iz \in 2\pi i\mathbb{Z}$, also mit $z \in \pi\mathbb{Z}$.

(d) $\sin(iy) = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$, also $|\sin(iy)| = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \geq \frac{e^{y}-1}{2} \geq \frac{y}{2}$ für $y \geq 0$, nach Satz 9.7 (2). Das strebt gegen ∞.

Zusammen mit (b) zeigt das: Die Gleichung $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ beschränkt $\cos z$ und $\sin z$ im Komplexen nicht, weil $\cos^2 z$ und $\sin^2 z$ dort keine nichtnegativen reellen Zahlen zu sein brauchen; vergleiche (G5).

Lösung V6. (a) Nach Satz 9.16 (2) ist $\sqrt{2} = 2^{1/2}$. Nach Satz 9.17 (1) ist

$$(\sqrt{2})^b = \big(2^{1/2}\big)^b = 2^{b/2} = \exp\Big(\frac{\ln 3}{\ln 2} \cdot \ln 2\Big) = \exp(\ln 3) = 3;$$

dabei ist $\ln 2 \neq 0$, weil ln injektiv ist und $\ln 1 = 0$.

(b) Wegen $\ln 3 > \ln 2 > \ln 1 = 0$ ist $b > 0$. Angenommen, $b = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist $2q \ln 3 = p \ln 2$, nach Satz 9.13 (1) also $\ln\big(3^{2q}\big) = \ln\big(2^{p}\big)$, und wegen der Injektivität von ln ist $3^{2q} = 2^{p}$. Die linke Seite ist ein Produkt ungerader Zahlen, also ungerade, denn

$(2r+1)(2s+1) = 2(2rs+r+s)+1$ (Induktion über die Zahl der Faktoren); die rechte ist wegen $p \geq 1$ gerade – ein Widerspruch.

(c) $a = \sqrt{2}$ ist irrational (Satz 2.39), b nach (b), und $a^b = 3$ nach (a).

Teil IV

Differential- und Integralrechnung

EINHEIT 10

Ableitung

Leitfrage

Ein Lichtstrahl läuft vom Punkt $A = (0, a)$ oberhalb der Geraden $y = 0$ zum Punkt $B = (d, -b)$ unterhalb von ihr; dabei sind $a, b, d > 0$. Oberhalb der Geraden ist seine Geschwindigkeit $v_1 > 0$, unterhalb $v_2 > 0$. Trifft er die Gerade im Punkt $(x, 0)$, so braucht er die Zeit

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}.$$

Das Prinzip von Fermat, hier als physikalische Annahme übernommen, besagt in dieser Lage: Das Licht wählt unter allen solchen Wegen den mit der kürzesten Laufzeit. Dass es in jedem der beiden Bereiche geradlinig läuft, steckt bereits in der Formel für T. Von hier an ist alles Mathematik. Die Funktion T ist stetig (Satz 7.11 und die Stetigkeit der Quadratwurzel, Abschnitt 7.2), und nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16 mit Folgerung 8.28) nimmt sie auf $[0, d]$ ein Minimum an. Der Satz sagt nicht, wo, und nicht, ob es nur eine solche Stelle gibt. **Wie findet man die Stelle, an der eine Funktion ihr Minimum annimmt, und wie beweist man, dass es keine zweite gibt?** Die Antwort führt über die lokale Gestalt einer Funktion, ihre Ableitung, zu einem globalen Schluss, dem Mittelwertsatz. Die Abschnitte 10.5 und 10.6 ziehen unterwegs Zwischenbilanz; Abschnitt 10.9 löst die Aufgabe vollständig.

Voraussetzungen. Benutzt werden ohne erneuten Beweis:

1. aus Einheit 1 die Wohlordnung (Satz 1.16), aus Einheit 2 die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Satz 2.9) und die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31), alle drei nur in den Bemerkungen über $\mathbb{Q}$ in Abschnitt 10.5 und in (G5); aus Einheit 3 der Betrag (Definition 3.7) mit $|zw| = |z|\,|w|$, $|\bar{z}| = |z|$, $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $|\operatorname{Im} z| \le |z|$ und $|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ (Satz 3.9 (2) bis (4));
2. aus Einheit 7: Häufungspunkte (Definition 7.1), Grenzwerte von Funktionen mit Folgenkriterium und Rechenregeln einschließlich der Erhaltung von $\le$ (Definition 7.3, Satz 7.5, Satz 7.6), einseitige und uneigentliche Grenzwerte (Definition 7.7, Lemma 7.8), Stetigkeit mit ihren Kennzeichnungen und Rechenregeln (Definition 7.9, Satz 7.10, Satz 7.11, Folgerung 7.12) samt der Bemerkung über Funktionen

mit Werten in $\mathbb{C}$ nach Folgerung 7.12, Einschränkung und Lokalität (Lemma 7.28), die Vorzeichenerhaltung (Lemma 7.13), der Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) mit Satz 7.19, Endpunkte und innere Punkte (Definition 7.29 mit dem Absatz danach), der Satz über die Umkehrfunktion (Satz 7.26) mit Lemma 7.24, die k-te Wurzel (Folgerung 7.27) und Folgerung 7.30;

3. aus Einheit 8 der Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16) für die kompakten Intervalle $[a, b]$ (Folgerung 8.28), die Lipschitz-Stetigkeit (Definition 8.19) und, nur in Aufgabe V4, der Satz von Heine (Satz 8.21);

4. aus Einheit 9: die Exponentialfunktion (Definition 9.1) mit der Restabschätzung (Lemma 9.3), der Funktionalgleichung (Satz 9.4), Folgerung 9.5 und Satz 9.6; $\exp(x) > 0$ und $\exp(x) \geq 1 + x$ für reelles x (Satz 9.7); Stetigkeit, Monotonie und Bild von exp auf $\mathbb{R}$ (Satz 9.8); $e = \exp(1)$ (Satz 9.9) und, nur zum Vergleich in Beispiel 3 (d) von Abschnitt 10.9, der Grenzwert $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(z)$ (Satz 9.10); das Wachstum $x^k \exp(-x) \to 0$ für $x \to \infty$ (Satz 9.11); der Logarithmus (Definition 9.12, Satz 9.13) und $\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$ (Satz 9.19); die allgemeine Potenz $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ (Definition 9.15, Satz 9.16, Satz 9.17) mit $0^\alpha = 0$ für $\alpha > 0$ (Absatz nach Satz 9.17); Kosinus und Sinus (Definition 9.20) mit $|\exp(ix)| = 1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und den Symmetrien (Satz 9.21), die Additionstheoreme (Satz 9.22, nur in den Aufgaben), die Grenzwerte $\frac{\sin x}{x} \to 1$ und $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$ für $x \to 0$ (Folgerung 9.25 (3)); die Zahl π (Definition 9.27) mit den Werten und Verschiebungen aus Satz 9.28 und den Vorzeichen aus Satz 9.29 (1), insbesondere $\cos x > 0$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$; Arkussinus und Arkuskosinus (Satz 9.30), Tangens und Arkustangens (Satz 9.31).

Die Ableitungen von exp, ln, sin und cos werden hier bewiesen, allein aus diesen Angaben. Gliedweises Differenzieren von Potenzreihen steht erst in Einheit 14 zur Verfügung und wird nicht benutzt. Die nummerierten Aussagen 10.22 bis 10.24 über Funktionen mit komplexen Werten stehen am Ende von Abschnitt 10.6.

Schreibweise. In dieser Einheit ist I stets ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält. Endpunkte und innere Punkte von I sind wie in Definition 7.29 erklärt; die inneren Punkte von $[a, b]$ bilden also (a, b). Nach dem Absatz im Anschluss an Definition 7.29 ist jeder Punkt $a \in I$ Häufungspunkt von I, denn a ist von mindestens einem der beiden Endpunkte verschieden, und a ist genau dann innerer Punkt, wenn $B_\delta(a) \subseteq I$ für ein $\delta > 0$ gilt. Dabei ist $B_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$ wie in Einheit 7. Einseitige Grenzwerte werden wie in Definition 7.7 als $\lim_{x \to a+}$ und $\lim_{x \to a-}$ geschrieben.

10.1 Ableitung als lineare Näherung

Die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ hat die Steigung $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Rückt x an a heran, so soll die Sekante in die Tangente übergehen. Die Definition fordert genau, dass dieser Grenzwert existiert.

Definition 10.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von D (Definition 7.1). Die Funktion f heißt *in a differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der Funktion $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ auf $D \setminus \{a\}$ im Sinn von Definition 7.3 existiert (als reelle Zahl). Er heißt *Ableitung* von f in a, der Quotient *Differenzenquotient*. f heißt *differenzierbar*, wenn jeder Punkt von D Häufungspunkt von D ist und f in jedem Punkt von D differenzierbar ist.

Der Hauptfall ist ein Intervall, $D = I$. Andere Definitionsbereiche kommen in dieser Einheit nur in der Bemerkung über Allgemeinheit in Abschnitt 10.2, in Definition 10.11, in der Bemerkung über $\mathbb{Q}$ in Abschnitt 10.5 und in den Gegenbeispielen (G5) (c) und (G6) vor. Mit $x = a + h$ lautet die Bedingung $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, wobei $h \neq 0$ und $a+h \in D$. Ist a ein Endpunkt von I, der zu I gehört, so liegt $I \setminus \{a\}$ auf einer Seite von a, und der Grenzwert in Definition 10.1 ist von selbst einseitig. Man spricht trotzdem ohne Zusatz von der Ableitung in a. „f ist auf $[a, b]$ differenzierbar“ heißt also: in jedem Punkt von (a, b) differenzierbar und in den Endpunkten im einseitigen Sinn.

Einseitige Ableitungen. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$. Ist a nicht der rechte Endpunkt von I, so heißt f in a *rechtsseitig differenzierbar*, wenn die Einschränkung $f|_{I \cap [a,\infty)}$ in a differenzierbar ist. Ihre Ableitung heißt *rechtsseitige Ableitung* von f in a und wird mit $f'_+(a)$ bezeichnet; nach Definition 7.7 ist

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Entsprechend ist die *linksseitige Ableitung* $f'_-(a)$ mit $I \cap (-\infty, a]$ erklärt, wenn a nicht der linke Endpunkt ist. Gehört der linke Endpunkt α zu I, so ist $I \cap [\alpha, \infty) = I$ und deshalb $f'(\alpha) = f'_+(\alpha)$; ebenso ist $f'(\beta) = f'_-(\beta)$ für einen rechten Endpunkt $\beta \in I$. In einem inneren Punkt a ist f nach Lemma 7.8 genau dann differenzierbar, wenn $f'_+(a)$ und $f'_-(a)$ existieren und gleich sind; Lemma 7.8 ist anwendbar, weil a nach dem Absatz im Anschluss an Definition 7.29 Häufungspunkt von $I \cap (a, \infty)$ und von $I \cap (-\infty, a)$ ist.

Beispiele. (a) Eine konstante Funktion hat überall die Ableitung 0; die Funktion $x \mapsto x$ hat überall die Ableitung 1. (b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n$ gilt $x^n - a^n = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k$ (nachzurechnen durch Ausmultiplizieren, die Summe teleskopiert). Der Differenzenquotient ist also $\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} a^k$, und er strebt für $x \to a$ gegen na^{n-1}.

Einheit 7 hat diesen Grenzwert in Abschnitt 7.6, Beispiel 2, schon berechnet; hier erhält er seinen Namen. (c) Der Betrag $f(x) = |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar: Der Differenzenquotient $|x|/x$ ist 1 für $x > 0$ und -1 für $x < 0$. Es gilt $f'_+(0) = 1$ und $f'_-(0) = -1$. (d) $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ ist im Endpunkt 0 nicht differenzierbar: $\sqrt{x}/x = 1/\sqrt{x}$ ist für $x \to 0+$ unbeschränkt.

Die folgende Umformulierung trägt fast alle Beweise dieser Einheit. Sie ersetzt den Grenzwert eines Quotienten durch die Stetigkeit einer Funktion.

Satz 10.2 (lineare Näherung). Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Gleichwertig sind:

1. f ist in a differenzierbar mit $f'(a) = c$.
2. Es gibt eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, die in a stetig ist, mit $\varphi(a) = c$ und $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$ für alle $x \in I$.
3. Für die durch $f(x) = f(a) + c(x - a) + r(x)$ erklärte Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0$.

Beweisidee. In (2) ist φ außerhalb von a nichts anderes als der Differenzenquotient; die Stetigkeit in a ist der Grenzwert. (3) sagt dasselbe über den Fehler der Geraden $x \mapsto f(a) + c(x - a)$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Setze $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x \neq a$ und $\varphi(a) = c$. Die Gleichung $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$ gilt für $x \neq a$ nach Definition und für $x = a$, weil beide Seiten $f(a)$ sind. Die Stetigkeit von φ in a heißt nach Satz 7.10 (3) $\lim_{x \to a} \varphi(x) = c$, und das ist (1).

(2) $\Rightarrow$ (3): Es ist $r(x) = (\varphi(x) - c)(x - a)$, also $\frac{r(x)}{x-a} = \varphi(x) - c \to 0$ für $x \to a$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Für $x \neq a$ ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = c + \frac{r(x)}{x-a} \to c$. □

Die Zahl c in (2) und (3) ist eindeutig, denn sie ist ein Grenzwert. Bedingung (3) erklärt den Namen: Unter allen Geraden durch $(a, f(a))$ ist die Tangente $x \mapsto f(a)+f'(a)(x-a)$ die einzige, deren Abstand vom Graphen schneller gegen 0 geht als $|x - a|$. Wählt man eine andere Steigung $c' \neq c$, so ist der Fehler $(c - c')(x - a) + r(x)$, und sein Quotient mit $x - a$ strebt gegen $c - c' \neq 0$. Diese Sicht trägt weiter als der Differenzenquotient: In mehreren Veränderlichen gibt es keinen Quotienten, wohl aber eine lineare Näherung.

Folgerung 10.3. Ist f in a differenzierbar, so ist f in a stetig.

Beweis. Mit φ aus Satz 10.2 (2) gilt $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a) \to f(a) + \varphi(a) \cdot 0 = f(a)$ für $x \to a$. □

Die Umkehrung ist falsch, wie der Betrag zeigt; siehe (G1).

Bemerkung (Lokalität und Einschränkung). Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, und sei $J \subseteq I$ ein Intervall mit $a \in J$, das mehr als einen Punkt enthält. Ist f in a differenzierbar, so ist auch $f|_J$ in a differenzierbar, mit derselben Ableitung. Gibt es ein $r > 0$ mit $I \cap$

$B_r(a) \subseteq J$, so gilt auch die Umkehrung. Beides ist Lemma 7.28 (1) und (2), angewandt auf den Differenzenquotienten mit den Definitionsbereichen $I\setminus\{a\}$ und $J\setminus\{a\}$. Stimmen $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf $I \cap B_r(a)$ für ein $r > 0$ überein, so sind beide in a zugleich differenzierbar oder nicht, mit derselben Ableitung; denn ihre Differenzenquotienten stimmen für $0 < |x-a| < r$ überein (Lemma 7.28 (3)). Differenzierbarkeit und Ableitung in a hängen also nur von den Werten nahe bei a ab. Zwei Fälle werden oft gebraucht. Mit $J = I \cap [a, \infty)$ folgt: Ist f in a differenzierbar und a nicht der rechte Endpunkt, so ist $f'_+(a) = f'(a)$; ebenso links. Ist x ein innerer Punkt eines Teilintervalls $J \subseteq I$, so gibt es $r > 0$ mit $B_r(x) \subseteq J$, und $f|_J$ ist in x genau dann differenzierbar, wenn f es ist, mit derselben Ableitung.

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist wieder eine Funktion und kann selbst differenzierbar sein. Ihre Ableitung misst, wie sich die Steigung ändert. Sie entscheidet in Beispiel 1 von Abschnitt 10.9 über die Eindeutigkeit der Minimalstelle und in Einheit 11 über Krümmung und Taylorpolynome. Die Klassen C^k ordnen Funktionen danach, wie oft man sie differenzieren kann, ohne die Stetigkeit zu verlieren.

> **Definition 10.4.** Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so heißt $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, die *Ableitung* oder *Ableitungsfunktion*. Rekursiv sei $f^{(0)} = f$ und, falls $f^{(k)}$ auf I existiert und differenzierbar ist, $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$; man schreibt auch $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$. Existiert $f^{(k)}$ auf I, so heißt f *k-mal differenzierbar*. Für $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $C^k(I)$ die Menge der k-mal differenzierbaren Funktionen, deren k-te Ableitung stetig ist; $C^0(I)$ besteht aus den stetigen Funktionen. $C^\infty(I)$ ist der Durchschnitt aller $C^k(I)$.

Nach Folgerung 10.3 ist jede Ableitung $f^{(j)}$ mit $j < k$ einer k-mal differenzierbaren Funktion stetig; insbesondere ist $C^{k+1}(I) \subseteq C^k(I)$. Für die k-te Ableitung selbst gilt das nicht: (G2) zeigt eine differenzierbare Funktion mit unstetiger Ableitung. Die Schreibweise $\frac{df}{dx}$ von Leibniz bezeichnet dasselbe wie f'; sie ist bei der Kettenregel bequem, wird hier aber nicht benutzt.

10.2 Rechenregeln

Satz 10.5 (Summe, Produkt, Quotient). Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g$, λf und fg in a differenzierbar mit

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \qquad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Hat g keine Nullstelle in I, so ist auch f/g in a differenzierbar, und

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis. Nach Satz 10.2 gibt es $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$, stetig in a, mit $\varphi(a) = f'(a)$, $\psi(a) = g'(a)$ und

$$f(x) = f(a) + \varphi(x)(x-a), \qquad g(x) = g(a) + \psi(x)(x-a).$$

Summe und Vielfaches: $(f+g)(x) = (f+g)(a) + (\varphi+\psi)(x)(x-a)$ und $(\lambda f)(x) = (\lambda f)(a) + \lambda\varphi(x)(x-a)$; die Funktionen $\varphi+\psi$ und $\lambda\varphi$ sind in a stetig mit den Werten $f'(a)+g'(a)$ und $\lambda f'(a)$.

Produkt: Durch Einschieben von $f(a)g(x)$ wird

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \big(f(x)-f(a)\big)g(x) + f(a)\big(g(x)-g(a)\big) = \big[\varphi(x)g(x) + f(a)\psi(x)\big](x-a).$$

Die Klammer ist in a stetig, weil g dort nach Folgerung 10.3 stetig ist, und hat in a den Wert $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Satz 10.2 liefert die Behauptung.

Quotient: Zunächst für $1/g$. Es ist

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} = -\frac{g(x)-g(a)}{g(x)g(a)} = -\frac{\psi(x)}{g(x)g(a)}\,(x-a).$$

Der Faktor vor $(x-a)$ ist in a stetig mit dem Wert $-g'(a)/g(a)^2$. Also ist $(1/g)'(a) = -g'(a)/g(a)^2$. Mit der Produktregel für $f \cdot \frac{1}{g}$ folgt

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \qquad \square$$

Ist nur $g(a) \neq 0$ vorausgesetzt, so hat g nach Folgerung 10.3 und Lemma 7.13 auf $I \cap B_\delta(a)$ für ein $\delta > 0$ keine Nullstelle. Dieses Intervall enthält a und mehr als einen Punkt. Die Einschränkungen von f und g darauf sind nach der Bemerkung über Lokalität in a differenzierbar, mit denselben Ableitungen, und die Quotientenregel gilt für ihren Quotienten. Auf die Wahl von δ kommt es dabei nach derselben Bemerkung nicht an.

Folgerungen. Durch Induktion über n mit der Produktregel folgt $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, in Übereinstimmung mit Beispiel (b). Mit der Quotientenregel ist $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

auf $(0,\infty)$ und auf $(-\infty,0)$. Jedes Polynom ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und seine Ableitung ist ein Polynom kleineren Grades: $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k c_k x^{k-1}$. Rationale Funktionen sind auf jedem Intervall ohne Nullstelle des Nenners differenzierbar. Insbesondere sind Polynome in $C^\infty(\mathbb{R})$, und für ein Polynom vom Grad n ist die $(n+1)$-te Ableitung null.

Ferner sind mit $f, g \in C^k(I)$ auch $f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) und fg in $C^k(I)$. Für $k=0$ ist das Satz 7.11. Gilt es für k, und sind $f, g \in C^{k+1}(I)$, so ist nach Satz 10.5 etwa $(fg)' = f'g + fg'$; hier liegen f', g' und wegen $C^{k+1}(I) \subseteq C^k(I)$ auch f, g in $C^k(I)$, nach Induktionsvoraussetzung also auch $(fg)'$, und damit ist $fg \in C^{k+1}(I)$. Dabei ist benutzt, dass eine Funktion h genau dann $(k+1)$-mal differenzierbar ist, wenn h differenzierbar und h' k-mal differenzierbar ist, und dass dann $h^{(k+1)} = (h')^{(k)}$ gilt; das folgt aus Definition 10.4 durch Induktion über k. Für $f+g$ und λf verläuft der Schluss ebenso. $C^k(I)$ ist also ein Vektorraum, der unter Produkten abgeschlossen ist, und dasselbe gilt für $C^\infty(I)$.

Satz 10.6 (Kettenregel). Seien I, J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(I) \subseteq J$ und $g : J \to \mathbb{R}$. Ist f in a differenzierbar und g in $b = f(a)$, so ist $g \circ f$ in a differenzierbar, und

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a).$$

Beweisidee. Der naheliegende Ansatz, den Differenzenquotienten mit $\frac{f(x)-f(a)}{f(x)-f(a)}$ zu erweitern, scheitert, wenn $f(x) = f(a)$ für Punkte x beliebig nahe bei a gilt. Die Fassung (2) von Satz 10.2 kennt dieses Problem nicht, weil sie nicht dividiert.

Beweis. Nach Satz 10.2 gibt es $\varphi : I \to \mathbb{R}$, stetig in a mit $\varphi(a) = f'(a)$, und $\psi : J \to \mathbb{R}$, stetig in b mit $\psi(b) = g'(b)$, so dass

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a), \qquad g(y) - g(b) = \psi(y)(y-b)$$

für alle $x \in I$, $y \in J$. Setzt man $y = f(x)$ ein, so folgt

$$g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x))\big(f(x) - f(a)\big) = \psi(f(x))\,\varphi(x)\,(x-a).$$

Die Funktion $x \mapsto \psi(f(x))\varphi(x)$ ist in a stetig: f ist in a stetig (Folgerung 10.3), ψ in $f(a)$, also $\psi \circ f$ in a, und das Produkt stetiger Funktionen ist stetig (Satz 7.11). Ihr Wert in a ist $g'(b)f'(a)$. Satz 10.2 liefert die Behauptung. □

Beispiel. Für $h(x) = (1+x^2)^5$ ist $h = g \circ f$ mit $f(x) = 1+x^2$ und $g(y) = y^5$, also $h'(x) = 5(1+x^2)^4 \cdot 2x$.

Bemerkung (Allgemeinheit). Satz 10.2, Folgerung 10.3, Satz 10.5 und Satz 10.6 gelten mit denselben Beweisen für Funktionen auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in D$, der Häufungspunkt von D ist; in Satz 10.6 tritt an die Stelle von J eine Menge $E \supseteq f(D)$, in der $b = f(a)$ Häufungspunkt ist. Die Beweise benutzen vom Definitionsbereich nur diese Eigenschaft. Ab Abschnitt 10.3 werden Intervalle wesentlich gebraucht.

10.3 Ableitung der Umkehrfunktion

Ist f stetig und streng monoton auf I, so ist $J = f(I)$ ein Intervall (Satz 7.19), $f : I \to J$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : J \to I$ ist stetig (Satz 7.26 (1) und (2), für fallendes f in der dort genannten entsprechenden Fassung). Der Graph von g ist der an der Winkelhalbierenden gespiegelte Graph von f; die Spiegelung vertauscht die Rollen der Koordinaten und macht aus der Steigung m die Steigung $1/m$. Waagerechte Tangenten werden senkrecht.

Satz 10.7 (Umkehrfunktion). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $J = f(I)$ und $g : J \to I$ die Umkehrfunktion. Sei $a \in I$ und $b = f(a)$.

1. Ist f in a differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$, so ist g in b differenzierbar, und $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'(g(b))}$.
2. Ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = 0$, so ist g in b nicht differenzierbar.

Beweis. Da I mehr als einen Punkt enthält und f injektiv ist, enthält auch J mehr als einen Punkt.

(1) Sei φ wie in Satz 10.2 (2), also $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$, φ stetig in a, $\varphi(a) = f'(a)$. Für $x \neq a$ ist $f(x) \neq f(a)$, also $\varphi(x) \neq 0$; ferner $\varphi(a) = f'(a) \neq 0$. Damit hat φ keine Nullstelle. Für $y \in J$ setzt man $x = g(y)$; dann ist $y - b = f(x) - f(a) = \varphi(g(y))\,(g(y) - g(b))$, also

$$g(y) - g(b) = \frac{1}{\varphi(g(y))}\,(y - b) \qquad (y \in J).$$

Die Funktion $y \mapsto 1/\varphi(g(y))$ ist in b stetig, denn g ist in b stetig, φ in $g(b) = a$ stetig und ohne Nullstelle. Ihr Wert in b ist $1/f'(a)$. Nach Satz 10.2 ist g in b differenzierbar mit $g'(b) = 1/f'(a)$.

(2) Wäre g in b differenzierbar, so nach der Kettenregel auch $g \circ f = \mathrm{id}_I$ in a, mit $1 = (g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = 0$. Widerspruch. □

Die Stetigkeit von g in b ging wesentlich ein: Sie sorgt dafür, dass $g(y) \to a$ für $y \to b$. Sie stammt aus Satz 7.26 (2) und braucht dort weder die Stetigkeit von f noch die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, denn eine monotone Funktion, deren Bild ein Intervall ist, ist stetig (Lemma 7.24); nach Folgerung 7.30 ist die Umkehrfunktion jeder streng monotonen Funktion auf einem Intervall stetig. Die Stetigkeit von f wird an anderer Stelle gebraucht: Nach Satz 7.19 ist $J = f(I)$ ein Intervall, und dort, über den Zwischenwertsatz, geht die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein. Dass J ein Intervall ist, macht g zu einer Funktion auf einem Intervall, wie sie die Sätze dieser Einheit voraussetzen.

Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = x^n$ auf $[0, \infty)$ stetig und streng monoton wachsend mit Bild $[0, \infty)$; die Umkehrfunktion ist $g(y) = \sqrt[n]{y}$ (Folgerung 7.27). Für $y > 0$ ist $f'(g(y)) = n\,g(y)^{n-1} \neq 0$, also $g'(y) = \dfrac{1}{n\,g(y)^{n-1}}$. Mit $g(y) = y^{1/n}$ (Satz 9.16 (2)) und Satz 9.17 (1)

ist das $\frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}$, in Übereinstimmung mit Satz 10.9 (3). In $y = 0$ ist $f'(0) = 0$ für $n \geq 2$, und $\sqrt[n]{\ }$ ist dort nicht differenzierbar, wie Teil (2) voraussagt.

10.4 Die Ableitungen der elementaren Funktionen

Einheit 9 hat exp, sin und cos über die Exponentialreihe eingeführt. Ihre Ableitungen folgen aus der Funktionalgleichung (Satz 9.4) und einer einzigen Abschätzung in der Nähe von 0, die schon in Einheit 9 bewiesen ist. Dort lieferte sie in Satz 9.6 den Grenzwert $\frac{\exp(z)-1}{z} \to 1$ (die Stetigkeit von exp beruht dort auf der Abschätzung mit $N = 0$); hier wird aus ihr die Ableitung, und zwar für exp, sin und cos zugleich.

Lemma 10.8. Für jede komplexe Zahl z mit $|z| \leq 1$ gilt

$$|\exp(z) - 1 - z| \leq |z|^2.$$

Beweis. Das ist Lemma 9.3 mit $N = 1$, das die Abschätzung sogar für $|z| \leq \frac{3}{2}$ liefert; für $z \neq 0$ ist es die Abschätzung aus Satz 9.6, multipliziert mit $|z|$. □

Satz 10.9 (Exponentialfunktion, Logarithmus, Potenzen).

1. exp ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und $\exp' = \exp$.
2. ln ist auf $(0, \infty)$ differenzierbar, und $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
3. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto x^\alpha$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
4. Für $c > 0$ ist $x \mapsto c^x = \exp(x \ln c)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(c^x)' = c^x \ln c$.

Beweis. (1) Für $x \in \mathbb{R}$ und $0 < |h| \leq 1$ gilt mit der Funktionalgleichung und Lemma 10.8

$$\Big|\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} - \exp(x)\Big| = \exp(x)\, \frac{|\exp(h) - 1 - h|}{|h|} \leq \exp(x)\, |h|,$$

und die rechte Seite strebt für $h \to 0$ gegen 0.

(2) exp ist stetig, streng monoton wachsend, bildet $\mathbb{R}$ auf $(0, \infty)$ ab (Satz 9.8) und hat die nirgends verschwindende Ableitung exp. Nach Satz 10.7 ist ln in jedem $y > 0$ differenzierbar mit $\ln'(y) = 1/\exp(\ln y) = 1/y$.

(3) $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. Nach Kettenregel, (1) und (2) ist $(x^\alpha)' = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha\, x^\alpha\, x^{-1}$. Nach der Funktionalgleichung ist $x^\alpha x^{-1} = \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \exp((\alpha - 1) \ln x) = x^{\alpha-1}$.

(4) Kettenregel mit der inneren Funktion $x \mapsto x \ln c$. □

Für $\alpha = \frac{1}{n}$ stimmt (3) mit dem Beispiel nach Satz 10.7 überein, für $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit den Folgerungen nach Satz 10.5; nach Satz 9.16 stimmt x^α in diesen Fällen mit der elementaren

Potenz überein.

Für $\alpha > 0$ ist $x \mapsto x^\alpha$ mit $0^\alpha = 0$ auf $[0, \infty)$ stetig (Absatz nach Satz 9.17). Im Endpunkt 0 ist der Differenzenquotient $\frac{x^\alpha - 0}{x} = x^{\alpha-1}$ für $x > 0$ (Satz 9.17 (1)). Für $\alpha > 1$ strebt er für $x \to 0+$ gegen 0, nach demselben Absatz mit dem Exponenten $\alpha - 1 > 0$; die Funktion ist dann in 0 differenzierbar mit Ableitung $0 = \alpha \cdot 0^{\alpha-1}$. Für $\alpha = 1$ ist die Ableitung 1. Für $0 < \alpha < 1$ ist $x^{\alpha-1} = 1/x^{1-\alpha}$, und wegen $x^{1-\alpha} \to 0$ ist das unbeschränkt; die Funktion ist in 0 nicht differenzierbar, wie für $\alpha = \frac{1}{2}$ in Beispiel (d).

Satz 10.10 (Sinus und Kosinus). sin und cos sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Beweisidee. Man differenziert $x \mapsto \exp(ix)$ wie im Reellen und nimmt Real- und Imaginärteil. In der Sprache des Schlussteils von Abschnitt 10.6 ist das Satz 10.23 mit $c = i$ zusammen mit Lemma 10.22. Hier wird die Abschätzung direkt auf die beiden Teile übertragen; der Beweis braucht außer der Funktionalgleichung und $|\exp(ix)| = 1$ nur Lemma 10.8, insbesondere keinen der Grenzwerte aus Folgerung 9.25.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und h reell mit $0 < |h| \le 1$. Wegen $\exp(i(x+h)) = \exp(ix)\exp(ih)$, $|\exp(ix)| = 1$ und Lemma 10.8 mit $z = ih$ gilt

$$\Big|\frac{\exp(i(x+h)) - \exp(ix)}{h} - i\exp(ix)\Big| = \frac{|\exp(ih) - 1 - ih|}{|h|} \le |h|.$$

Der Ausdruck in den Betragsstrichen hat den Realteil $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} + \sin x$ und den Imaginärteil $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} - \cos x$, denn $i\exp(ix) = i\cos x - \sin x$. Wegen $|\operatorname{Re} w| \le |w|$ und $|\operatorname{Im} w| \le |w|$ (Satz 3.9 (3)) folgt

$$\Big|\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} + \sin x\Big| \le |h|, \qquad \Big|\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x\Big| \le |h|.$$

Für $h \to 0$ ergibt sich die Behauptung. □

Damit sind exp, sin, cos in $C^\infty(\mathbb{R})$: $\exp^{(k)} = \exp$, und die Ableitungen von sin wiederholen sich mit der Periode 4: sin, cos, −sin, −cos, sin, … Ebenso ist $\ln \in C^\infty((0,\infty))$ mit $\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\, x^{-k}$ für $k \ge 1$ (Induktion mit Satz 10.9 (3)). Die Ableitungen der Arkusfunktionen gibt Folgerung 10.19.

Beispiel. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$ und $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1$. Folgerung 9.25 (3) und Satz 9.6 haben beide Grenzwerte unmittelbar bewiesen; hier ergeben sie sich erneut, ohne Zirkel, denn die Beweise von Satz 10.9 (1) und Satz 10.10 benutzen außer Satz 9.4 und $|\exp(ix)| = 1$ nur Lemma 10.8, nicht diese Grenzwerte. Jeder Grenzwert eines Differenzenquotienten einer bekannten Ableitung ist auf diese Weise erledigt.

10.5 Lokale Extrema

Zurück zur Leitfrage. An der gesuchten Stelle ist die Laufzeit T nicht größer als in allen benachbarten Punkten. Diese Eigenschaft hängt nur vom Verhalten der Funktion nahe der Stelle ab, und solches lokales Verhalten misst die Ableitung. Die folgende Definition trennt das lokale vom globalen Extremum.

Definition 10.11. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in D$ heißt *lokale Maximalstelle* von f, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$; *strikte lokale Maximalstelle*, wenn dort $f(x) < f(a)$ für $x \neq a$ gilt. Entsprechend *(strikte) lokale Minimalstelle*. Gilt $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$, so heißt a *globale Maximalstelle*. *Extremstelle* ist der Oberbegriff.

Satz 10.12 (Fermat). Sei $f : I \to \mathbb{R}$, a ein innerer Punkt von I und eine lokale Extremstelle von f. Ist f in a differenzierbar, so gilt $f'(a) = 0$.

Beweis. Sei a lokale Maximalstelle; für eine Minimalstelle betrachte man $-f$. Wähle $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq I$ und $f(x) \leq f(a)$ für $x \in B_\delta(a)$. Für $a < x < a + \delta$ ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$, für $a - \delta < x < a$ ist der Quotient ≥ 0. Der Grenzwert $f'(a)$ ist nach Lemma 7.8 zugleich der Grenzwert von rechts und von links, und beim Grenzübergang bleiben die Ungleichungen erhalten (Satz 7.6 (3), angewandt auf die Einschränkungen auf $I \cap (a, a + \delta)$ und $I \cap (a - \delta, a)$, Lemma 7.28 (1)). Also ist $f'(a) \leq 0$ und $f'(a) \geq 0$. □

Für die Leitfrage heißt das: Liegt die Minimalstelle von T im Inneren von $[0, d]$, so ist sie eine Nullstelle von T'. Damit ist die Suche auf eine Gleichung zurückgeführt. Ob diese Gleichung nur eine Lösung hat und ob ihre Lösung wirklich ein Minimum ist, sagt Satz 10.12 nicht; dafür braucht man einen Schluss von der Ableitung auf den Verlauf der Funktion über ein ganzes Intervall, und den liefert Abschnitt 10.6.

Die Voraussetzung, dass a ein innerer Punkt ist, ist nötig: In einem Endpunkt kann die Ableitung von null verschieden sein (G4). Die Umkehrung gilt nicht: $f'(a) = 0$ ist keine hinreichende Bedingung (G4). Für die Suche nach Extremstellen einer stetigen Funktion auf $[a, b]$, die auf (a, b) differenzierbar ist, folgt: Jede globale Extremstelle ist ein Endpunkt oder eine Nullstelle von f'. Hat f' nur endlich viele Nullstellen, so genügt der Vergleich endlich vieler Funktionswerte; der Satz vom Maximum und Minimum garantiert, dass unter ihnen der größte und der kleinste Wert sind.

Bemerkung (Extremstellen in Endpunkten). Ist der linke Endpunkt a von I ein Element von I und eine lokale Maximalstelle von f, und ist f in a differenzierbar, so ist $f'(a) \leq 0$: Es gibt $\delta > 0$ mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in I \cap B_\delta(a)$; für diese $x \neq a$ ist $x > a$, also der Differenzenquotient ≤ 0. Nach Lemma 7.28 (1) hat er auch auf $(I \cap B_\delta(a)) \setminus \{a\}$ den Grenzwert $f'(a)$, und Satz 7.6 (3) gibt $f'(a) \leq 0$. Im rechten Endpunkt gilt entsprechend $f' \geq 0$, für Minimalstellen jeweils die umgekehrte Ungleichung. Gleichheit mit 0 wird nicht erzwungen, wie (G4) zeigt.

Satz 10.13 (Rolle). Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16; $[a, b]$ ist kompakt nach Folgerung 8.28) nimmt f auf $[a, b]$ ein Maximum M und ein Minimum m an. Ist $M = m$, so ist f konstant, und jedes $\xi \in (a, b)$ leistet das Verlangte. Ist $M > m$, so wird wegen $f(a) = f(b)$ mindestens einer der beiden Werte in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ angenommen. Dieser Punkt ist innerer Punkt von $[a, b]$ und lokale Extremstelle; nach Satz 10.12 ist $f'(\xi) = 0$. □

An dieser Stelle tritt der rote Faden des Kurses zutage. Der Beweis benutzt den Satz vom Maximum und Minimum, also die Kompaktheit von $[a, b]$, also die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Über $\mathbb{Q}$, mit Definition 10.1 auf Mengen $D \subseteq \mathbb{Q}$ angewandt, ist der Satz von Rolle falsch ((G5) (c)), und mit ihm der Mittelwertsatz, dessen Spezialfall er ist. Auch der Schluss von $f' = 0$ auf Konstanz (Folgerung 10.15 (1)) scheitert dort. Auf $D = \mathbb{Q} \cap [0, 2]$ sei $f(x) = 0$ für $x^2 < 2$ und $f(x) = 1$ für $x^2 > 2$; nach Satz 2.9 ist das für jedes $x \in D$ erklärt. Jeder Punkt $a \in D$ ist nach Satz 2.31 Häufungspunkt von D. Wegen $a^2 - 2 \neq 0$ gibt es nach Lemma 7.13, angewandt auf $t \mapsto t^2 - 2$, ein $\delta > 0$, so dass $x^2 - 2$ für alle $x \in B_\delta(a)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $a^2 - 2$. Auf $D \cap B_\delta(a)$ ist f also konstant, der Differenzenquotient dort null, und $f'(a) = 0$. Trotzdem ist $f(0) = 0 \neq 1 = f(2)$. Ob und welche weiteren Aussagen dieser Einheit über $\mathbb{Q}$ falsch werden, wird hier nicht untersucht.

10.6 Mittelwertsätze und Monotonie

Satz 10.14 (Mittelwertsatz). Seien $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Beweisidee. Man zieht von f die Sekante ab und wendet Rolle an. Geometrisch: Irgendwo ist die Tangente parallel zur Sekante.

Beweis. $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ ist stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b), und $h(a) = f(a) = h(b)$. Nach Satz 10.13 gibt es $\xi \in (a, b)$ mit $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Über ξ sagt der Satz nur, dass es existiert. Dennoch ist er das wichtigste Werkzeug dieses Kapitels: Er übersetzt Information über die Ableitung, die in jedem Punkt nur lokal etwas aussagt, in Information über Funktionswerte an weit entfernten Stellen.

Folgerung 10.15 (Monotonie). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in jedem inneren Punkt von I differenzierbar. Dann gilt:

1. Ist $f'(x) = 0$ für alle inneren Punkte x, so ist f konstant.
2. Ist $f'(x) \geq 0$ für alle inneren Punkte, so ist f monoton wachsend; ist $f'(x) > 0$, so ist f streng monoton wachsend. Entsprechend mit $\leq$, $<$ und fallend.
3. Ist $|f'(x)| \leq L$ für alle inneren Punkte, so gilt $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ für alle $x, y \in I$.
4. Ist f monoton wachsend, so ist $f'(x) \geq 0$ in jedem inneren Punkt x.

Beweis. Seien $x < y$ in I. Dann ist $f|_{[x,y]}$ stetig (Lemma 7.28 (1)), und jeder Punkt von (x, y) ist innerer Punkt von I, in dem f und nach der Bemerkung über Lokalität auch $f|_{[x,y]}$ differenzierbar ist, mit derselben Ableitung. Der Mittelwertsatz liefert $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Daraus folgen (1), (2) und (3) unmittelbar mit (O2) und (O5). (4): Für $t > x$ ist $\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq 0$; der Grenzwert $f'(x) = f'_+(x)$ ist nach Satz 7.6 (3) ebenfalls ≥ 0. □

Folgerung 10.15 (3) besagt: Eine Funktion mit beschränkter Ableitung ist Lipschitzstetig im Sinn von Definition 8.19. Strenge Monotonie erzwingt nicht $f' > 0$: $x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend mit $f'(0) = 0$ (G3). Dass I ein Intervall ist, geht in (1) wesentlich ein (G6).

Beispiel. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, denn $|\sin' | = |\cos| \leq 1$ (wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$). Folgerung 9.25 (2) hat das mit den Additionstheoremen gezeigt.

Zwischenbilanz. Fermat führt die Suche nach Extremstellen auf Nullstellen der Ableitung zurück; der Mittelwertsatz und Folgerung 10.15 schließen vom Vorzeichen der Ableitung auf das Wachsen und Fallen der Funktion. Beides zusammen beantwortet die Leitfrage; Beispiel 1 in Abschnitt 10.9 führt es aus. Der Rest dieses Abschnitts und Abschnitt 10.7 schärfen das Werkzeug für Grenzwerte.

Der Mittelwertsatz vergleicht eine Funktion mit der Variablen x. Für die Grenzwerte in Abschnitt 10.7 und die Restglieder in Einheit 11 muss man zwei Funktionen miteinander vergleichen. Geometrisch: Durchläuft der Punkt $(g(t), f(t))$ für $t \in [a, b]$ eine Kurve in der Ebene, so gibt es eine Stelle ξ, an der der Richtungsvektor $(g'(\xi), f'(\xi))$ zur Sehne von $(g(a), f(a))$ nach $(g(b), f(b))$ parallel ist, sofern er dort nicht verschwindet. Die Gleichung des folgenden Satzes sagt genau das: Zwei Vektoren (u_1, u_2) und (v_1, v_2) sind parallel, wenn $u_1 v_2 = u_2 v_1$.

Satz 10.16 (verallgemeinerter Mittelwertsatz von Cauchy). Seien $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in (a, b)$ mit

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

Ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist $g(b) \neq g(a)$, und $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Beweis. $h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$ ist stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Ausmultiplizieren gibt $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b)$. Nach Rolle gibt es ξ mit $h'(\xi) = 0$, und das ist die Gleichung. Ist $g' \neq 0$ auf (a,b), so ist $g(b) \neq g(a)$, denn sonst gäbe es nach Rolle eine Nullstelle von g'; man darf dann durch $g'(\xi)$ und $g(b) - g(a)$ teilen. □

Für $g(x) = x$ ist das der Mittelwertsatz. Teilt man die Gleichungen des Mittelwertsatzes für f und für g durcheinander, erhält man den Satz nicht, denn die beiden Zwischenstellen sind im Allgemeinen verschieden. Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ auf $[0,1]$ liefert der Mittelwertsatz die Stelle $\frac{1}{2}$ für f und die Stelle $\frac{1}{\sqrt{3}}$ für g; die Gleichung des Satzes lautet $3\xi^2 = 2\xi$ und gilt in $(0,1)$ nur für $\xi = \frac{2}{3}$, also an keiner der beiden.

Eine Ableitung muss nicht stetig sein (G2). Sie hat aber die Zwischenwerteigenschaft, als ob sie es wäre.

Satz 10.17 (Darboux). Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Liegt c echt zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$, so gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = c$.

Beweisidee. Den Zwischenwertsatz kann man auf f' nicht anwenden, weil f' nicht stetig sein muss. Man wendet stattdessen den Satz vom Maximum und Minimum auf die stetige Funktion $f(x) - cx$ an und zeigt mit dem Vorzeichen ihrer Ableitung in den Endpunkten, dass das Minimum im Inneren liegt; dort greift Fermat.

Beweis. Sei zunächst $f'(a) < c < f'(b)$. Die Funktion $h(x) = f(x) - cx$ ist differenzierbar mit $h'(a) < 0 < h'(b)$. Als stetige Funktion (Folgerung 10.3) nimmt h nach Satz 8.16 auf $[a,b]$ ein Minimum in einem Punkt ξ an. Wegen $h'(a) < 0$ ist $\frac{h(x)-h(a)}{x-a} < 0$ für alle $x \in (a,b)$ nahe genug bei a, also $h(x) < h(a)$ für solche x; somit ist $\xi \neq a$. Wegen $h'(b) > 0$ ist $\frac{h(x)-h(b)}{x-b} > 0$ für $x < b$ nahe bei b, und wegen $x - b < 0$ folgt $h(x) < h(b)$; somit ist $\xi \neq b$. (Das ist die Bemerkung über Extremstellen in Endpunkten, durch Kontraposition gelesen: Aus $h'(a) < 0$ folgt, dass a keine lokale Minimalstelle ist.) Also ist $\xi \in (a,b)$ eine lokale Extremstelle im Inneren, und nach Satz 10.12 gilt $0 = h'(\xi) = f'(\xi) - c$. Im Fall $f'(a) > c > f'(b)$ wende man das Ergebnis auf $-f$ und $-c$ an. □

Insbesondere ist die Signumfunktion keine Ableitung (G9). Der folgende Satz ergänzt das Bild: Wo die Ableitung einen Grenzwert hat, ist sie dort auch stetig.

Folgerung 10.18 (Grenzwert der Ableitung). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ stetig und in jedem Punkt von $I \setminus \{a\}$ differenzierbar, und es existiere $c = \lim_{x \to a} f'(x)$. Dann ist f in a differenzierbar mit $f'(a) = c$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so gewählt, dass $|f'(t) - c| < \varepsilon$ für alle $t \in I$ mit $0 < |t - a| < \delta$. Sei $x \in I$ mit $0 < |x - a| < \delta$. Auf dem abgeschlossenen Intervall mit den Endpunkten a und x ist f stetig (in a nach Voraussetzung, sonst nach Folgerung 10.3), im Inneren differenzierbar. Der Mittelwertsatz liefert ein ξ echt zwischen a und x mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$; wegen $0 < |\xi - a| < \delta$ ist der Abstand zu c kleiner als ε. □

Ist a ein Endpunkt von I, so sind Voraussetzung und Ergebnis von Folgerung 10.18 von selbst einseitig; der Beweis bleibt wörtlich derselbe.

Eine Ableitung hat keine Sprungstellen. Das folgt schon aus Folgerung 10.18: Existieren in einem inneren Punkt a beide einseitigen Grenzwerte von f', so wende man Folgerung 10.18 auf die Einschränkungen von f auf $I \cap (-\infty, a]$ und auf $I \cap [a, \infty)$ an. Nach der Bemerkung über Lokalität haben diese außerhalb von a die Ableitung f' und in a die Ableitungen $f'_-(a)$ und $f'_+(a)$, die beide gleich $f'(a)$ sind. Also sind beide einseitigen Grenzwerte von f' gleich $f'(a)$. Unstetig kann eine Ableitung nur so sein, dass ein einseitiger Grenzwert nicht als reelle Zahl existiert, wie in (G2). Auch ein uneigentlicher Grenzwert ist ausgeschlossen: Strebte etwa $f'(x) \to \infty$ für $x \to a+$, so wäre wie im Beweis von Folgerung 10.18 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$ mit $a < \xi < x$, und dieser Quotient wäre für $x \to a+$ unbeschränkt, im Widerspruch zur Existenz von $f'_+(a)$. Der Satz von Darboux schließt Sprungstellen auf einem zweiten Weg aus.

Beispiel. Sei $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ und $f(x) = 0$ für $x < 0$. Dann ist f stetig, auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit $f'(x) = 2x$ für $x > 0$ und $f'(x) = 0$ für $x < 0$ (Bemerkung über Lokalität), und $f'(x) \to 0$ für $x \to 0$. Nach Folgerung 10.18 ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$, ohne dass man den Differenzenquotienten in 0 ausrechnen muss.

Folgerung 10.19 (Arkusfunktionen).

1. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar mit $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ und in ± 1 nicht differenzierbar. Ebenso ist $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $|y| < 1$.
2. $\tan$ ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ differenzierbar mit $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$, und $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ist differenzierbar mit $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

Beweis. Monotonie, Bilder und Stetigkeit der Umkehrfunktionen stammen aus Satz 9.30 und Satz 9.31; zu zeigen sind nur die Ableitungen.

(1) Sei $y \in (-1, 1)$ und $x = \arcsin y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dort ist $\cos x > 0$, also $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2} \neq 0$. Satz 10.7 (1), angewandt auf sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$, mit $\sin' = \cos$ und der Bemerkung über Lokalität, gibt $\arcsin'(y) = 1/\cos x$. In den Endpunkten $x = \pm\pi/2$ hat die Einschränkung von sin nach derselben Bemerkung die Ableitung $\cos(\pm\pi/2) = 0$; nach Satz 10.7 (2) ist arcsin in ± 1 nicht differenzierbar. Für arccos verläuft der Beweis ebenso mit cos auf $[0, \pi]$, $\cos' = -\sin$ und $\sin x = \sqrt{1 - y^2} > 0$ für

$x = \arccos y \in (0, \pi)$.

(2) Auf $(-\pi/2, \pi/2)$ hat cos keine Nullstelle. Die Quotientenregel gibt $\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, und das ist nie null. Satz 10.7 (1) gibt $\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$ für $y = \tan x$. □

Satz 9.30 hat die Monotonie von sin auf $[-\pi/2, \pi/2]$ mit den Additionstheoremen bewiesen. Mit der Ableitung ist sie eine Zeile: $\sin' = \cos > 0$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$, und Folgerung 10.15 (2) schließt ab.

Bemerkung (Funktionen mit komplexen Werten). Sei $f : I \to \mathbb{C}$. Mit Grenzwerten im Sinn der Bemerkung über Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ nach Folgerung 7.12 wird Definition 10.1 wörtlich übernommen: f heißt in $a \in I$ differenzierbar, wenn $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ in $\mathbb{C}$ existiert. Satz 10.2 (mit $c \in \mathbb{C}$ und $\varphi : I \to \mathbb{C}$), Folgerung 10.3, Definition 10.4, Satz 10.5 (mit $\lambda \in \mathbb{C}$) und Satz 10.6 (mit reellwertigem f und $g : J \to \mathbb{C}$) gelten mit denselben Beweisen, denn diese benutzen nur Grenzwert- und Stetigkeitsregeln, die nach jener Bemerkung auch für Werte in $\mathbb{C}$ gelten. Ebenso die Bemerkung über Lokalität, mit Lemma 7.28 für Werte in $\mathbb{C}$.

Lemma 10.22. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $a \in I$ differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ es sind, und dann ist $f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i\,(\operatorname{Im} f)'(a)$.

Beweis. Sei $q(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ für $x \in I \setminus \{a\}$. Weil $x - a$ reell ist, sind $\operatorname{Re} q(x)$ und $\operatorname{Im} q(x)$ die Differenzenquotienten von $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$. Für $c \in \mathbb{C}$ und $w = q(x) - c$ gilt nach Satz 3.9 (3) und (4)

$$\max\{|\operatorname{Re} w|,\ |\operatorname{Im} w|\} \le |w| \le |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w|,$$

mit $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} q(x) - \operatorname{Re} c$ und $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} q(x) - \operatorname{Im} c$. Die linke Ungleichung zeigt: Aus $q(x) \to c$ folgen $\operatorname{Re} q(x) \to \operatorname{Re} c$ und $\operatorname{Im} q(x) \to \operatorname{Im} c$, denn ein δ, das in Definition 7.3 für q und ε taugt, taugt auch für die beiden Teile. Die rechte zeigt die Umkehrung: Gelten $\operatorname{Re} q(x) \to u$ und $\operatorname{Im} q(x) \to v$, so wähle man zu $\varepsilon > 0$ ein δ, das für beide Teile mit $\frac{\varepsilon}{2}$ taugt; dann ist $|q(x) - (u + iv)| < \varepsilon$ für $0 < |x - a| < \delta$. □

Satz 10.23. Für $c \in \mathbb{C}$ ist $x \mapsto \exp(cx)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung $x \mapsto c \exp(cx)$.

Beweis. Für $c = 0$ ist die Funktion konstant. Sei $c \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und h reell mit $0 < |h| \le 1/|c|$, also $|ch| \le 1$. Nach Satz 9.4 und Lemma 10.8 mit $z = ch$ ist

$$\Big|\frac{\exp(c(x+h)) - \exp(cx)}{h} - c\exp(cx)\Big| = |\exp(cx)|\,\frac{|\exp(ch) - 1 - ch|}{|h|} \le |\exp(cx)|\,|c|^2\,|h|,$$

und die rechte Seite strebt für $h \to 0$ gegen 0. □

Für $c = 1$ ist das Satz 10.9 (1). Für $c = i$ ist $(\exp(ix))' = i\exp(ix) = -\sin x + i\cos x$, und Lemma 10.22 gibt Satz 10.10 zurück. Für $c = \alpha + i\beta$ mit reellen α, β ist $\exp(cx) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ nach Satz 9.4, Definition 9.20 und Satz 9.16 (3); Real- und Imaginärteil von $c\exp(cx)$ sind nach Lemma 10.22 die Ableitungen von $e^{\alpha x}\cos\beta x$ und $e^{\alpha x}\sin\beta x$, nämlich $e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)$ und $e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)$.

Nicht übertragen lassen sich die Sätze, die die Anordnung der Werte benutzen: Satz 10.7, Satz 10.12 bis Satz 10.14, Satz 10.16, Satz 10.17 und Satz 10.20, ebenso Folgerung 10.15 (2) und (4). Die Funktion $f(x) = \exp(ix)$ auf $[0, 2\pi]$ hat $f(0) = f(2\pi) = 1$ (Satz 9.28 (1)), aber $|f'(x)| = |i\exp(ix)| = 1$ für alle x (Satz 9.21 (1)); der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz in Gleichungsform sind für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ falsch. Folgerung 10.15 (1) bleibt richtig: Man wendet sie nach Lemma 10.22 auf Real- und Imaginärteil an, die nach der Bemerkung über Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ nach Folgerung 7.12 stetig sind. Auch die Schranke in Folgerung 10.15 (3) bleibt richtig, mit derselben Konstanten:

Folgerung 10.24 (Schrankensatz). Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und in jedem inneren Punkt von I differenzierbar, und es gelte $|f'(x)| \le L$ für alle inneren Punkte x. Dann gilt $|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y|$ für alle $x, y \in I$.

Beweis. Seien $x < y$ in I und $w = f(y) - f(x)$; für $w = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei $u = \bar{w}/|w|$. Dann ist $|u| = 1$ (Satz 3.9 (2)) und $uw = w\bar{w}/|w| = |w|$ (Definition 3.7). Die Funktion $h = \mathrm{Re}(uf) : I \to \mathbb{R}$ ist stetig (Bemerkung nach Folgerung 7.12) und nach Satz 10.5 für Werte in $\mathbb{C}$ und Lemma 10.22 in jedem inneren Punkt differenzierbar mit $h' = \mathrm{Re}(uf')$. Der Mittelwertsatz, angewandt auf $h|_{[x,y]}$ wie im Beweis von Folgerung 10.15, liefert $\xi \in (x, y)$ mit $h(y) - h(x) = h'(\xi)(y - x)$. Links steht $\mathrm{Re}(uw) = |w|$, rechts nach Satz 3.9 (2) und (3) höchstens $|u\,f'(\xi)|\,(y - x) = |f'(\xi)|\,(y - x) \le L\,(y - x)$. □

Für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ verliert der Mittelwertsatz also seine Gleichungsform, schon bei einer Veränderlichen; die Abschätzung bleibt. In dieser Form wird er für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ benutzt.

10.7 Die Regeln von de l'Hospital

Viele Grenzwerte haben die Gestalt $\lim f(x)/g(x)$, bei der Zähler und Nenner beide gegen 0 oder beide betragsmäßig gegen ∞ streben. Die Rechenregeln für Grenzwerte sagen dann nichts. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz führt den Quotienten der Funktionen auf den Quotienten der Ableitungen zurück.

Satz 10.20 (de l'Hospital). Seien $a < b$ reelle Zahlen, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar,

$g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, und es gelte

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Ferner gelte eine der beiden Bedingungen

(i) $\lim_{x \to a+} f(x) = 0$ und $\lim_{x \to a+} g(x) = 0$,

(ii) $\lim_{x \to a+} |g(x)| = \infty$.

Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einem Intervall $(a, a + \eta)$, und $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Dasselbe gilt für $x \to b-$.

Beweisidee. Im Fall (i) setzt man f und g in a durch 0 fort; dann ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ ein Quotient wie im Satz von Cauchy. Im Fall (ii) gibt es keinen solchen Anfangspunkt; man hält einen Punkt c nahe bei a fest und zeigt, dass der Einfluss der Werte in c verschwindet, wenn $|g(x)|$ groß wird.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $c \in (a, b)$ mit $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \varepsilon$ für alle $t \in (a, c)$.

Fall (i). Setze $f(a) = g(a) = 0$. Dann sind f und g für jedes $x \in (a, c)$ auf $[a, x]$ stetig und auf (a, x) differenzierbar mit $g' \neq 0$. Nach Satz 10.16 ist $g(x) = g(x) - g(a) \neq 0$, und es gibt $\xi \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Wegen $\xi \in (a, c)$ folgt $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$ für alle $x \in (a, c)$. Hier ist $\eta = b - a$ möglich.

Fall (ii). Wegen $|g(x)| \to \infty$ gibt es $\eta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für $x \in (a, a + \eta)$. Sei $x \in (a, c)$. Nach Satz 10.16 auf $[x, c]$ ist $g(x) \neq g(c)$, und es gibt $\xi \in (x, c)$ mit

$$f(x) - f(c) = q\big(g(x) - g(c)\big), \qquad q = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad |q - L| < \varepsilon.$$

Für $x \in (a, a + \eta)$ mit $x < c$ teilt man durch $g(x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(c)}{g(x)} - q\,\frac{g(c)}{g(x)} + (q - L).$$

Wegen $|q| < |L| + \varepsilon$ ist der Betrag höchstens $\dfrac{|f(c)| + (|L| + \varepsilon)|g(c)|}{|g(x)|} + \varepsilon$. Der Zähler des Bruchs hängt nicht von x ab; wegen $|g(x)| \to \infty$ gibt es $\delta > 0$ mit $\delta \leq \min(c - a, \eta)$, so dass der Bruch für $a < x < a + \delta$ kleiner als ε ist. Für diese x ist $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < 2\varepsilon$.

Für $x \to b-$ verläuft der Beweis spiegelbildlich, oder man wendet das Bewiesene auf $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto g(-x)$ auf $(-b, -a)$ an. □

In Fall (ii) wird über f nichts vorausgesetzt. Der Satz gilt nach demselben Muster auch für $L = \infty$ oder $L = -\infty$; im Fall (ii) braucht der Beweis eine kleine Abwandlung, weil an die Stelle von $|q - L| < \varepsilon$ eine einseitige Schranke für q tritt (Aufgabe V2). Die Voraussetzung $g' \neq 0$ ist nicht entbehrlich (G8), und die Umkehrung des Satzes ist falsch: f/g kann einen Grenzwert haben, ohne dass f'/g' einen hat (ebenfalls G8).

Folgerung 10.21. Seien $R \in \mathbb{R}$ und $f, g : (R, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$. Gilt $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$, oder gilt $|g(x)| \to \infty$ für $x \to \infty$, so ist $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Beweis. Die Bedingungen für $x \to \infty$ in Definition 7.7 betreffen nur Punkte $x > K$ mit beliebig großem K. Schränkt man f und g auf (R', ∞) mit $R' = \max\{R, 1\}$ ein, so ändern sich deshalb weder die Voraussetzungen noch die Behauptung, und die Ableitungen bleiben nach der Bemerkung über Lokalität dieselben. Wir dürfen also $R > 0$ annehmen. Setze $F(t) = f(1/t)$ und $G(t) = g(1/t)$ für $t \in (0, 1/R)$. Nach der Kettenregel ist $F'(t) = -f'(1/t)/t^2$ und $G'(t) = -g'(1/t)/t^2 \neq 0$, also $\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \to L$ für $t \to 0+$, weil $1/t \to \infty$. Die Bedingungen (i) beziehungsweise (ii) übertragen sich ebenso. Satz 10.20 gibt $\frac{F(t)}{G(t)} \to L$ für $t \to 0+$, und mit $t = 1/x$ ist das die Behauptung. □

10.8 Gegenbeispiele

(G1) Stetig, aber nicht differenzierbar. $|x|$ ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar (Beispiel (c) in Abschnitt 10.1). Die Umkehrung von Folgerung 10.3 ist falsch. Durch Verschieben und Addieren erhält man stetige Funktionen mit endlich vielen Knickstellen. Es gibt sogar stetige Funktionen, die in keinem Punkt differenzierbar sind; Einheit 14 stellt im Ausblick (Abschnitt 14.12) eine solche Funktion vor, ohne diese Eigenschaft zu beweisen.

(G2) Differenzierbar mit unstetiger Ableitung. Sei $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt nach Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

In 0 ist $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$, also $f'(0) = 0$. Somit ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ ist $f'(x_k) = -1$, für $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ ist $f'(y_k) = 1$; beide Folgen streben gegen 0. Also hat f' in 0 keinen Grenzwert: f ist differenzierbar, aber nicht in $C^1(\mathbb{R})$. Die Umkehrung von Folgerung 10.18 ist falsch. Die Funktion f' hat trotzdem die Zwischenwerteigenschaft (Satz 10.17).

(G3) Streng monoton mit verschwindender Ableitung. $f(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv, aber $f'(0) = 0$. Die Umkehrfunktion g, die reelle dritte Wurzel, ist in 0 nicht differenzierbar (Satz 10.7 (2)). Ihr Differenzenquotient in 0 ist $\frac{g(y)}{y}$ mit $|g(y)| = |y|^{1/3}$, denn g ist ungerade und stimmt auf $[0, \infty)$ mit $y \mapsto y^{1/3}$ überein (Satz 9.16 (2)); er hat also den Betrag $|y|^{-2/3}$ und ist für $y \to 0$ unbeschränkt. Für negative y ist $y^{1/3}$ im Sinn von Definition 9.15 nicht erklärt. Folgerung 10.15 (2) lässt sich nicht umkehren: Aus strenger Monotonie folgt nur $f' \geq 0$.

(G4) Grenzen der Regel von Fermat. Erstens ist $f'(a) = 0$ nicht hinreichend: x^3 hat in 0 die Ableitung 0 und keine Extremstelle, denn $x^3 < 0 < y^3$ für $x < 0 < y$. Zweitens braucht man einen inneren Punkt: $f(x) = x$ auf $[0, 1]$ hat im Endpunkt 1 ein Maximum und $f'(1) = 1$.

(G5) Jede Voraussetzung im Satz von Rolle ist nötig.

(a) Stetigkeit in den Endpunkten: $f(x) = x$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 0$. Es ist $f(0) = f(1)$, f ist auf $(0, 1)$ differenzierbar mit $f' = 1$; f ist in 1 unstetig.

(b) Differenzierbarkeit im Inneren: $f(x) = |x|$ auf $[-1, 1]$ ist stetig mit $f(-1) = f(1)$, aber $f'(x) = \pm 1$ für $x \neq 0$, und in 0 existiert keine Ableitung.

(c) Vollständigkeit: Sei $D = \mathbb{Q} \cap [0, 2]$ und $f(x) = x^3 - 4x$ für $x \in D$. Jeder Punkt $a \in D$ ist nach Satz 2.31 Häufungspunkt von D, und Definition 10.1 ist auf D anwendbar. Für $x \neq a$ ist der Differenzenquotient $x^2 + xa + a^2 - 4$, ein Polynom in x, also stetig; nach Satz 7.10 (3) und Lemma 7.28 (1) ist $f'(a) = 3a^2 - 4$. Es ist $f(0) = f(2) = 0$, und f ist auf D stetig. Trotzdem hat f' auf D keine Nullstelle. Es ist $f'(0) = -4$, und für $a \in D$, $a > 0$, mit $3a^2 = 4$ wäre $s = \frac{2}{a}$ eine positive rationale Zahl mit $s^2 = 3$. Eine solche gibt es nicht: Nach Satz 1.16 gibt es ein kleinstes $q \in \mathbb{N}$, für das $p = sq$ in $\mathbb{N}$ liegt. Wegen $1 < 3 < 4$ ist $1 < s < 2$, also $q < p < 2q$ und $0 < p - q < q$. Aus $sp = s^2 q = 3q$ folgt $s(p - q) = 3q - p$, und $3q - p = s(p - q)$ ist eine positive ganze Zahl. Damit wäre schon der Nenner $p - q < q$ zulässig, ein Widerspruch zur Wahl von q.

(G6) Ohne Intervall kein Schluss von $f' = 0$ auf Konstanz. Auf $D = (0, 1) \cup (2, 3)$ sei $f = 0$ auf $(0, 1)$ und $f = 1$ auf $(2, 3)$. Zu jedem $a \in D$ gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subseteq (0, 1)$ oder $B_\delta(a) \subseteq (2, 3)$; dort ist f konstant und der Differenzenquotient null. Im Sinn von Definition 10.1 ist f also in jedem Punkt von D differenzierbar mit Ableitung 0, und doch nicht konstant. Im Beweis von Folgerung 10.15 fehlt für $x \in (0, 1)$, $y \in (2, 3)$ das Intervall $[x, y]$ im Definitionsbereich.

(G7) Positive Ableitung in einem Punkt, aber keine Monotonie in seiner Nähe. Sei $f(x) = x + 2x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Wie in (G2) ist $f'(0) = 1 > 0$ und $f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$. In $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ ist $f'(x_k) = 1 - 2 = -1 < 0$. Da f' in x_k stetig ist, ist $f' < 0$ auf einem Intervall um x_k (Lemma 7.13), und dort ist f streng fallend (Folgerung 10.15). Solche Intervalle gibt es in jeder Nähe von 0. Aus $f'(a) > 0$

allein folgt nur, dass $f(x) < f(a) < f(y)$ für $x < a < y$ nahe bei a gilt (Aufgabe B3 (a)), nicht die Monotonie in einer Umgebung.

(G8) De l'Hospital: keine Umkehrung, und $g' \neq 0$ ist nötig. Erstens: Für $f(x) = x + \sin x$ und $g(x) = x$ ist $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to \infty$, aber $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 + \cos x$ hat keinen Grenzwert. Zweitens ein klassisches Beispiel: Für $x > 0$ sei

$$f(x) = x + \sin x \cos x, \qquad g(x) = \exp(\sin x)\, f(x).$$

Für $x \geq 2$ ist $f(x) \geq x - 1 \geq 1$, also $g(x) \geq e^{-1} f(x) \to \infty$. Es ist $f'(x) = 1 + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x$ und

$$g'(x) = \exp(\sin x) \cos x \big(f(x) + 2\cos x\big).$$

Wo $\cos x \neq 0$, ist $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x}{\exp(\sin x)(f(x)+2\cos x)}$. Für $x > 3$ ist $f(x) + 2\cos x \geq (x-1) - 2 = x - 3 > 0$ und $\exp(\sin x) \geq e^{-1}$, also ist dieser Ausdruck betragsmäßig höchstens $\frac{2e}{x-3}$ und strebt gegen 0. Trotzdem ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \exp(-\sin x)$ ohne Grenzwert für $x \to \infty$. Der Grund: g' hat in jedem Intervall (K, ∞) Nullstellen, nämlich die Nullstellen von cos; die Voraussetzung $g' \neq 0$ ist verletzt, und im Beweis versagt der Satz von Cauchy. Der Quotient f'/g' ist dort nicht einmal überall erklärt.

(G9) Nicht jede Funktion ist eine Ableitung. Es gibt keine differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = -1$ für $x < 0$, $F'(0) = 0$ und $F'(x) = 1$ für $x > 0$: Auf $[-1, 1]$ nähme F' nach Darboux jeden Wert zwischen -1 und 1 an, etwa $\frac{1}{2}$. Die Funktion $|x|$ hat zwar außerhalb von 0 diese Ableitung, ist aber in 0 nicht differenzierbar. Dass jede stetige Funktion eine Ableitung ist, zeigt der Hauptsatz (Einheit 13).

10.9 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (die Leitfrage). Sei T wie in der Leitfrage, jetzt auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet. Wegen $a, b > 0$ sind die Radikanden positiv, und nach Satz 10.9 (3) mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und der Kettenregel ist T differenzierbar mit

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Für $u(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ gilt nach der Quotientenregel $u'(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2} - x^2/\sqrt{a^2+x^2}}{a^2+x^2} = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} > 0$. Ebenso ist $x \mapsto -\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ die Funktion $-w(d-x)$ mit $w(s) = \frac{s}{\sqrt{b^2+s^2}}$, und ihre Ableitung ist $w'(d-x) = \frac{b^2}{(b^2+(d-x)^2)^{3/2}} > 0$. Also ist T' differenzierbar mit

$T'' > 0$, nach Folgerung 10.15 streng monoton wachsend. Ferner ist

$$T'(0) = -\frac{d}{v_2\sqrt{b^2+d^2}} < 0, \qquad T'(d) = \frac{d}{v_1\sqrt{a^2+d^2}} > 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) hat die stetige Funktion T' eine Nullstelle $x_0 \in (0,d)$, und wegen der strengen Monotonie nur diese. Es ist $T' < 0$ auf $(-\infty, x_0)$ und $T' > 0$ auf (x_0, ∞); nach Folgerung 10.15 ist T auf $(-\infty, x_0]$ streng fallend und auf $[x_0, \infty)$ streng wachsend. Also ist x_0 die einzige globale Minimalstelle von T auf ganz $\mathbb{R}$, erst recht auf $[0,d]$. Damit sind beide Teile der Leitfrage beantwortet: Die Stelle ist die Nullstelle von T', und eine zweite gibt es nicht.

Die Bedingung $T'(x_0) = 0$ hat eine geometrische Bedeutung. Ist α der Winkel des einfallenden, β der des gebrochenen Strahls gegen die Senkrechte auf der Geraden, so ist $\sin\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}}$ und $\sin\beta = \frac{d-x_0}{\sqrt{b^2+(d-x_0)^2}}$. Die Gleichung $T'(x_0) = 0$ lautet

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2},$$

das Brechungsgesetz von Snellius. Für $v_1 = v_2$ folgt $\alpha = \beta$: Der Strahl geht geradeaus. Eine Formel für x_0 liefert die Rechnung nicht; die Gleichung $T'(x) = 0$ führt nach Quadrieren für $v_1 \neq v_2$ auf eine Polynomgleichung vierten Grades. Existenz und Eindeutigkeit sind dennoch bewiesen. Näherungsweise berechnet man x_0 etwa durch fortgesetztes Halbieren von $[0,d]$ nach dem Vorzeichen von T'; schnellere Verfahren für Gleichungen dieser Art, insbesondere das Newton-Verfahren, behandelt Einheit 11.

Beispiel 2 (zwei Grundungleichungen). Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$, mit Gleichheit nur für $x = 0$. Satz 9.7 (2) hat das aus der Reihe gewonnen; hier ein zweiter Beweis mit dem Mittelwertsatz. Für $x \neq 0$ liefert der Mittelwertsatz ein ξ zwischen 0 und x mit $\exp(x)-1 = \exp(\xi)\,x$. Ist $x > 0$, so ist $\xi > 0$, also $\exp(\xi) > 1$ und $\exp(x)-1 > x$. Ist $x < 0$, so ist $\exp(\xi) < 1$, und Multiplikation mit $x < 0$ dreht die Ungleichung: $\exp(\xi)x > x$. Für $y > 0$ setzt man $x = \ln y$ ein und erhält

$$\ln y \leq y - 1 \qquad (y > 0),$$

mit Gleichheit nur für $y = 1$; das ist ein Teil von Satz 9.13 (2).

Beispiel 3 (Grenzwerte). Die Grenzwerte (a) bis (c) haben Satz 9.19, Satz 9.11 und Folgerung 9.25 (3) ohne Ableitung bewiesen. Die Regeln von de l'Hospital liefern sie erneut, und zwar nach einem einheitlichen Verfahren.

(a) $\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0$. Es ist $x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$ mit $|1/x| \to \infty$, und $\frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \frac{1/x}{-1/x^2} = -x \to 0$. Satz 10.20 (ii) gibt die Behauptung. Folglich gilt $x^x = \exp(x\ln x) \to \exp(0) = 1$ für $x \to 0+$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\lim_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$. Induktion über n: Für $n = 0$ und $x > 0$ ist $0 < \exp(-x) = 1/\exp(x) \le 1/(1+x) \to 0$ nach Beispiel 2. Gilt die Aussage für n, so wende man Folgerung 10.21 (Fall $|g| \to \infty$) auf $f(x) = x^{n+1}$, $g(x) = \exp(x)$ an: $\frac{f'}{g'} = (n+1)\frac{x^n}{\exp(x)} \to 0$. Die Exponentialfunktion wächst also schneller als jede Potenz.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Im Fall (i) ist $\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{\sin x}{2x} \to \frac{1}{2}$ nach dem Beispiel am Ende von Abschnitt 10.4. Satz 10.20 gibt den Grenzwert von rechts, und weil der Ausdruck gerade ist, auch von links; Lemma 7.8 schließt ab.

(d) Für $a \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{x\to\infty}\big(1+\frac{a}{x}\big)^x = \exp(a)$. Für $x > |a|$ ist $1 + \frac{a}{x} > 0$ und $\big(1+\frac{a}{x}\big)^x = \exp\big(x\ln(1+\frac{a}{x})\big)$. Mit $t = 1/x$ ist $x\ln(1+\frac{a}{x}) = \frac{\ln(1+at)}{t}$, und für $t \to 0+$ strebt dieser Quotient gegen die Ableitung von $t \mapsto \ln(1+at)$ in 0, also gegen a. Die Stetigkeit von exp gibt die Behauptung. Ein Grenzwert für $x \to \infty$ ist auch der Grenzwert längs $x = n$: Für jedes reelle a strebt die Folge $\big(1+\frac{a}{n}\big)^n$ gegen $\exp(a)$. Das ist ein zweiter Beweis von Satz 9.10 für reelle Argumente; Satz 9.10 hat den Grenzwert, den Einheit 4 (Beispiel 5 in Abschnitt 4.10 und Ausblick) angekündigt hat, schon für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit dem Binomialsatz bewiesen. Hier ergibt er sich aus einer einzigen Ableitung. Für $a = 1$ erhält man wieder Satz 9.9.

Beispiel 4 (Nullstellen zählen). Das Polynom $f(x) = x^5 - 5x + 1$ hat genau drei reelle Nullstellen. Es ist $f'(x) = 5(x^4 - 1)$, also $f' > 0$ auf $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$, $f' < 0$ auf $(-1, 1)$. Nach Folgerung 10.15 ist f auf $(-\infty, -1]$ streng wachsend, auf $[-1, 1]$ streng fallend und auf $[1, \infty)$ streng wachsend. Eine streng monotone Funktion hat höchstens eine Nullstelle. Die Werte

$$f(-2) = -21, \quad f(-1) = 5, \quad f(1) = -3, \quad f(2) = 23$$

zeigen mit dem Zwischenwertsatz je eine Nullstelle in $(-2, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, 2)$. Weitere gibt es nicht: Auf $(-\infty, -2]$ ist $f \le f(-2) < 0$, auf $[2, \infty)$ ist $f \ge f(2) > 0$, und auf jedem der drei Monotonieintervalle gibt es höchstens eine.

10.10 Ausblick

- **Taylor (Einheit 11).** Satz 10.2 nähert f durch eine Gerade mit einem Fehler, der schneller als $|x-a|$ verschwindet. Mit höheren Ableitungen nähert man durch Polynome höheren Grades, und der verallgemeinerte Mittelwertsatz liefert die Restglieder. Das Vorzeichen von f'' beschreibt die Krümmung; daraus wird der Begriff der Konvexität.
- **Integral (Einheiten 12 und 13).** Folgerung 10.15 (1) besagt, dass eine Funktion auf einem Intervall durch ihre Ableitung bis auf eine Konstante bestimmt ist. Der Hauptsatz zeigt, dass jede stetige Funktion eine Ableitung ist, nämlich die ihres Integrals.

Nicht jede Funktion ist eine Ableitung: Die Signumfunktion ist keine (G9). Notwendig ist Stetigkeit aber nicht; (G2) zeigt eine unstetige Ableitung.

- **Funktionenfolgen (Einheit 14).** Dort wird gezeigt, unter welchen Bedingungen man Grenzwert und Ableitung vertauschen darf (Satz 14.8, auch für Funktionen mit komplexen Werten), und dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden dürfen (Satz 14.19, auch mit komplexen Koeffizienten). Das liefert einen zweiten Beweis von $\exp' = \exp$ (Abschnitt 14.11, Beispiel 1). Dort wird auch eine stetige Funktion vorgestellt, die in keinem Punkt differenzierbar ist; diese Eigenschaft wird nicht bewiesen.
- **Mehrere Veränderliche.** In der Analysis mehrerer Veränderlicher wird die Ableitung über Satz 10.2 (3) erklärt: als lineare Abbildung, die f bis auf einen Fehler kleiner Ordnung annähert. Die Kettenregel bleibt in der Form von Satz 10.6 gültig, mit dem Produkt linearer Abbildungen an Stelle des Produkts von Zahlen. Der Mittelwertsatz bleibt für reellwertige Funktionen längs Strecken als Gleichung gültig; für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}$ gilt er nur noch als Ungleichung, schon bei einer Veränderlichen (Folgerung 10.24 und das Beispiel $\exp(ix)$ davor).

Zum Vergleich.[1] Stoffauswahl und Reihenfolge entsprechen dem üblichen Aufbau einer Analysis-Vorlesung und in den Grundzügen O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, Springer Spektrum 2016, § 15 (Differentiation) und § 16 (Lokale Extrema, Mittelwertsatz, Konvexität). Einzelne Stellen folgen Forster enger. Die Ableitung von exp aus der Abschätzung $|\exp(z) - 1 - z| \le |z|^2$ und die Ableitung von $x \mapsto \exp(cx)$ für komplexes c, aus der man mit $c = i$ die Ableitungen von Sinus und Kosinus gewinnt (Lemma 10.8, Satz 10.9 (1), Satz 10.10, Satz 10.23), folgen den Beispielen (15.5) und (15.8) in § 15 (S. 166–167). Beispiel 3 (d) in Abschnitt 10.9 führt die Herleitung von $e = \lim(1 + \frac{1}{n})^n$ über die Ableitung des Logarithmus in § 15 (S. 173) für beliebiges a aus, wie Aufgabe 15.10. Aufgabe V3 (b) ist Teil b) des Lemmas vor Satz 10 in § 16 (S. 189), Aufgabe V2 ist Aufgabe 16.11. Forster beweist die Regeln von de l'Hospital über die Umkehrfunktion von g. Der hier gewählte Weg über den verallgemeinerten Mittelwertsatz und die Fassung von Satz 10.20 mit $x \to a+$ und $|g(x)| \to \infty$ entsprechen den Aufgaben 16 H und 16 I mit ihren Lösungen in O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage, Vieweg+Teubner 2011 (S. 37–38 und 145–147); die Bemerkung zur Lösung von 16 H weist ebenfalls darauf hin, dass getrennte Anwendungen des Mittelwertsatzes auf f und g im Allgemeinen verschiedene Zwischenstellen liefern.

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 10

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Bestimmen Sie die Ableitungen (jeweils auf dem angegebenen Bereich):

(a) $f(x) = x^2 \exp(-x)$ auf $\mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ auf $\mathbb{R}$,

(c) $f(x) = x^x$ auf $(0, \infty)$,

(d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ auf $\mathbb{R}$,

(e) $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$. Folgern Sie, dass f konstant ist, bestimmen Sie die Konstante und folgern Sie $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

R2. Bestimmen Sie die Grenzwerte und geben Sie an, welche Fassung der Regel von de l'Hospital Sie benutzen und warum ihre Voraussetzungen erfüllt sind:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1 - x}{x^2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\ln(1 + x)} - \frac{1}{x}\Big)$.

R3. Bestimmen Sie die globalen Extremstellen und Extremwerte von $f(x) = x^3 - 3x$ auf $[-2, 3]$.

R4. Sei $f(x) = x + \exp(x)$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, und bestimmen Sie für die Umkehrfunktion g die Werte $g'(1)$ und $g'(1 + e)$.

R5. (a) Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n + 1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

(b) Folgern Sie für $n \geq 2$: $\ln(n + 1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \ln n$.

R6. Sei $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ erklärt und stetig ist und auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ differenzierbar mit $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ für $|x| < 1$ und $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$ für $|x| > 1$.

(b) Folgern Sie $f(x) = 2 \arctan x$ für $|x| \leq 1$ und $f(x) = \pi - 2 \arctan x$ für $x \geq 1$.

(c) Bestimmen Sie mit Folgerung 10.18 die einseitigen Ableitungen von f in 1. Ist f in 1 differenzierbar?

Stufe B – Beweisen

B1. (a) Sei $g : I \to \mathbb{R}$ m-mal differenzierbar, $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie durch Induktion: $x \mapsto x\, g(x)$ ist m-mal differenzierbar, und

$$\big(x\, g(x)\big)^{(m)} = x\, g^{(m)}(x) + m\, g^{(m-1)}(x).$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n(x) = x^n \ln x$ auf $(0, \infty)$ und $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Zeigen Sie

$$f_n^{(n)}(x) = n!\big(\ln x + H_n\big) \qquad (x > 0).$$

(c) Folgern Sie: $f_n^{(n)}$ hat genau eine Nullstelle x_n, und für $n \geq 2$ gilt $\frac{1}{e\,n} < x_n < \frac{1}{n}$. Benutzen Sie Aufgabe R5.

B2. (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und habe $n+1$ verschiedene Nullstellen. Zeigen Sie, dass $f^{(n)}$ eine Nullstelle in I hat.

(c) Zeigen Sie: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $\exp(x) = ax^2 + bx + c$ höchstens drei reelle Lösungen.

B3. (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt a differenzierbar mit $f'(a) > 0$. Zeigen Sie: Es gibt $\delta > 0$ mit $f(x) < f(a) < f(y)$ für alle $x, y \in I$ mit $a - \delta < x < a < y < a + \delta$. Warum folgt daraus nicht, dass f in einer Umgebung von a monoton ist?

(b) Sei $0 < b \leq \infty$ und $f : [0, b) \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$, auf $(0, b)$ differenzierbar, und f' sei auf $(0, b)$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ auf $(0, b)$ monoton wachsend ist. Folgern Sie, dass $\frac{\exp(x)-1}{x}$ auf $(0, \infty)$ und $\frac{\tan x}{x}$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ monoton wachsen. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass auf $f(0) = 0$ nicht verzichtet werden kann.

B4. (a) Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz für alle $x > 0$: $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$.

(b) Zeigen Sie mit Folgerung 10.15 für alle $x > 0$:

$$x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.$$

(c) Bestimmen Sie $\tan\frac{\pi}{6}$ mit den Additionstheoremen (Satz 9.22), und folgern Sie aus (b) mit $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ die Einschließung $\frac{16\sqrt{3}}{9}<\pi<\frac{82\sqrt{3}}{45}$ und daraus $3{,}07<\pi<3{,}16$.

B5. Zeigen Sie für alle $x>-1$ und $\alpha\in\mathbb{R}$:

(a) $(1+x)^\alpha\geq 1+\alpha x$, falls $\alpha\geq 1$,

(b) $(1+x)^\alpha\leq 1+\alpha x$, falls $0\leq\alpha\leq 1$.

Vergleichen Sie (a) mit der Bernoullischen Ungleichung (Satz 1.24).

Stufe V – Vertiefen

V1. Sei $f(x)=x^2\sin(1/x^2)$ für $x\neq 0$ und $f(0)=0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass f' auf $[-1,1]$ aber unbeschränkt ist. Folgern Sie, dass es keine Konstante L mit $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$ für alle $x,y\in[-1,1]$ gibt.

V2. Formulieren und beweisen Sie Satz 10.20 für den Fall $L=+\infty$, also unter der Voraussetzung $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$, in beiden Fällen (i) und (ii).

V3. Sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, und es existiere $\ell=\lim_{x\to\infty}f'(x)$.

(a) Zeigen Sie $\lim_{x\to\infty}\big(f(x+1)-f(x)\big)=\ell$.

(b) Zeigen Sie $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$.

(c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass aus der Existenz von $\lim_{x\to\infty}f(x)/x$ nicht die von $\lim_{x\to\infty}f'(x)$ folgt.

V4. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: f' ist genau dann stetig, wenn f *gleichmäßig differenzierbar* ist, das heißt: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es $\delta>0$ mit

$$\Big|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(y)\Big|<\varepsilon\qquad\text{für alle } x,y\in[a,b] \text{ mit } 0<|x-y|<\delta.$$

Sie dürfen benutzen, dass eine stetige Funktion auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist (Satz 8.21).

V5. (a) Sei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig, auf $(0,\infty)$ differenzierbar, und es gelte $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(0)$. Zeigen Sie: Es gibt $\xi>0$ mit $f'(\xi)=0$. Zeigen Sie an $f(x)=\exp(-x)$, dass auf die Bedingung $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(0)$ nicht verzichtet werden kann.

(b) Sei $f:I\to\mathbb{R}$ differenzierbar, und $f'(x)$ sei für jedes $x\in I$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass es $k\in\mathbb{Z}$ und $d\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=kx+d$ für alle $x\in I$ gibt.

(c) Zeigen Sie an $f(x)=|x|$ auf $[-1,1]$, dass (b) falsch wird, wenn f nur außerhalb eines einzigen Punkts differenzierbar ist.

Lösungen

Lösung R1. (a) Produkt- und Kettenregel mit $(\exp(-x))' = -\exp(-x)$: $f'(x) = 2x\exp(-x) - x^2\exp(-x) = (2x - x^2)\exp(-x)$.

(b) Kettenregel mit $\ln'(y) = 1/y$: $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(c) $x^x = \exp(x\ln x)$. Kettenregel und Produktregel: $f'(x) = \exp(x\ln x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

(d) Der Nenner ist ≥ 1, also nie null. Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{\cos x\,(2+\cos x) + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2},$$

wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(e) Nach Folgerung 10.19 und der Kettenregel ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{-2}} \cdot \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Nach Folgerung 10.15 (1) ist f auf dem Intervall $(0,\infty)$ konstant. Zur Konstanten: Nach Satz 9.28 (2) mit $x = \frac{\pi}{4}$ ist $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\big) = \sin\frac{\pi}{4}$, und nach Satz 9.29 (1) ist $\cos\frac{\pi}{4} > 0$. Also ist $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, und wegen $\frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Satz 9.31). Mit $x = 1$ folgt $f = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}$. Für $x \to \infty$ strebt $\frac{1}{x}$ gegen 0, also $\arctan\frac{1}{x} \to \arctan 0 = 0$ wegen der Stetigkeit von arctan (Satz 9.31) und $\tan 0 = 0$. Damit ist $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \to \frac{\pi}{2}$.

Lösung R2. (a) Fall (i) von Satz 10.20 auf beiden Seiten von 0 (auf $(0,1)$ und, mit $x \to 0-$, auf $(-1,0)$): Zähler und Nenner streben gegen 0, die Ableitung des Nenners $2x$ ist dort ungleich null, und $\frac{\exp(x)-1}{2x} \to \frac{1}{2}$ nach dem Beispiel am Ende von Abschnitt 10.4. Nach Lemma 7.8 ist der Grenzwert $\frac{1}{2}$.

(b) Wieder Fall (i) auf beiden Seiten; $(x^3)' = 3x^2 \neq 0$ für $x \neq 0$. Es ist $\frac{1-\cos x}{3x^2} \to \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ nach Beispiel 3 (c) in Abschnitt 10.9. Der Grenzwert ist $\frac{1}{6}$.

(c) Auf $(0, \frac{\pi}{2})$ seien $f(x) = \tan x - x$ und $g(x) = x - \sin x$. Beide streben für $x \to 0+$ gegen 0, denn $\tan 0 = \sin 0 = 0$ und beide Funktionen sind stetig. Es ist $g'(x) = 1 - \cos x > 0$, denn cos ist auf $[0,\pi]$ streng fallend mit $\cos 0 = 1$ (Satz 9.30). Nach Folgerung 10.19 (2) ist $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$. Mit $\sin^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$ wird

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\,(1-\cos x)} = \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} \to 2 \qquad (x \to 0+)$$

wegen der Stetigkeit von cos. Fall (i) von Satz 10.20 gibt den Grenzwert 2 von rechts. Zähler und Nenner sind ungerade Funktionen, der Quotient ist also gerade, und der Grenzwert von links ist ebenfalls 2; nach Lemma 7.8 ist 2 der Grenzwert. Das Kürzen von $1 - \cos x$ erledigt die Unbestimmtheit in einem Schritt; eine wiederholte Anwendung der Regel wäre umständlicher.

(d) Für $x > -1$, $x \neq 0$ ist $\ln(1+x) \neq 0$, denn ln ist injektiv und $\ln 1 = 0$. Dort ist

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Der zweite Faktor strebt gegen 1, denn $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} \to \ln'(1) = 1$ nach Satz 10.9 (2). Für den ersten Faktor benutzt man Fall (i) von Satz 10.20 auf $(0,1)$ und, mit $x \to 0-$, auf $(-\frac{1}{2}, 0)$: Zähler und Nenner streben gegen 0, weil ln in 1 stetig ist (Folgerung 10.3), die Ableitung des Nenners $2x$ ist dort ungleich null, und

$$\frac{\big(x - \ln(1+x)\big)'}{(x^2)'} = \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{1}{2(1+x)} \to \frac{1}{2}.$$

Nach Lemma 7.8 strebt der erste Faktor gegen $\frac{1}{2}$, und nach Satz 7.6 ist der Grenzwert $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Wie in (c) erledigt eine Umformung vor der Anwendung der Regel die Unbestimmtheit in einem Schritt.

Lösung R3. f ist stetig auf $[-2, 3]$ und differenzierbar. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum werden Maximum und Minimum angenommen, nach Satz 10.12 in Endpunkten oder in Nullstellen von $f'(x) = 3x^2 - 3$, also in $-2, -1, 1, 3$. Die Werte sind

$$f(-2) = -2, \quad f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(3) = 18.$$

Das Maximum 18 wird nur in 3 angenommen (ein Endpunkt mit $f'(3) = 24 \neq 0$, im Einklang mit der Bemerkung über Extremstellen in Endpunkten), das Minimum -2 in -2 und in 1. Die Stelle -1 ist eine lokale, keine globale Maximalstelle: Wegen $f' > 0$ auf $(-2, -1)$ und $f' < 0$ auf $(-1, 1)$ ist f nach Folgerung 10.15 auf $[-2, -1]$ wachsend und auf $[-1, 1]$ fallend, also $f(x) \leq f(-1)$ für $x \in (-2, 1)$, aber $f(3) > f(-1)$.

Lösung R4. $f'(x) = 1 + \exp(x) > 0$, also ist f streng monoton wachsend und injektiv (Folgerung 10.15). Für $x \leq 0$ ist $f(x) \leq x + 1$, für $x \geq 0$ ist $f(x) \geq x$; also ist f nach oben und unten unbeschränkt. Nach Satz 7.19 ist $f(\mathbb{R})$ ein Intervall, also $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 1$ und $f(1) = 1 + e$ liefert Satz 10.7

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}, \qquad g'(1+e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+e}.$$

Eine geschlossene Formel für g wird dafür nicht gebraucht.

Lösung R5. (a) Der Mittelwertsatz für ln auf $[n, n+1]$ liefert $\xi \in (n, n+1)$ mit $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$. Wegen $n < \xi < n+1$ ist $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{n}$ (O6).

(b) Summation der rechten Ungleichung über $k = 1, \dots, n$ ergibt durch Teleskopieren $\ln(n+1) - \ln 1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, und $\ln 1 = 0$. Summation der linken über $k = 1, \dots, n-1$ (für $n \geq 2$ eine nichtleere Summe) ergibt $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \ln n$, also $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \ln n$. Für $n = 1$ wäre die rechte Ungleichung $1 < 1$, also falsch. Die Ungleichung $\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ liefert noch einmal die Divergenz der harmonischen Reihe (Satz 6.6) und zeigt, dass ihre Teilsummen wie $\ln n$ wachsen.

Lösung R6. (a) Für $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ist $1 + x^2 - 2|x| = (1 - |x|)^2 \geq 0$, also $|g(x)| \leq 1$, mit Gleichheit genau für $|x| = 1$. Damit ist $f = \arcsin \circ g$ erklärt und als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es ist

$$g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \qquad 1 - g(x)^2 = \frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}.$$

Für $|x| \neq 1$ ist $|g(x)| < 1$, und nach Kettenregel und Folgerung 10.19 (1) ist

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g(x)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{|1-x^2|} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|}.$$

Der letzte Bruch ist 1 für $|x| < 1$ und -1 für $|x| > 1$.

(b) Auf $[-1, 1]$ ist $f - 2\arctan$ stetig mit Ableitung 0 in jedem inneren Punkt, nach Folgerung 10.15 (1) also konstant; in 0 ist der Wert $\arcsin 0 - 0 = 0$. Auf $[1, \infty)$ ist $x \mapsto f(x) + 2\arctan x$ ebenso konstant. In $x = 1$ ist $g(1) = 1$, also $f(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (Satz 9.28 (1)), und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Lösung R1 (e)); der Wert ist $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Also ist $f(x) = \pi - 2\arctan x$ für $x \geq 1$.

(c) Die Einschränkung von f auf $[0, 1]$ ist in 1 stetig und in jedem Punkt von $[0, 1)$ differenzierbar (Bemerkung über Lokalität), und $f'(x) = \frac{2}{1+x^2} \to 1$ für $x \to 1-$. Folgerung 10.18, im Endpunkt 1 angewandt, gibt $(f|_{[0,1]})'(1) = 1$, nach der Bemerkung über Lokalität (wegen $(-\infty, 1] \cap B_1(1) \subseteq [0, 1]$) also $f'_-(1) = 1$. Ebenso auf $[1, 2]$: $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2} \to -1$ für $x \to 1+$, also $f'_+(1) = -1$. Die einseitigen Ableitungen sind verschieden, und f ist in 1 nicht differenzierbar; der Graph hat dort einen Knick wie $|x|$ in 0. Die Kettenregel ist in 1 nicht anwendbar, weil arcsin in $g(1) = 1$ nicht differenzierbar ist (Folgerung 10.19 (1)). Da f ungerade ist, gilt dasselbe in -1, und für $x \leq -1$ ist $f(x) = -\pi - 2\arctan x$.

Lösung B1. (a) Für $m = 1$ ist $(xg)' = g + xg'$ nach der Produktregel. Gelte die Formel für m, und sei g $(m+1)$-mal differenzierbar. Nach Induktionsvoraussetzung ist xg m-mal differenzierbar mit $(xg)^{(m)} = x\, g^{(m)} + m\, g^{(m-1)}$. Die rechte Seite ist differenzierbar,

und nach Produkt- und Summenregel ist

$$\big(xg\big)^{(m+1)} = g^{(m)} + x\,g^{(m+1)} + m\,g^{(m)} = x\,g^{(m+1)} + (m+1)\,g^{(m)}.$$

(b) Induktion über n. Für $n = 1$ ist $f_1'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 = 1!\,(\ln x + H_1)$. Gelte die Formel für n. Es ist $f_{n+1}(x) = x\,f_n(x)$, und f_n liegt als Produkt eines Polynoms mit ln in $C^\infty((0,\infty))$ (Abschnitt 10.2 und Abschnitt 10.4). Nach Induktionsvoraussetzung ist $f_n^{(n)}(x) = n!(\ln x + H_n)$, also $f_n^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{x}$. Mit (a) für $g = f_n$ und $m = n+1$:

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x \cdot \frac{n!}{x} + (n+1)\,n!\,(\ln x + H_n) = (n+1)!\Big(\ln x + H_n + \frac{1}{n+1}\Big) = (n+1)!\,(\ln x + H_{n+1}).$$

(c) $f_n^{(n)}(x) = 0$ gilt genau dann, wenn $\ln x = -H_n$, also genau für $x_n = \exp(-H_n)$, denn ln ist injektiv. Nach R5 (b) ist $\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln n$ für $n \geq 2$. Weil exp streng wachsend ist, folgt $\exp(-1 - \ln n) < x_n < \exp(-\ln(n+1))$, nach Satz 9.4 und Folgerung 9.5 also $\frac{1}{e\,n} < x_n < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Die Nullstelle wandert also wie $\frac{1}{n}$ gegen 0.

Lösung B2. (a) Wären $x < y$ in I mit $f(x) = f(y)$, so gäbe es nach Rolle ein $\xi \in (x,y)$ mit $f'(\xi) = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung; also ist f injektiv. Mehr gilt: Nach dem Satz von Darboux ist f sogar streng monoton: Hätte f' an zwei Stellen $x < y$ von I verschiedene Vorzeichen, so nähme f' nach Satz 10.17, angewandt auf $f|_{[x,y]}$ (Bemerkung über Lokalität), den Wert 0 an. Also hat f' überall dasselbe Vorzeichen, und Folgerung 10.15 (2) schließt ab.

(b) Induktion über n. Für $n = 0$ ist die Aussage die Voraussetzung. Gelte sie für n, und habe f die Nullstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$. Rolle auf $[x_{j-1}, x_j]$ liefert $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ mit $f'(\xi_j) = 0$, für $j = 1, \dots, n+1$; diese Punkte sind verschieden, weil die Intervalle disjunkt sind. f' ist n-mal differenzierbar mit $n+1$ Nullstellen; nach Induktionsvoraussetzung hat $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ eine Nullstelle.

(c) $h(x) = \exp(x) - ax^2 - bx - c$ ist beliebig oft differenzierbar mit $h''' = \exp$, ohne Nullstelle. Hätte h vier verschiedene Nullstellen, so hätte h''' nach (b) mit $n = 3$ eine. Also gibt es höchstens drei Lösungen. Die Schranke wird erreicht: Für $a > e$ und $h(x) = \exp(x) - ax^2$ gilt $h(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$, $h(0) = 1 > 0$, $h(1) = e - a < 0$ und $h(x) = x^2\big(\exp(x)x^{-2} - a\big) \to \infty$ für $x \to \infty$, denn $\exp(x)/x^2 \to \infty$ nach Satz 9.11. Der Zwischenwertsatz liefert je eine Nullstelle in $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ und $(1,\infty)$.

Lösung B3. (a) Sei $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(a) \subseteq I$ und $\big|\frac{f(t)-f(a)}{t-a} - f'(a)\big| < f'(a)$ für $0 < |t-a| < \delta$. Dann ist der Differenzenquotient dort positiv. Für $a < y < a+\delta$ ist $y - a > 0$, also $f(y) - f(a) > 0$; für $a - \delta < x < a$ ist $x - a < 0$, also $f(x) - f(a) < 0$. Die Aussage vergleicht nur mit dem einen Punkt a. Für zwei Punkte $x < x'$ auf derselben Seite von a sagt sie nichts, und (G7) zeigt, dass f dort fallen kann.

(b) Sei $x \in (0,b)$. Der Mittelwertsatz auf $[0,x]$ liefert $\xi \in (0,x)$ mit $f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)\,x$. Weil f' monoton wächst, ist $f'(\xi) \le f'(x)$, also $f(x) \le x\,f'(x)$. Für $q(x) = \frac{f(x)}{x}$ gibt die Quotientenregel

$$q'(x) = \frac{x\,f'(x) - f(x)}{x^2} \ge 0 \qquad (0 < x < b),$$

und nach Folgerung 10.15 (2) ist q auf dem Intervall $(0,b)$ monoton wachsend.

Für $f(x) = \exp(x) - 1$ ist $f(0) = 0$ und $f' = \exp$ wachsend. Für $f = \tan$ auf $[0, \frac{\pi}{2})$ ist $\tan 0 = 0$ und nach Folgerung 10.19 (2) $\tan' = 1 + \tan^2$; da tan auf $[0, \frac{\pi}{2})$ wachsend und ≥ 0 ist (Satz 9.31), wächst auch $\tan^2$ (aus $0 \le s \le t$ folgt $s^2 \le t^2$).

Ohne $f(0) = 0$ geht es nicht: $f(x) = 1 + x$ hat die konstante, also monoton wachsende Ableitung 1, aber $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} + 1$ fällt streng. Im Beweis fehlt dann die Gleichung $f(x) = f'(\xi)x$.

Lösung B4. (a) Sei $x > 0$. Der Mittelwertsatz für arctan auf $[0,x]$ liefert mit Folgerung 10.19 (2) ein $\xi \in (0,x)$ mit $\arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \frac{x}{1+\xi^2}$. Wegen $1 < 1 + \xi^2 < 1 + x^2$ und $x > 0$ folgt die Behauptung.

(b) Sei $h_1(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$ und $h_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \arctan x$ auf $[0,\infty)$. Beide sind differenzierbar mit $h_1(0) = h_2(0) = 0$ und

$$h_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{x^4}{1+x^2}, \qquad h_2'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^6}{1+x^2},$$

denn $(1-x^2)(1+x^2) = 1 - x^4$ und $(1 - x^2 + x^4)(1 + x^2) = 1 + x^6$. Für $x > 0$ sind beide Ableitungen positiv; nach Folgerung 10.15 (2) sind h_1, h_2 auf $[0,\infty)$ streng wachsend, also $h_1(x) > 0$ und $h_2(x) > 0$ für $x > 0$.

Die beiden unteren Schranken ergänzen sich: Wegen $\big(1 - \frac{x^2}{3}\big)(1 + x^2) - 1 = \frac{x^2(2-x^2)}{3}$ ist $x - \frac{x^3}{3}$ für $0 < x < \sqrt{2}$ die bessere, für $x > \sqrt{2}$ die Schranke aus (a); für $x > \sqrt{3}$ ist $x - \frac{x^3}{3}$ sogar negativ.

(c) Sei $s = \sin\frac{\pi}{6}$. Nach Satz 9.28 (2) ist $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\big) = s$, und nach Satz 9.22 ist $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\big(2 \cdot \frac{\pi}{6}\big) = 1 - 2s^2$. Also ist $2s^2 + s - 1 = (2s-1)(s+1) = 0$, und wegen $s > 0$ (Satz 9.29 (1)) ist $s = \frac{1}{2}$. Ferner ist $\cos\frac{\pi}{6} > 0$ (Satz 9.29 (1)) mit $\cos^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4}$, also $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Wegen $\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Mit $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist $x^3 = \frac{x}{3}$ und $x^5 = \frac{x}{9}$, also nach (b)

$$\frac{8}{9}\,x < \frac{\pi}{6} < \Big(\frac{8}{9} + \frac{1}{45}\Big)x = \frac{41}{45}\,x.$$

Multiplikation mit 6 und $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ergibt $\frac{16\sqrt{3}}{9} < \pi < \frac{82\sqrt{3}}{45}$. Wegen $1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3 < 3{,}00017041 = 1{,}7321^2$ ist $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}7321$, also $\pi > \frac{16\cdot 1{,}732}{9} > 3{,}079$ und $\pi < \frac{82\cdot 1{,}7321}{45} < 3{,}1563$. Einheit 14 setzt die Polynome in (b) zur Reihe für arctan fort (Abschnitt 14.11, Beispiel 3).

Lösung B5. Sei $h(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$ auf $(-1, \infty)$. Nach Satz 10.9 ist $h'(x) = \alpha\big((1+x)^{\alpha-1} - 1\big)$, und $h(0) = 0$. Für $\beta > 0$ ist $t \mapsto t^\beta$ auf $(0, \infty)$ streng wachsend (Ableitung $\beta t^{\beta-1} > 0$), für $\beta < 0$ streng fallend; ferner $1^\beta = 1$.

(a) Ist $\alpha = 1$, so ist $h = 0$. Ist $\alpha > 1$, so ist $\beta = \alpha - 1 > 0$ und $(1+x)^{\alpha-1} < 1$ für $x < 0$, > 1 für $x > 0$. Also $h' < 0$ auf $(-1, 0)$ und $h' > 0$ auf $(0, \infty)$. Nach Folgerung 10.15 ist h auf $(-1, 0]$ fallend und auf $[0, \infty)$ wachsend; also $h(x) \geq h(0) = 0$.

(b) Für $\alpha = 0$ ist $h = 0$, für $\alpha = 1$ ebenfalls. Für $0 < \alpha < 1$ ist $\beta = \alpha - 1 < 0$, also $(1+x)^{\alpha-1} > 1$ für $x < 0$ und < 1 für $x > 0$. Damit ist $h' > 0$ auf $(-1, 0)$ und $h' < 0$ auf $(0, \infty)$, und $h(x) \leq h(0) = 0$.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ist (a) die Bernoullische Ungleichung, hier für $x > -1$. Satz 1.24 brauchte nur ganzzahlige Exponenten und keine Ableitung; der neue Beweis gilt für alle reellen $\alpha \geq 1$. In beiden Fällen gilt Gleichheit für $\alpha \notin \{0, 1\}$ nur in $x = 0$.

Lösung V1. Für $x \neq 0$ ist f als Produkt und Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar mit

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

In 0 ist $\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x^2}\right| \leq |x| \to 0$, also $f'(0) = 0$. Für $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$ $(k \in \mathbb{N})$ ist $\sin \frac{1}{x_k^2} = \sin(2k\pi) = 0$ und $\cos(2k\pi) = 1$, also $f'(x_k) = -2\sqrt{2k\pi}$. Diese Werte sind unbeschränkt, und $x_k \in (0, 1)$.

Gäbe es L mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ auf $[-1, 1]$, so wären alle Differenzenquotienten betragsmäßig $\leq L$, und damit nach Grenzübergang (Satz 7.6 (3)) auch $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in (-1, 1)$. Widerspruch. Zusammen mit Folgerung 10.15 (3) gilt also: Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig mit Konstante L (Definition 8.19), wenn $|f'| \leq L$ gilt.

Lösung V2. *Satz.* Seien $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g' \neq 0$ auf (a, b), $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$ für $x \to a+$, und es gelte (i) oder (ii). Dann ist $g(x) \neq 0$ für alle x in einem Intervall $(a, a+\eta)$, und $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$ für $x \to a+$. Dasselbe gilt für $x \to b-$.

Beweis. Sei $M > 0$. Wähle $c \in (a, b)$ mit $\frac{f'(t)}{g'(t)} > M$ für $t \in (a, c)$.

Fall (i): Wie im Beweis von Satz 10.20 ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ mit $\xi \in (a,x)$, also $> M$ für alle $x \in (a,c)$.

Fall (ii): Für $x \in (a,c)$ mit $g(x) \neq 0$ ist wie dort $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(x)} + q\Big(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\Big)$ mit $q = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > M$. Wegen $|g(x)| \to \infty$ gibt es $\delta > 0$, so dass für $a < x < a + \delta$ gilt: $g(x) \neq 0$, $x < c$, $\big|\frac{f(c)}{g(x)}\big| < 1$ und $\big|\frac{g(c)}{g(x)}\big| < \frac{1}{2}$. Dann ist $1 - \frac{g(c)}{g(x)} > \frac{1}{2}$ und $q > M > 0$, also

$$\frac{f(x)}{g(x)} > -1 + \frac{M}{2}.$$

Da M beliebig ist, folgt $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$. Für $-\infty$ betrachte man $-f$; für $x \to b-$ wendet man das Bewiesene wie im Beweis von Satz 10.20 auf $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto g(-x)$ auf $(-b,-a)$ an. □

Lösung V3. (a) Nach dem Mittelwertsatz ist $f(x+1) - f(x) = f'(\xi_x)$ mit $x < \xi_x < x+1$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es K mit $|f'(t) - \ell| < \varepsilon$ für $t > K$; für $x > K$ ist dann $\xi_x > K$ und $|f(x+1) - f(x) - \ell| < \varepsilon$.

(b) Folgerung 10.21 mit $R = 0$ und $g(x) = x$: $|g(x)| \to \infty$, $g' = 1 \neq 0$, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = f'(x) \to \ell$. Also $\frac{f(x)}{x} \to \ell$.

(c) $f(x) = \sin x$: $\frac{f(x)}{x} \to 0$, aber $f'(x) = \cos x$ hat für $x \to \infty$ keinen Grenzwert (es ist $\cos(2k\pi) = 1$ und $\cos((2k+1)\pi) = -1$).

Lösung V4. Sei zunächst f' stetig. Nach Satz 8.21 ist f' auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|f'(s) - f'(t)| < \varepsilon$ für $|s - t| < \delta$. Seien $x, y \in [a,b]$ mit $0 < |x - y| < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz ist $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\xi)$ mit ξ zwischen x und y, also $|\xi - y| < \delta$ und $|f'(\xi) - f'(y)| < \varepsilon$.

Sei umgekehrt f gleichmäßig differenzierbar. Schreibe $Q(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$; es gilt $Q(x,y) = Q(y,x)$. Zu $\varepsilon > 0$ sei δ wie in der Definition. Für $0 < |x - y| < \delta$ ist dann $|Q(x,y) - f'(y)| < \varepsilon$ und, mit vertauschten Rollen, $|Q(y,x) - f'(x)| < \varepsilon$. Mit der Dreiecksungleichung folgt $|f'(x) - f'(y)| < 2\varepsilon$. Also ist f' sogar gleichmäßig stetig.

Die Funktion aus (G2), eingeschränkt auf $[-1,1]$, ist differenzierbar, aber nicht gleichmäßig differenzierbar.

Lösung V5. (a) Ist f konstant, so leistet jedes $\xi > 0$ das Verlangte. Andernfalls gibt es $x_0 > 0$ mit $f(x_0) \neq f(0)$; indem man nötigenfalls $-f$ betrachtet, sei $f(x_0) > f(0)$. Setze $c = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(x_0)\big)$, also $f(0) < c < f(x_0)$. Wegen $f(x) \to f(0) < c$ gibt es $R > x_0$

mit $f(R) < c$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $y_1 \in (0, x_0)$ und $y_2 \in (x_0, R)$ mit $f(y_1) = c = f(y_2)$. Der Satz von Rolle auf $[y_1, y_2]$ liefert $\xi \in (y_1, y_2) \subseteq (0, \infty)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Für $f(x) = \exp(-x)$ ist $f(0) = 1$, aber $f(x) \to 0$, und $f'(x) = -\exp(-x) < 0$ hat keine Nullstelle. Im Beweis fehlt dann der Punkt R: Die Funktion kehrt nicht auf die Höhe $f(0)$ zurück.

(b) Angenommen, es gibt $x_0 < x_1$ in I mit $f'(x_0) \neq f'(x_1)$. Ist m die kleinere und n die größere dieser beiden ganzen Zahlen, so ist $n \geq m + 1$, und $c = m + \frac{1}{2}$ liegt echt zwischen ihnen und ist keine ganze Zahl. Nach dem Satz von Darboux, angewandt auf $f|_{[x_0, x_1]}$ (deren Ableitungen nach der Bemerkung über Lokalität die von f sind), gibt es $\xi \in (x_0, x_1)$ mit $f'(\xi) = c$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $f' = k$ konstant mit $k \in \mathbb{Z}$, und $x \mapsto f(x) - kx$ hat die Ableitung 0 und ist nach Folgerung 10.15 (1) konstant, gleich d.

(c) $|x|$ ist auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ differenzierbar mit Ableitung $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ und ist nicht von der Form $kx + d$. Im Beweis fehlt Darboux: Die Ableitung ist in 0 nicht erklärt, und $\frac{1}{2}$ wird nicht angenommen; vergleiche (G9).

EINHEIT 11

Taylor und Konvexität

Leitfrage

Ein Rechenwerk beherrscht nur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Es soll $\sin \frac{1}{2}$ und $\sqrt{2}$ auf zehn Nachkommastellen ausgeben. Einheit 9 stellt sin als Reihe dar (Definition 9.20, Satz 9.21 (4)), Einheit 2 erklärt $\sqrt{2}$ als positive Lösung von $x^2 = 2$ (Satz 2.39); beides sind Grenzwerte, und ein Rechenwerk bricht jeden Grenzprozess nach endlich vielen Schritten ab. **Wie berechnet man solche Zahlen mit endlich vielen Grundrechenarten, und woher weiß man, dass die ausgegebenen Stellen stimmen?**

Für $\sin \frac{1}{2}$ hat Einheit 9 schon eine Antwort gegeben: Auf $(0, 2]$ liegt $\sin x$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Partialsummen seiner Reihe (Satz 9.24). Diese Antwort hängt daran, dass sin als Reihe gegeben ist, deren Glieder dort im Vorzeichen wechseln und dem Betrag nach fallen, und Satz 9.24 ist nur für $0 < x \leq 2$ ausgesprochen. Für $\sqrt{1{,}1}$, $\ln 2$ oder $\sqrt[3]{2}$ gibt es keine definierende Reihe, die man abbrechen könnte. Diese Einheit gibt eine Antwort, die von keiner solchen Reihe abhängt. Das Taylorpolynom ersetzt eine Funktion durch ein Polynom, das allein aus ihren Ableitungen in einem Punkt gebildet ist, und das Restglied gibt eine beweisbare Fehlerschranke, für sin an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ (Satz 11.10). Für $\sqrt{2}$ erklärt die Konvexität, warum das Newton-Verfahren von oben monoton und sehr schnell konvergiert (Satz 11.22). Abschnitt 11.9 führt beide Rechnungen aus.

Voraussetzungen. Aus Einheit 10: die lineare Näherung (Satz 10.2), Folgerung 10.3 (Differenzierbarkeit erzwingt Stetigkeit), höhere Ableitungen und die Klassen C^k, C^∞ (Definition 10.4), die Rechenregeln (Satz 10.5), die Kettenregel (Satz 10.6), die Ableitungen von exp, ln, x^α (Satz 10.9) und von sin, cos (Satz 10.10), lokale Extremstellen (Definition 10.11), die Regel von Fermat (Satz 10.12), der Mittelwertsatz (Satz 10.14), das Monotoniekriterium (Folgerung 10.15) und der verallgemeinerte Mittelwertsatz von Cauchy (Satz 10.16); die Regeln von de l'Hospital (Satz 10.20) nur zum Vergleich. Ferner: die geometrische Summe (Satz 1.13), der Binomialsatz (Satz 1.20); Supremum und Infimum (Satz 2.34, Folgerung 2.35), Wurzeln (Satz 2.39); die Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$ (Satz 3.10); das Monotonieprinzip (Satz 4.16) und Satz 4.20; das Leibniz-Kriterium (Satz 6.16) und Folgerung 6.5; einseitige Grenzwerte (Definition 7.7, Lemma 7.8), der

Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16), konvexe Mengen und Intervalle (Definition 7.17, Lemma 7.18), Endpunkte und innere Punkte (Definition 7.29); der Satz vom Maximum (Satz 8.16); aus Einheit 9 die Eigenschaften von exp, ln, sin, cos, π und der allgemeinen Potenz, insbesondere $\exp(x) = \sum_{k\geq 0} x^k/k!$, das Wachstum $t^m \exp(-t) \to 0$ für $t \to \infty$ (Satz 9.11), die Reihen von sin und cos (Satz 9.21 (4)) sowie $\sin x > 0$ für $0 < x < \pi$ und $\cos x > 0$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$ (Satz 9.29 (1)). Ferner aus Einheit 10 die einseitigen Ableitungen und die Bemerkung über Lokalität und Einschränkung, für die Bemerkung über Werte in $\mathbb{C}$ die Bemerkung über Funktionen mit komplexen Werten, Lemma 10.22 und Folgerung 10.24; aus Einheit 7 die Erhaltung von $\leq$ beim Grenzübergang (Satz 7.6 (3)) und der Nullstellensatz (Satz 7.15); aus Einheit 9 außerdem $\exp(x) \geq 1 + x$ (Satz 9.7 (2)), die Abschätzungen auf $(0, 2]$ (Satz 9.24), $\exp(2\pi i) = 1$ (Satz 9.28 (1)), die Nullstellen von sin (Satz 9.29 (2)) und $\pi > 3$ (Absatz nach Definition 9.27). Zum Vergleich werden Satz 1.25, Satz 2.18 und Satz 4.21 herangezogen. Das Aufgabenblatt benutzt außerdem die Wohlordnung (Satz 1.16), die Dichtheit und die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31, Definition 2.42, Satz 2.45, Lemma 2.44), die Erhaltung von $\leq$ beim Grenzübergang für Folgen (Satz 4.10), das Quotientenkriterium (Satz 6.15) und Folgerung 7.20.

Die Folgerungen 11.23 bis 11.25 stehen in Abschnitt 11.5, also vor Satz 11.17; ihre Nummern schließen an die letzte Nummer der Einheit an.

Das Integral steht noch nicht zur Verfügung (Einheit 12). Alle Restglieder werden deshalb über Mittelwertsätze gewonnen; die Integralform des Restglieds folgt in Einheit 13 (Satz 13.9). Gliedweises Differenzieren von Potenzreihen steht erst in Einheit 14 zur Verfügung und wird nicht benutzt.

Schreibweise. I ist ein Intervall mit mehr als einem Punkt; Endpunkte und innere Punkte sind wie in Definition 7.29 erklärt. In einem Endpunkt von I, der zu I gehört, ist die Ableitung einseitig (Einheit 10). Für $r\colon I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ schreibt man $r(x) = o\big((x-a)^n\big)$ für $x \to a$, wenn $\lim_{x\to a} r(x)/(x-a)^n = 0$ gilt (*Landau-Symbol*). Entsprechend schreibt man $r(x) = O\big((x-a)^n\big)$ für $x \to a$, wenn es Zahlen $C \geq 0$ und $\delta > 0$ gibt mit $|r(x)| \leq C|x-a|^n$ für alle $x \in I$ mit $0 < |x-a| < \delta$. Beide Zeichen sind Abkürzungen für diese Aussagen, keine Gleichungen zwischen Funktionen: Aus $r(x) = o(x-a)$ und $s(x) = o(x-a)$ folgt nicht $r = s$. Der Satz über die lineare Näherung (Satz 10.2) sagt in dieser Schreibweise: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

11.1 Das Taylorpolynom

Die Tangente ist das Polynom vom Grad höchstens 1, das in a denselben Wert und dieselbe Ableitung hat wie f. Man sucht nun ein Polynom vom Grad höchstens n, das in a mit f in den ersten n Ableitungen übereinstimmt.

Definition 11.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar und $a \in I$. Das Polynom

$$T_n(x) = T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt *n-tes Taylorpolynom* von f im *Entwicklungspunkt* a. Die Funktion $R_n = f - T_n$ heißt *Restglied*.

Für die Definition genügt weniger. Ist $n \geq 1$, existiert $f^{(n-1)}$ auf I und ist $f^{(n-1)}$ im Punkt a differenzierbar, so schreiben wir $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$, auch wenn $f^{(n)}$ nicht auf ganz I existiert, und erklären T_n mit derselben Formel. Definition 10.4 erklärt $f^{(n)}$ nur als Funktion auf ganz I; die hier vereinbarte Schreibweise für einen einzelnen Punkt wird in Lemma 11.5, Satz 11.6 und Satz 11.8 gebraucht. Die Vereinbarung $0^0 = 1$ aus Einheit 1 sorgt dafür, dass der Summand $k = 0$ gleich $f(a)$ ist, auch für $x = a$.

Lemma 11.2. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Jedes Polynom p vom Grad höchstens n lässt sich als $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ schreiben.
2. Für $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ gilt $p^{(j)}(a) = j!\,c_j$ für $0 \leq j \leq n$ und $p^{(n+1)} = 0$. Insbesondere sind die c_k durch p und a eindeutig bestimmt, und $p = T_{n,a}p$.
3. Existiert $f^{(n)}(a)$ im Sinn von Definition 11.1 oder der Vereinbarung danach, so ist T_n das einzige Polynom vom Grad höchstens n, dessen Ableitungen der Ordnung 0 bis n in a mit denen von f übereinstimmen.

Beweis. (1) Sei $p(x) = \sum_{m=0}^{n} b_m x^m$. Nach dem Binomialsatz (Satz 1.20) ist $x^m = \big(a + (x-a)\big)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k}(x-a)^k$. Einsetzen und Ordnen der endlichen Doppelsumme nach k ergibt die Darstellung mit $c_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} a^{m-k} b_m$.

(2) Durch Induktion über j mit der Kettenregel folgt für $k, j \in \mathbb{N}_0$: Die j-te Ableitung von $(x-a)^k$ ist $\frac{k!}{(k-j)!}(x-a)^{k-j}$ für $j \leq k$ und 0 für $j > k$. In $x = a$ verschwindet $(x-a)^{k-j}$ für $k > j$, und für $k = j$ ist es 1. Also bleibt von $p^{(j)}(a)$ nur der Summand $k = j$ mit dem Wert $j!\,c_j$. Für $j = n+1 > k$ verschwinden alle Summanden. Damit ist $c_j = p^{(j)}(a)/j!$ durch die Funktion p festgelegt, und die Darstellung ist $T_{n,a}p$.

(3) Nach (2) mit $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ hat T_n in a die Ableitungen $f^{(j)}(a)$, $0 \leq j \leq n$. Hat ein Polynom q vom Grad höchstens n dieselbe Eigenschaft, so schreibt man es nach (1) in Potenzen von $x - a$; nach (2) sind seine Koeffizienten $q^{(k)}(a)/k! = f^{(k)}(a)/k!$, also ist $q = T_n$. □

Jedes Polynom lässt sich also nach Potenzen von $x-a$ umschreiben, mit den Koeffizienten $p^{(k)}(a)/k!$, und ein Polynom vom Grad höchstens n ist in jedem Punkt sein eigenes n-tes Taylorpolynom.

Beispiele. (a) Für $f = \exp$ und $a = 0$ ist $f^{(k)}(0) = 1$, also $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$: das Taylorpolynom ist die Teilsumme der Exponentialreihe. (b) Für sin in 0 wiederholen sich die Ableitungswerte $0, 1, 0, -1$; es ist $T_{2m+1}(x) = T_{2m+2}(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$. Für cos entsprechend $T_{2m}(x) = T_{2m+1}(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$. (c) Für $f(x) = \ln(1+x)$ auf $(-1, \infty)$ ist $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k}$ für $k \geq 1$ (Induktion), also $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

11.2 Restglieder nach Lagrange und Cauchy

Das Taylorpolynom ist nur so viel wert wie die Kenntnis des Fehlers. Der folgende Satz drückt den Fehler durch die nächsthöhere Ableitung an einer Zwischenstelle aus. Er verallgemeinert den Mittelwertsatz, der der Fall $n = 0$ ist.

Satz 11.3 (Taylor, Restglied nach Schlömilch). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, seien $a, x \in I$ mit $x \neq a$ und $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Dann gibt es ein ξ echt zwischen a und x mit

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,p}\,(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p.$$

Beweisidee. Man hält den Punkt x fest und lässt den Entwicklungspunkt wandern: $F(t)$ sei der Wert des Taylorpolynoms mit Entwicklungspunkt t an der Stelle x. Dann ist $F(x) = f(x)$ und $F(a) = T_n(x)$, und die Ableitung von F ist wegen einer Teleskopsumme sehr einfach. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz, angewandt auf F und eine frei wählbare Vergleichsfunktion, liefert den Rest.

Beweis. Für $t \in I$ sei

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \qquad G(t) = (x-t)^p.$$

Dann ist $F(x) = f(x)$ (nur der Summand $k = 0$ bleibt), $F(a) = T_n(x)$, $G(x) = 0$ und $G(a) = (x-a)^p$. Da $f^{(k)}$ für $k \leq n$ differenzierbar ist, ist F auf I differenzierbar. Mit $A_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$ gilt nach Produkt- und Kettenregel

$$\Big(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\Big)' = A_k(t) - A_{k-1}(t) \quad (k \geq 1), \qquad \big(f(t)\big)' = A_0(t),$$

denn $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$. Die Summe über $k = 0, \dots, n$ teleskopiert:

$$F'(t) = A_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Ferner ist $G'(t) = -p(x-t)^{p-1}$, und das ist für jedes t echt zwischen a und x von null verschieden. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz (Satz 10.16), angewandt auf F und G auf dem abgeschlossenen Intervall mit den Endpunkten a und x, liefert ξ echt zwischen a und x mit

$$\big(F(x)-F(a)\big)G'(\xi) = \big(G(x)-G(a)\big)F'(\xi).$$

Die Gleichung ändert sich nicht, wenn man die Rollen der beiden Endpunkte vertauscht; es kommt also nicht darauf an, ob $x < a$ oder $x > a$ ist. Einsetzen ergibt

$$\big(f(x)-T_n(x)\big)\big(-p(x-\xi)^{p-1}\big) = -(x-a)^p\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

Division durch $-p(x-\xi)^{p-1} \neq 0$ gibt die Behauptung, denn $n-(p-1) = n+1-p$. □

Folgerung 11.4 (Lagrange und Cauchy). Unter den Voraussetzungen von Satz 11.3 gibt es ξ und η echt zwischen a und x mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{(Lagrange)}, \qquad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-a) \quad \text{(Cauchy)}.$$

Ist insbesondere $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ für alle t zwischen a und x, so ist $|R_n(x)| \le \dfrac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$.

Beweis. $p = n+1$ beziehungsweise $p = 1$ in Satz 11.3. □

Die Lagrange-Form sieht aus wie der nächste Summand des Taylorpolynoms, nur mit der Ableitung an einer unbekannten Zwischenstelle. Sie ist die meistgebrauchte. Die Cauchy-Form ist dann überlegen, wenn der Faktor $(x-\eta)^n$ klein ist im Vergleich zu $(x-a)^n$; Satz 11.10 (4) und (G3) zeigen einen Fall, in dem die naheliegende Abschätzung der Lagrange-Form versagt und die Cauchy-Form zum Ziel führt. Über die Lage der Zwischenstelle weiß man in beiden Fällen nichts weiter, und die Stellen ξ, η sind im Allgemeinen verschieden.

Bemerkung (Integralform, Vorgriff). Für $f \in C^{n+1}(I)$ gilt $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$. Diese Darstellung setzt das Integral und den Hauptsatz voraus und wird in Einheit 13 bewiesen (Satz 13.9); dort folgen aus ihr die Lagrange-Form und die Cauchy-Form erneut, unter der stärkeren Voraussetzung $f \in C^{n+1}(I)$ und mit Mittelwertsätzen der Integralrechnung (Bemerkung nach Satz 13.9).

Bemerkung (Werte in $\mathbb{C}$). Für $f : I \to \mathbb{C}$ sind Ableitungen und höhere Ableitungen wie in der Bemerkung über Funktionen mit komplexen Werten in Abschnitt 10.6 erklärt. Nach Lemma 10.22 und Induktion über k ist f genau dann $(n+1)$-mal differenzierbar, wenn $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$ es sind, und dann ist $f^{(k)} = u^{(k)} + iv^{(k)}$ für $k \le n+1$; Definition 11.1 ergibt also $T_n f = T_n u + iT_n v$. Die Gleichungen von Lagrange und Cauchy

werden für solche f falsch: Schon für $n = 0$ ist das die Gleichungsform des Mittelwertsatzes, die für $f(t) = \exp(it)$ auf $[0, 2\pi]$ scheitert (Einheit 10, Absatz vor Folgerung 10.24). Die Schranke in Folgerung 11.4 bleibt richtig; für $n = 0$ ist sie Folgerung 10.24, und der Beweis überträgt sich. Ist $R = f(x) - T_n f(x) \neq 0$ und $c = \overline{R}/|R|$, so ist $g = \operatorname{Re}(cf)$ reellwertig und nach Satz 10.5 (für Werte in $\mathbb{C}$) und Lemma 10.22 $(n+1)$-mal differenzierbar mit $g^{(k)} = \operatorname{Re}(cf^{(k)})$. Weil $(x-a)^k/k!$ reell ist, gilt $T_n g = \operatorname{Re}(c\, T_n f)$ und damit $g(x) - T_n g(x) = \operatorname{Re}(cR) = |R|$. Die Lagrange-Form für g gibt ein ξ zwischen a und x mit $|R| = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$, denn $|\operatorname{Re} w| \leq |w|$ und $|c| = 1$.

11.3 Die qualitative Form: Restglied nach Peano

Die Restglieder nach Lagrange und Cauchy verlangen eine Ableitung mehr, als im Polynom vorkommt, und zwar auf einem ganzen Intervall. Will man nur wissen, wie schnell der Fehler verschwindet, genügt weniger.

Lemma 11.5. Sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in I$, und sei $h\colon I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar mit in a differenzierbarer Ableitung $h^{(n-1)}$. Gilt $h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = 0$, so ist $h(x) = o\big((x-a)^n\big)$ für $x \to a$.

Beweis. Induktion über n. Für $n = 1$ ist $\frac{h(x)}{x-a} = \frac{h(x)-h(a)}{x-a} \to h'(a) = 0$. Gelte die Aussage für n, und erfülle h die Voraussetzungen für $n+1$. Dann erfüllt h' sie für n: h' ist $(n-1)$-mal differenzierbar, $(h')^{(n-1)} = h^{(n)}$ ist in a differenzierbar, und $(h')^{(j)}(a) = h^{(j+1)}(a) = 0$ für $j \leq n$. Also gilt $\frac{h'(t)}{(t-a)^n} \to 0$ für $t \to a$. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $|h'(t)| \leq \varepsilon |t-a|^n$ für $t \in I$ mit $0 < |t-a| < \delta$. Sei $x \in I$ mit $0 < |x-a| < \delta$. Nach dem Mittelwertsatz ist $h(x) = h(x) - h(a) = h'(\xi)(x-a)$ mit ξ echt zwischen a und x, also $0 < |\xi - a| < |x-a| < \delta$ und

$$|h(x)| \leq \varepsilon |\xi - a|^n |x-a| \leq \varepsilon |x-a|^{n+1}. \qquad \square$$

Satz 11.6 (Taylor, Restglied nach Peano). Sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal differenzierbar und $f^{(n-1)}$ in a differenzierbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big) \qquad (x \to a).$$

Beweis. $h = f - T_n$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 11.5, denn T_n ist ein Polynom und $h^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) - T_n^{(j)}(a) = 0$ für $j \leq n$ nach Lemma 11.2 (3). $\square$

Für $n = 1$ ist das der Satz über die lineare Näherung (Satz 10.2). Die Lagrange-Form liefert unter ihren stärkeren Voraussetzungen mehr: Ist f $(n+1)$-mal differenzierbar und $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ für alle $t \in I$ mit $|t-a| < \delta$, so ist $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ für diese x, also $R_n(x) = O\big((x-a)^{n+1}\big)$, und zwar mit ausdrücklicher Konstante. Satz 11.6

liefert nur, dass der Fehler schneller als $(x-a)^n$ verschwindet, und keine Schranke. Die Peano-Form gehört zur lokalen Analyse (Grenzwerte, Extrema), die Lagrange-Form zum Rechnen.

Folgerung 11.7 (Eindeutigkeit). Sei f wie in Satz 11.6 und p ein Polynom vom Grad höchstens n mit $f(x)-p(x)=o\big((x-a)^n\big)$. Dann ist $p=T_n$.

Beweis. $q=T_n-p$ ist ein Polynom vom Grad höchstens n mit $q(x)=o\big((x-a)^n\big)$, als Differenz zweier solcher Ausdrücke. Nach Lemma 11.2 (1) ist $q(x)=\sum_{k=0}^{n} d_k(x-a)^k$. Wäre $q\neq 0$, so sei m der kleinste Index mit $d_m\neq 0$. Für $x\to a$ gilt einerseits

$$\frac{q(x)}{(x-a)^m}=d_m+\sum_{k=m+1}^{n} d_k(x-a)^{k-m}\to d_m\neq 0,$$

andererseits $\frac{q(x)}{(x-a)^m}=\frac{q(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-m}\to 0$. Widerspruch. □

Die Folgerung ist ein Rechenwerkzeug: Wer auf irgendeinem Weg ein Polynom p mit $f-p=o((x-a)^n)$ findet, hat das Taylorpolynom gefunden, ohne eine Ableitung auszurechnen. Beispiel 5 in 11.9 nutzt das.

Die Regel von Fermat (Satz 10.12) gibt nur eine notwendige Bedingung: In einer lokalen Extremstelle im Inneren verschwindet die Ableitung. Ob eine Nullstelle von f' wirklich eine Extremstelle ist, ließ sich bisher nur am Vorzeichen von f' links und rechts von ihr entscheiden (Folgerung 10.15). Die Peano-Form entscheidet an der Stelle selbst, mit der ersten Ableitung, die dort nicht verschwindet. Der Fall $n=2$ ist die vertraute Regel: Aus $f'(a)=0$ und $f''(a)>0$ folgt eine strikte lokale Minimalstelle.

Satz 11.8 (Extrema). Sei a ein innerer Punkt von I (Definition 7.29), $n\geq 2$, f wie in Satz 11.6, und es gelte

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\qquad f^{(n)}(a)\neq 0.$$

1. Ist n gerade, so hat f in a eine strikte lokale Extremstelle, und zwar ein Minimum für $f^{(n)}(a)>0$ und ein Maximum für $f^{(n)}(a)<0$.
2. Ist n ungerade, so hat f in a keine lokale Extremstelle.

Beweis. Nach Satz 11.6 ist $f(x)-f(a)=\big(c+\rho(x)\big)(x-a)^n$ für $x\neq a$, mit $c=f^{(n)}(a)/n!\neq 0$ und $\rho(x)\to 0$ für $x\to a$. Wähle $\delta>0$ mit $(a-\delta,a+\delta)\subseteq I$ (das geht nach Definition 7.29 und dem Absatz danach) und $|\rho(x)|<|c|$ für $0<|x-a|<\delta$. Dort hat $c+\rho(x)$ das Vorzeichen von c. Ist n gerade, so ist $(x-a)^n>0$ für $x\neq a$, und $f(x)-f(a)$ hat für alle $0<|x-a|<\delta$ das Vorzeichen von c. Ist n ungerade, so hat $(x-a)^n$ links und rechts von a verschiedene Vorzeichen, und $f(x)-f(a)$ ebenso; dann ist a weder Maximal- noch Minimalstelle. □

Ist a dagegen ein Endpunkt von I, der zu I gehört, so liefert derselbe Beweis, auf die eine Seite von a beschränkt, Folgendes: $f(x) - f(a)$ hat für $x \in I$ nahe a, $x \neq a$, das feste Vorzeichen von $c\,(x-a)^n$, und a ist eine strikte lokale Extremstelle, auch für ungerades n. So hat $x \mapsto x^3$ auf $[0,1]$ in 0 eine strikte Minimalstelle.

Der Satz entscheidet nicht, wenn alle Ableitungen in a verschwinden. Das kommt auch bei Funktionen in C^∞ vor, die nicht konstant sind (Satz 11.11).

11.4 Taylorreihen

Definition 11.9. Ist $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$, so heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ die *Taylorreihe* von f in a.

Zwei Fragen stellen sich: Konvergiert die Taylorreihe in einem Punkt x? Und wenn ja, ist ihr Wert $f(x)$? Die zweite Frage ist gleichbedeutend mit $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$, denn $T_n(x)$ ist die n-te Teilsumme. Beide Antworten können „nein“ sein, auch für Funktionen in $C^\infty(\mathbb{R})$: (G1) zeigt eine Taylorreihe, die überall konvergiert, aber nur im Entwicklungspunkt gegen die Funktion, und (G2) mit $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ eine, die für $|x| \geq 1$ divergiert.

Satz 11.10 (vier Entwicklungen). Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

1. $\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \exp(|x|)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,
2. $\left|\sin x - \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}$ für $m \in \mathbb{N}_0$,
3. $\left|\cos x - \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}\right| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$ für $m \in \mathbb{N}_0$.

Ferner gilt für $-1 < x \leq 1$:

4. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, mit $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ für $0 \leq x \leq 1$ und $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1+x}$ für $-1 < x < 0$.

In (1) bis (3) streben die Schranken für $n \to \infty$ gegen 0, die Taylorreihen konvergieren also gegen die Funktion.

Beweis. Für $x = 0$ ist alles klar; sei $x \neq 0$.

(1) Lagrange: $R_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ mit ξ zwischen 0 und x, und $\exp(\xi) \leq \exp(|x|)$, weil exp wächst.

(2) Nach den Beispielen in 11.1 ist T_{2m+2} die angegebene Summe. Die Lagrange-Form

mit $n = 2m + 2$ enthält $\sin^{(2m+3)}(\xi) \in \{\pm\sin\xi, \pm\cos\xi\}$, betragsmäßig höchstens 1.

(3) Ebenso mit T_{2m+1} und $n = 2m + 1$.

Dass $|x|^{n+1}/(n+1)! \to 0$, folgt daraus, dass die Glieder der konvergenten Reihe $\sum |x|^k/k!$ eine Nullfolge bilden.

(4) Nach Beispiel (c) in 11.1 ist $f^{(n+1)}(t) = (-1)^n n!\,(1+t)^{-n-1}$. Für $0 < x \le 1$ gibt die Lagrange-Form mit $\xi \in (0, x)$

$$|R_n(x)| = \frac{n!}{(n+1)!}\,\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \le \frac{1}{n+1}.$$

Für $-1 < x < 0$ benutzt man die Cauchy-Form mit $\eta \in (x, 0)$:

$$|R_n(x)| = \frac{n!}{n!}\,\frac{|x-\eta|^n|x|}{(1+\eta)^{n+1}} = \frac{|x|}{1+\eta}\Big(\frac{\eta - x}{1+\eta}\Big)^n.$$

Es ist $\frac{\eta-x}{1+\eta} \le |x| = -x$, denn das ist gleichwertig mit $\eta - x \le -x - x\eta$, also mit $\eta(1+x) \le 0$, und das gilt wegen $\eta < 0 < 1 + x$. Ferner $1 + \eta > 1 + x > 0$. Also $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1+x}$, und wegen $|x| < 1$ strebt das gegen 0. □

Für exp, sin und cos ergeben sich die Reihen, die Einheit 9 für diese Funktionen angibt; neu ist die Fehlerschranke für die abgebrochene Reihe an jeder Stelle. Für $\ln(1 + x)$ ist die Entwicklung neu. Mit $x = 1$ folgt

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 6.16); welchen Wert sie hat, sagt das Kriterium nicht. Satz 11.10 (4) beantwortet diese Frage: Der Wert ist $\ln 2$. Einheit 13 (mit einem Restintegral wie für $\frac{\pi}{4}$, angedeutet im Anschluss an Abschnitt 13.10, Beispiel 7) und Einheit 14 (gliedweise Integration der geometrischen Reihe und Abelscher Grenzwertsatz, Abschnitt 14.11, Beispiel 2) gewinnen dieselbe Entwicklung auf anderen Wegen; jeder Weg zeigt, was sein Werkzeug leistet.

Satz 11.11 (eine glatte Funktion mit verschwindender Taylorreihe). Sei $f(x) = \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Dann ist $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweisidee. Für $x \neq 0$ hat jede Ableitung die Gestalt „Polynom in $1/x$ mal $\exp(-1/x^2)$“, und die Exponentialfunktion schlägt jede Potenz von $1/x$.

Beweis. Zunächst eine Grenzwertaussage: Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $|x|^{-m}\exp(-1/x^2) \to 0$ für $x \to 0$. Denn mit $t = 1/x^2$ ist $|x|^{-m} \le |x|^{-2m} = t^m$ für $0 < |x| \le 1$, also $0 \le |x|^{-m}\exp(-1/x^2) \le t^m\exp(-t)$, und $t^m\exp(-t) \to 0$ für $t \to \infty$ (Satz 9.11). Folglich gilt $q(1/x)\exp(-1/x^2) \to 0$ für jedes Polynom q.

Wir zeigen durch Induktion über k: Es gibt ein Polynom p_k mit $f^{(k)}(x) = p_k(1/x)\exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$, und $f^{(k)}(0) = 0$. Für $k = 0$ ist $p_0 = 1$. Gelte die Aussage für k. Für $x \neq 0$ gibt die Kettenregel mit $y = 1/x$ und $(1/x)' = -1/x^2$, $(-1/x^2)' = 2/x^3$:

$$f^{(k+1)}(x) = \Big(-p_k'(y)\,y^2 + p_k(y)\,2y^3\Big)\exp(-1/x^2),$$

also $p_{k+1}(y) = 2y^3 p_k(y) - y^2 p_k'(y)$. In 0 ist

$$\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \frac{1}{x}\,p_k\Big(\frac{1}{x}\Big)\exp(-1/x^2) \to 0,$$

weil $y\,p_k(y)$ ein Polynom in $y = 1/x$ ist. Also existiert $f^{(k+1)}(0)$ und ist 0. Damit existiert $f^{(k)}$ für jedes k auf ganz $\mathbb{R}$. Jede Ableitung $f^{(k)}$ ist differenzierbar, nach Folgerung 10.3 also stetig; somit ist $f \in C^k(\mathbb{R})$ für alle k, also $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. □

Die Taylorreihe von f in 0 ist die Nullreihe. Sie konvergiert überall, aber nur in 0 gegen f, denn $f(x) > 0$ für $x \neq 0$. Eine Funktion $f \in C^\infty(I)$ heißt *reell-analytisch*, wenn es zu jedem $a \in I$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die Taylorreihe von f in a für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$ gegen $f(x)$ konvergiert. Satz 11.11 zeigt, dass C^∞ dafür nicht genügt: Die Bedingung scheitert im Punkt $a = 0$.

Zwischenbilanz. Das Taylorpolynom ersetzt eine Funktion durch ein Polynom. Die Restglieder von Lagrange und Cauchy machen daraus eine Rechnung mit beweisbarer Fehlerschranke, die Peano-Form eine Aussage über das Verhalten nahe beim Entwicklungspunkt. Damit ist der erste Teil der Leitfrage beantwortet (Beispiel 1 in 11.9). Für den zweiten Teil kommt es zuerst auf das Vorzeichen der zweiten Ableitung an, erst für die Geschwindigkeit auf ihre Größe. Dass $f'' \geq 0$ ist, hat eine geometrische Bedeutung, und sie lässt sich ohne Ableitungen aussprechen. Das ist die Konvexität.

11.5 Konvexe Funktionen

Die zweite Ableitung misst, wie sich die Steigung ändert. Ist sie positiv, so liegt der Graph oberhalb jeder Tangente und unterhalb jeder Sehne. Die zweite Eigenschaft lässt sich ohne Ableitungen formulieren. Darum reicht sie weiter: Sie erfasst Funktionen mit Knicken wie $|x|$ oder $\max(f_1, f_2)$ (Aufgabe B1), und aus ihr allein folgen Stetigkeit und einseitige Ableitungen im Inneren (Satz 11.14) sowie die Ungleichung von Jensen (Satz 11.17).

Definition 11.12. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und $t \in [0,1]$

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

gilt, und *streng konvex*, wenn für $x \neq y$ und $t \in (0,1)$ sogar $<$ gilt. Sie heißt *(streng)*

konkav, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Der Punkt $(1-t)x+ty$ durchläuft für $t \in [0,1]$ die Strecke von x nach y. Er liegt in I, weil I als Intervall eine konvexe Menge im Sinn von Definition 7.17 ist (Lemma 7.18). Mehr verlangt die Definition vom Definitionsbereich nicht; das Wort „konvex" bezeichnet also zwei verwandte Begriffe, einen für Mengen und einen für Funktionen. Die rechte Seite der Ungleichung ist der Wert der Sehne durch $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ an dieser Stelle. Konvex heißt also: Jede Sehne liegt über dem Graphen.

Beispiele. (a) Affine Funktionen $x \mapsto mx + c$ sind konvex und konkav, mit Gleichheit in der Definition. (b) $f(x) = x^2$ ist streng konvex: Ausrechnen gibt $(1-t)x^2 + ty^2 - \big((1-t)x + ty\big)^2 = t(1-t)(x-y)^2$. (c) $f(x) = |x|$ ist konvex nach der Dreiecksungleichung, aber nicht streng konvex: Auf $[0, \infty)$ ist f affin.

Lemma 11.13 (Steigungen von Sehnen). $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $x < u < y$ in I gilt

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(y) - f(u)}{y - u}.$$

Bei strenger Konvexität gilt beide Male $<$.

Beweis. Sei $x < u < y$ und $t = \frac{u-x}{y-x} \in (0,1)$, also $u = (1-t)x + ty$ und $1 - t = \frac{y-u}{y-x}$. Die Konvexitätsungleichung $f(u) \le (1-t)f(x) + tf(y)$ lässt sich auf zwei Arten umstellen:

$$f(u) - f(x) \le t\big(f(y) - f(x)\big), \qquad f(y) - f(u) \ge (1-t)\big(f(y) - f(x)\big).$$

Division durch $u - x = t(y - x)$ beziehungsweise $y - u = (1-t)(y-x)$ ergibt die linke beziehungsweise die rechte Ungleichung. Umgekehrt ist schon die linke Ungleichung allein nach derselben Umformung gleichwertig mit der Konvexitätsungleichung für $x < y$ und $t \in (0,1)$. Für $t \in \{0,1\}$ oder $x = y$ ist die Konvexitätsungleichung eine Gleichung, und der Fall $x > y$ geht durch Vertauschen von x, y und $t, 1-t$ in den Fall $x < y$ über. Mit $<$ ebenso. □

Folgerung 11.23 (Steigungsfunktion). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und $u \in I$. Dann ist die Funktion

$$s_u : I \setminus \{u\} \to \mathbb{R}, \qquad s_u(y) = \frac{f(y) - f(u)}{y - u},$$

monoton wachsend, und streng monoton wachsend, wenn f streng konvex ist. Ferner ist $s_u(x) = s_x(u)$ für $x \neq u$.

Beweis. Die letzte Gleichung folgt durch Erweitern mit -1. Seien $y_1 < y_2$ in $I \setminus \{u\}$. Ist $y_1 < u < y_2$, so ist $s_u(y_1) \le s_u(y_2)$ die äußere Ungleichung von Lemma 11.13 für die

Punkte $y_1 < u < y_2$, denn $s_u(y_1) = \frac{f(u)-f(y_1)}{u-y_1}$. Ist $u < y_1 < y_2$, so ist es die linke Ungleichung für $u < y_1 < y_2$. Ist $y_1 < y_2 < u$, so ist es die rechte Ungleichung für $y_1 < y_2 < u$, denn dort steht links $\frac{f(u)-f(y_1)}{u-y_1} = s_u(y_1)$ und rechts $\frac{f(u)-f(y_2)}{u-y_2} = s_u(y_2)$. Bei strenger Konvexität gelten alle drei Ungleichungen streng. □

Die Definition der Konvexität verlangt weder Stetigkeit noch Differenzierbarkeit. Trotzdem folgt im Inneren des Intervalls beides fast von selbst. Der Grund ist die eben gezeigte Monotonie von s_u: Ein monoton wachsender Differenzenquotient, der nach unten beschränkt ist, hat beim Grenzübergang $y \to u+$ einen Grenzwert, so wie eine monotone beschränkte Folge (Satz 4.16).

Satz 11.14. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:

1. In jedem inneren Punkt u von I existieren die einseitigen Ableitungen $f'_-(u) = \lim_{x\to u-} s_u(x)$ und $f'_+(u) = \lim_{y\to u+} s_u(y)$, und $f'_-(u) \le f'_+(u)$.
2. Für innere Punkte $u < v$ von I gilt $f'_+(u) \le \dfrac{f(v)-f(u)}{v-u} \le f'_-(v)$.
3. f ist in jedem inneren Punkt von I stetig. Insbesondere ist eine konvexe Funktion auf einem Intervall, das keinen seiner Endpunkte enthält, stetig.

Beweis. (1) Sei u ein innerer Punkt. Nach Definition 7.29 und dem Absatz danach gibt es Punkte von I links und rechts von u, und u ist Häufungspunkt von $I \cap (u, \infty)$ und von $I \cap (-\infty, u)$. Nach Folgerung 11.23 ist s_u monoton wachsend. Auf $\{y \in I : y > u\}$ ist s_u nach unten beschränkt, etwa durch $s_u(x)$ für ein festes $x \in I$ mit $x < u$; sei σ das Infimum dieser Werte (Folgerung 2.35). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $y_0 > u$ in I mit $s_u(y_0) < \sigma + \varepsilon$, und für $y \in I$ mit $u < y < y_0$ ist $\sigma \le s_u(y) \le s_u(y_0) < \sigma + \varepsilon$. Also ist $f'_+(u) = \lim_{y\to u+} s_u(y) = \sigma$ (Definition 7.7). Ebenso existiert $f'_-(u) = \lim_{x\to u-} s_u(x)$ als Supremum der Werte von s_u links von u. Jeder dieser Werte ist $\le s_u(y)$ für jedes $y > u$; also ist $f'_-(u) \le \sigma = f'_+(u)$.

(2) Wegen der Monotonie von s_u ist $f'_+(u) = \inf_{y>u} s_u(y) \le s_u(v)$, und ebenso $f'_-(v) = \sup_{x<v} s_v(x) \ge s_v(u)$. Es ist $s_u(v) = s_v(u)$.

(3) Für $y \to u+$ ist $f(y) - f(u) = s_u(y)(y-u) \to f'_+(u) \cdot 0 = 0$, für $x \to u-$ ebenso mit $f'_-(u)$. Beide einseitigen Grenzwerte von f in u sind also $f(u)$, nach Lemma 7.8 ist $\lim_{x\to u} f(x) = f(u)$. □

Am Rand eines Intervalls, das einen Endpunkt enthält, kann eine konvexe Funktion springen (G5). Im Inneren kann sie Knicke haben, wie $|x|$; nach Aufgabe V2 aber nur abzählbar viele (Definition 2.42).

Satz 11.15 (Konvexität und Ableitung). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gleichwertig sind:

1. f ist konvex.

2. f' ist monoton wachsend.
3. Für alle $x, y \in I$ gilt $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$: Der Graph liegt über jeder Tangente.

Ferner ist f genau dann streng konvex, wenn f' streng monoton wachsend ist.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Seien $x < y$ in I. Nach Folgerung 11.23 ist s_x monoton wachsend; für $x < t < y$ ist also $s_x(t) \leq s_x(y)$, und der Grenzübergang $t \to x+$ gibt $f'(x) \leq s_x(y)$. Ebenso gibt $s_y(t) \geq s_y(x)$ für $x < t < y$ beim Grenzübergang $t \to y-$: $f'(y) \geq s_y(x) = s_x(y)$. Zusammen ist $f'(x) \leq f'(y)$. Das Argument gilt auch, wenn x oder y ein Endpunkt von I ist; dort ist die Ableitung einseitig. Ist f streng konvex, so ist s_x nach Folgerung 11.23 streng wachsend. Wählt man t_0 mit $x < t_0 < y$, so ist $f'(x) \leq s_x(t_0)$, denn $f'(x)$ ist Grenzwert von Werten $s_x(t)$ mit $x < t < t_0$, die alle $\leq s_x(t_0)$ sind; also $f'(x) \leq s_x(t_0) < s_x(y) = s_y(x) \leq f'(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $y \neq x$. Der Mittelwertsatz liefert ξ echt zwischen x und y mit $f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$. Ist $y > x$, so ist $f'(\xi) \geq f'(x)$ und $y-x > 0$, also $f'(\xi)(y-x) \geq f'(x)(y-x)$. Ist $y < x$, so ist $f'(\xi) \leq f'(x)$ und $y - x < 0$, und die Multiplikation mit $y - x < 0$ kehrt die Ungleichung um; es gilt also wieder $f'(\xi)(y-x) \geq f'(x)(y-x)$. Ist f' streng wachsend, so gilt beide Male $>$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Seien $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ und $z = (1-t)x + ty$. Nach (3) mit z als Berührpunkt ist $f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z)$ und $f(y) \geq f(z) + f'(z)(y-z)$. Multipliziert man mit $1-t$ beziehungsweise t und addiert, so folgt

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(z) + f'(z)\big((1-t)x + ty - z\big) = f(z).$$

Ist f' streng wachsend, $x \neq y$ und $t \in (0,1)$, so ist $z \neq x$ und $z \neq y$; dann gelten in (3) beide Ungleichungen streng, und das Ergebnis auch. □

Folgerung 11.16. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Genau dann ist f konvex, wenn $f'' \geq 0$ auf I ist. Ist $f'' > 0$ in allen inneren Punkten von I, so ist f streng konvex.

Beweis. Nach Satz 11.15 ist f genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist. Die Funktion f' ist differenzierbar, nach Folgerung 10.3 also stetig. Ist $f'' \geq 0$ (beziehungsweise $f'' > 0$) in den inneren Punkten, so ist f' nach Folgerung 10.15 (2) monoton (beziehungsweise streng monoton) wachsend. Ist umgekehrt f' monoton wachsend, so ist $f'' \geq 0$ in jedem inneren Punkt nach Folgerung 10.15 (4). Gehört ein Endpunkt c zu I, so ist $\frac{f'(t)-f'(c)}{t-c} \geq 0$ für alle $t \in I \setminus \{c\}$, weil Zähler und Nenner dasselbe Vorzeichen haben; der Grenzwert $f''(c)$ ist daher ebenfalls ≥ 0 (Satz 7.6 (3)). Satz 11.15 schließt ab. □

Die Umkehrung des zweiten Teils ist falsch: x^4 ist streng konvex, aber $f''(0) = 0$ (G4).

Beispiele. (a) exp ist streng konvex, denn $\exp'' = \exp > 0$. (b) ln ist auf $(0,\infty)$ streng konkav, denn $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$. (c) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ auf $(0,\infty)$; also ist $x \mapsto x^\alpha$ konvex für $\alpha \geq 1$ und für $\alpha \leq 0$, konkav für $0 \leq \alpha \leq 1$, und streng, wenn $\alpha \notin \{0,1\}$. (d) sin ist auf $[0,\pi]$ konkav, denn $\sin'' = -\sin \leq 0$ dort (Satz 9.29 (1), $\sin 0 = 0$ und $\sin\pi = 0$ nach Satz 9.29 (2)).

Folgerung 11.24. Eine streng konvexe Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ hat höchstens zwei Nullstellen. Insbesondere schneidet der Graph einer streng konvexen Funktion jede Gerade höchstens zweimal.

Beweis. Wären $x < u < y$ drei Nullstellen, so wären die Sehnensteigungen $\frac{h(u)-h(x)}{u-x}$ und $\frac{h(y)-h(x)}{y-x}$ beide 0, im Widerspruch zur strengen Ungleichung in Lemma 11.13. Für die zweite Aussage wende man das auf $h-g$ mit affinem g an; $h-g$ ist streng konvex, weil g in Definition 11.12 Gleichheit liefert. □

Beispiel. Die Gleichung $\exp(x) = 3x$ hat genau zwei reelle Lösungen, eine in $(0,1)$ und eine in $(1,2)$: Aufgabe R5 der Einheit 9 liefert je eine Lösung in diesen Intervallen, und $g(x) = \exp(x) - 3x$ ist wegen $g'' = \exp > 0$ streng konvex (Folgerung 11.16), hat also nach Folgerung 11.24 höchstens zwei Nullstellen.

Folgerung 11.25 (Standardabschätzungen).

1. $\exp(t) \geq 1 + t$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $\exp(t) \leq 1 + (e-1)t$ für $0 \leq t \leq 1$.
2. $\exp(t) \geq 1 + t + \frac{t^2}{2}$ für alle $t \geq 0$.
3. $\ln x \leq x - 1$ für alle $x > 0$.
4. $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, und $\sin x \leq x$ für alle $x \geq 0$.

Beweis. (1) exp ist konvex (Beispiel (a) nach Folgerung 11.16). Die erste Ungleichung ist Satz 11.15 (3) mit Berührpunkt 0. Die zweite ist Definition 11.12 mit den Punkten 0 und 1: $\exp(t) = \exp\big((1-t)\cdot 0 + t\cdot 1\big) \leq (1-t)\exp(0) + t\exp(1) = 1 + (e-1)t$.

(2) Für $t > 0$ gibt Folgerung 11.4 (Lagrange, $n = 2$, Entwicklungspunkt 0) ein $\xi \in (0,t)$ mit $\exp(t) - \big(1 + t + \frac{t^2}{2}\big) = \frac{\exp(\xi)}{6}t^3 \geq 0$; für $t = 0$ gilt Gleichheit.

(3) $-\ln$ ist konvex (Beispiel (b) nach Folgerung 11.16). Satz 11.15 (3) für $-\ln$ mit Berührpunkt 1 gibt $-\ln x \geq -\ln 1 - (x-1) = -(x-1)$.

(4) $-\sin$ ist auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ konvex (Beispiel (d) nach Folgerung 11.16). Satz 11.15 (3) für $-\sin$ mit Berührpunkt 0 gibt $-\sin x \geq -\sin 0 - \cos 0 \cdot x = -x$. Für die linke Ungleichung sei $t = \frac{2x}{\pi} \in [0,1]$, also $x = (1-t)\cdot 0 + t\cdot\frac{\pi}{2}$. Definition 11.12 für $-\sin$ gibt $-\sin x \leq (1-t)(-\sin 0) + t\big(-\sin\frac{\pi}{2}\big) = -t$, also $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$. Für $x > \frac{\pi}{2}$ ist $\sin x \leq 1 < \frac{\pi}{2} < x$, denn $\pi > 3$ (Definition 9.27 und der Absatz danach). □

Die erste Ungleichung in (1) steht schon in Einheit 9; hier erscheint sie als Fall der Tangentenungleichung. Teil (4) heißt *Jordansche Ungleichung*. Ohne Konvexität müsste man die Funktion $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ mit Ableitungen diskutieren.

11.6 Die Ungleichung von Jensen und ihre Folgen

Die Sehnenbedingung spricht über zwei Punkte. Durch Induktion überträgt sie sich auf gewichtete Mittel beliebig vieler Punkte. Aus dieser einen Aussage folgen die Ungleichungen zwischen Mitteln und die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski.

Satz 11.17 (Jensen). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann ist $\sum_i \lambda_i x_i \in I$ und

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Ist f streng konvex und sind alle $\lambda_i > 0$, so gilt Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$.

Beweis. Induktion über n. Für $n = 1$ ist $\lambda_1 = 1$, und es gilt Gleichheit. Gelte der Satz für n, und seien $n+1$ Punkte und Gewichte gegeben. Ist $\lambda_{n+1} = 1$, so sind alle anderen Gewichte null, und es gilt Gleichheit. Sonst ist $\mu = 1 - \lambda_{n+1} = \sum_{i \leq n} \lambda_i > 0$, und die Gewichte λ_i/μ ($i \leq n$) sind ≥ 0 mit Summe 1. Nach Induktionsvoraussetzung liegt $y = \sum_{i \leq n} \frac{\lambda_i}{\mu} x_i$ in I, und $f(y) \leq \sum_{i \leq n} \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i)$. Nun ist $\sum_{i \leq n+1} \lambda_i x_i = \mu y + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ ein Punkt der Strecke zwischen y und x_{n+1}, liegt also in I, und

$$f\big(\mu y + \lambda_{n+1} x_{n+1}\big) \leq \mu f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Zur Gleichheit: Seien f streng konvex, alle $\lambda_i > 0$ und Gleichheit gegeben. Dann ist $\mu \in (0,1)$, und beide Ungleichungen der letzten Zeile sind Gleichungen. Aus der zweiten folgt $f(y) = \sum_{i \leq n} \frac{\lambda_i}{\mu} f(x_i)$, nach Induktionsvoraussetzung also $x_1 = \cdots = x_n$ und damit $y = x_1$. Aus der ersten folgt wegen der strengen Konvexität $y = x_{n+1}$. □

Folgerung 11.18 (gewichtetes arithmetisch-geometrisches Mittel). Für $x_1, \dots, x_n > 0$ und $\lambda_i \geq 0$ mit $\sum \lambda_i = 1$ gilt

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i,$$

bei positiven Gewichten mit Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$. Insbesondere ist $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Beweis. $-\ln$ ist streng konvex. Jensen gibt $\ln\bigl(\sum \lambda_i x_i\bigr) \geq \sum \lambda_i \ln x_i = \ln \prod x_i^{\lambda_i}$, denn $x^\lambda = \exp(\lambda \ln x)$ und exp verwandelt Summen in Produkte. Da exp streng monoton wächst, folgt die Behauptung, und die Gleichheitsaussage überträgt sich. □

Für $n = 2$ und $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ist das $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$. Für positive Zahlen ist das nach Quadrieren Satz 1.25 aus Einheit 1. Neu sind beliebig viele Zahlen und beliebige Gewichte.

Im Folgenden sei $p > 1$ und q durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bestimmt, also $q = \frac{p}{p-1} > 1$; man nennt p und q *konjugierte Exponenten*. Wie in Einheit 9 ist $0^s = 0$ für $s > 0$.

Satz 11.19 (Young). Für $a, b \geq 0$ gilt $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Beweis. Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so ist die linke Seite 0. Sonst gibt Folgerung 11.18 mit $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$:

$$ab = (a^p)^{1/p}(b^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q.$$

Dabei ist $(a^p)^{1/p} = \exp\bigl(\frac{1}{p}\ln\exp(p\ln a)\bigr) = a$. □

Den Abstand zweier Punkte der Ebene misst man gewöhnlich mit

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

wie den Betrag in $\mathbb{C}$ (Abschnitt 3.3). Man kann Abstände auch anders messen, etwa durch die Summe $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ der Koordinatenabstände. Beide sind Fälle einer Familie: Für $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $r \geq 1$ sei

$$\|\boldsymbol{x}\|_r = \Bigl(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^r\Bigr)^{1/r}.$$

Dass jede dieser Größen die Dreiecksungleichung erfüllt, ist nur für $r = 1$ unmittelbar. Für $r > 1$ ist es der Satz von Minkowski, und sein Beweis braucht die Ungleichung von Hölder.

Satz 11.20 (Hölder). Für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \, \|\boldsymbol{y}\|_q.$$

Beweis. Ist $\|\boldsymbol{x}\|_p = 0$, so sind alle $x_k = 0$, und beide Seiten sind 0; ebenso für $\boldsymbol{y}$. Sonst setze $a_k = |x_k|/\|\boldsymbol{x}\|_p$ und $b_k = |y_k|/\|\boldsymbol{y}\|_q$. Dann ist $\sum a_k^p = 1$ und $\sum b_k^q = 1$, und Young

gibt

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} b_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multiplikation mit $\|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q$ ergibt die Behauptung. □

Für $p = q = 2$ ist das die Ungleichung von Cauchy und Schwarz, $\sum |x_k y_k| \le \sqrt{\sum x_k^2}\sqrt{\sum y_k^2}$.

Satz 11.21 (Minkowski). Für $r \ge 1$ und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_r \le \|\boldsymbol{x}\|_r + \|\boldsymbol{y}\|_r$.

Beweis. Für $r = 1$ ist das die Dreiecksungleichung, summiert über k. Sei $r = p > 1$ und $S = \sum_k |x_k + y_k|^p$. Ist $S = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sonst ist nach der Dreiecksungleichung

$$S = \sum_k |x_k + y_k|\,|x_k + y_k|^{p-1} \le \sum_k |x_k|\,|x_k + y_k|^{p-1} + \sum_k |y_k|\,|x_k + y_k|^{p-1}.$$

Auf beide Summen wende man Hölder an. Wegen $(p-1)q = p$ ist $\left(\sum_k |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q} = S^{1/q}$, also

$$S \le \left(\|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p\right) S^{1/q}.$$

Division durch $S^{1/q} > 0$ gibt $S^{1-1/q} = S^{1/p} \le \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$. □

Ferner ist $\|\boldsymbol{x}\|_r = 0$ nur für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, und $\|t\boldsymbol{x}\|_r = |t|\,\|\boldsymbol{x}\|_r$ für $t \in \mathbb{R}$; beides folgt unmittelbar aus der Definition. Zusammen mit Satz 11.21 hat $\|\cdot\|_r$ für $r \ge 1$ also die drei Eigenschaften, die die Bemerkung „Betrag, Norm und Abstand“ in Abschnitt 3.3 hervorhebt: $\|\cdot\|_r$ ist eine *Norm* auf $\mathbb{R}^n$, und $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_r$ ist eine Metrik im Sinn des Ausblicks von Einheit 1. Die Beweise der Sätze 11.20 und 11.21 benutzen von den Einträgen nur ihre Beträge und die Dreiecksungleichung; sie gelten deshalb wörtlich auch für Vektoren mit komplexen Einträgen (Satz 3.10). Für $0 < r < 1$ ist die mit derselben Formel gebildete Größe keine Norm; die Dreiecksungleichung ist falsch (G6).

11.7 Das Newton-Verfahren

Gesucht ist eine Nullstelle ξ von f. Man ersetzt f in einem Näherungswert x_n durch seine Tangente und nimmt deren Nullstelle als nächsten Näherungswert:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ohne weitere Voraussetzungen kann das Verfahren scheitern (G7). Konvexität und Monotonie machen es zuverlässig, und das Restglied nach Lagrange zeigt, wie schnell es ist.

Satz 11.22 (Newton-Verfahren). Seien $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit stetiger zweiter Ableitung, also $f \in C^2([a,b])$. Es gelte $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ und $f'' \geq 0$ auf $[a,b]$. Dann gilt:

1. f hat genau eine Nullstelle $\xi \in (a,b)$.
2. Ist $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \geq 0$ (etwa $x_0 = b$), so ist die Folge $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ wohldefiniert, monoton fallend, liegt in $[\xi, x_0]$ und konvergiert gegen ξ.
3. Mit $m = f'(a) > 0$ und $M = \max_{[a,b]} f''$ gilt $0 \leq x_{n+1} - \xi \leq \dfrac{M}{2m}(x_n - \xi)^2$ für alle n.

Beweis. (1) Nach dem Zwischenwertsatz gibt es eine Nullstelle; weil f streng wächst (Monotoniekriterium), nur eine. Wegen $f'' \geq 0$ ist f' monoton wachsend, also $f'(x) \geq f'(a) = m > 0$ auf $[a,b]$; M existiert nach dem Satz vom Maximum, weil f'' stetig ist.

(2) Wir zeigen durch Induktion $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_0$. Sei $x_n \in [\xi, x_0]$; für $n = 0$ folgt das aus $f(x_0) \geq 0 = f(\xi)$ und der Monotonie. Dann ist $f(x_n) \geq 0$ und $f'(x_n) > 0$, also $x_{n+1} \leq x_n$. Ist $x_n = \xi$, so ist $x_{n+1} = \xi$. Sonst gibt der Mittelwertsatz ein $\eta \in (\xi, x_n)$ mit $f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = f'(\eta)(x_n - \xi)$, und wegen $f'(\eta) \leq f'(x_n)$ ist $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n - \xi$, also $x_{n+1} \geq \xi$. Die Folge ist monoton fallend und durch ξ nach unten beschränkt, also konvergent (Satz 4.16) gegen ein $x^* \in [\xi, x_0]$. Aus $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$ folgt mit der Stetigkeit von f und f' beim Grenzübergang $f(x^*) = f'(x^*) \cdot 0 = 0$, nach (1) also $x^* = \xi$.

(3) Ist $x_n = \xi$, so ist $x_{n+1} = \xi$, und die Ungleichung gilt. Sonst gibt Folgerung 11.4 (Lagrange, $n = 1$, Entwicklungspunkt x_n, ausgewertet in ξ) ein θ zwischen ξ und x_n mit

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\theta)}{2}(\xi - x_n)^2.$$

Division durch $f'(x_n)$ und $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$ ergeben $x_{n+1} - \xi = \frac{f''(\theta)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$, und der Faktor liegt zwischen 0 und $\frac{M}{2m}$. □

Mit $K = \frac{M}{2m}$ und $e_n = x_n - \xi$ ist $Ke_{n+1} \leq (Ke_n)^2$, durch Induktion also

$$Ke_n \leq (Ke_0)^{2^n}.$$

Ist $Ke_0 < 1$, so fällt der Fehler doppelt exponentiell: Die Zahl der gültigen Stellen verdoppelt sich ungefähr bei jedem Schritt. Man spricht von *quadratischer Konvergenz*. Das Halbierungsverfahren (zweiter Beweis von Satz 7.15, Beispiel 4 in Einheit 7) gewinnt dagegen pro Schritt nur eine Binärstelle.

Die Voraussetzungen lassen sich durch Spiegelungen herstellen. Ist $g(x) = \sigma f(\tau x)$ mit $\sigma, \tau \in \{1, -1\}$, so ist $g'(x) = \sigma\tau f'(\tau x)$ und $g''(x) = \sigma f''(\tau x)$, und für $y_n = \tau x_n$ gilt

$y_{n+1} = y_n - \frac{g(y_n)}{g'(y_n)}$ genau dann, wenn $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$: Die Newton-Folge von g ist die gespiegelte Newton-Folge von f. Ist f fallend und konvex, so nimmt man $g(x) = f(-x)$; ist f wachsend und konkav, so $g(x) = -f(-x)$; ist f fallend und konkav, so $g = -f$. Dabei wird $[a, b]$ für $\tau = -1$ zu $[-b, -a]$. In allen Fällen startet man in einem Punkt x_0 mit $\sigma f(x_0) \geq 0$, wobei $\sigma \in \{1, -1\}$ so gewählt ist, dass $\sigma f'' \geq 0$ auf dem ganzen Intervall gilt: auf der Seite der Nullstelle, auf der f dasselbe Vorzeichen hat wie f'', das auf dem Intervall nicht wechselt. Ist f in einer Umgebung der Nullstelle ξ zweimal stetig differenzierbar und $f'(\xi) \neq 0$, so konvergiert das Newton-Verfahren für jeden Startwert nahe genug bei ξ, und zwar quadratisch; dieser Satz wird hier nicht bewiesen.

11.8 Gegenbeispiele

(G1) Glatt, aber nicht durch die Taylorreihe dargestellt. Die Funktion aus Satz 11.11 liegt in $C^\infty(\mathbb{R})$, ihre Taylorreihe in 0 konvergiert überall gegen 0, aber $f(x) > 0$ für $x \neq 0$. Dass die Restglieder in C^∞ existieren, heißt nicht, dass sie gegen 0 streben. Zugleich ist 0 eine strikte Minimalstelle, die Satz 11.8 nicht erkennt, weil alle Ableitungen verschwinden.

(G2) Taylorreihe ohne Konvergenz. $f(x) = \ln(1 + x)$ liegt in $C^\infty((-1, \infty))$. Ihre Taylorreihe in 0 ist $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$; für $x = 2$ sind die Glieder $\pm\frac{2^k}{k}$ unbeschränkt, die Reihe divergiert, obwohl f in 2 glatt ist. Dass das nicht an einer Stelle im Reellen liegen muss, an der die Funktion aufhört, zeigt $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Sie ist nach der Quotientenregel (Satz 10.5) beliebig oft differenzierbar, also in $C^\infty(\mathbb{R})$ (Folgerung 10.3). Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach der geometrischen Summe (Satz 1.13) mit $q = -x^2$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{1 + x^2},$$

und der letzte Summand ist $o\big(x^{2m+1}\big)$ für $x \to 0$. Nach Folgerung 11.7 ist also $T_{2m+1} g(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{2k}$, und die Taylorreihe von g in 0 ist $\sum_{k\geq 0} (-1)^k x^{2k}$. Für $|x| \geq 1$ ist $|(-1)^k x^{2k}| \geq 1$, die Glieder bilden keine Nullfolge, und die Reihe divergiert (Folgerung 6.5), obwohl g auf ganz $\mathbb{R}$ glatt ist; für $x = 2$ sind die Glieder $\pm 4^k$ sogar unbeschränkt. Einheit 14 zeigt, dass eine Potenzreihe innerhalb eines zum Entwicklungspunkt symmetrischen Intervalls konvergiert und außerhalb divergiert (Satz 14.14); für beide Reihen hier ist dieses Intervall $(-1, 1)$ bis auf die Randpunkte (für die Reihe von $\ln(1 + x)$ siehe Abschnitt 14.11, Beispiel 2). Was den Radius allgemein festlegt, gehört in die Funktionentheorie (Ausblick von Einheit 14) und wird hier nicht bewiesen.

(G3) Die Lagrange-Form reicht nicht immer. Für $f(x) = \ln(1 + x)$ und $x = -0{,}9$ liefert die Lagrange-Form

$$|R_n(x)| = \frac{0{,}9^{n+1}}{(n + 1)(1 + \xi)^{n+1}}$$

mit einem ξ zwischen $-0{,}9$ und 0, über das man nichts weiter weiß. Für ξ nahe bei $-0{,}9$ ist das ungefähr $\frac{9^{n+1}}{n+1}$, und diese Schranke wächst über alle Grenzen. Der Satz ist nicht falsch; nur ist die Information „irgendein ξ“ zu schwach. Die Cauchy-Form liefert für denselben Punkt $|R_n(x)| \le \frac{0{,}9^{n+1}}{0{,}1} \to 0$ (Satz 11.10 (4)).

(G4) Grenzen der Ableitungskriterien. $f(x) = x^4$ hat in 0 eine strikte Minimalstelle, aber $f''(0) = 0$: Das Kriterium „$f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$“ ist hinreichend, nicht notwendig; erst $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ entscheidet (Satz 11.8). Zugleich ist x^4 streng konvex ($(x^4)' = 4x^3$ ist streng wachsend, Satz 11.15), obwohl f'' in 0 verschwindet. Für $g(x) = x^3$ ist $g'(0) = g''(0) = 0$ und $g'''(0) = 6$; nach Satz 11.8 (2) liegt keine Extremstelle vor.

(G5) Konvex, aber unstetig am Rand. $f = 0$ auf $[0,1)$ und $f(1) = 1$ ist konvex: Für $x, y \in [0,1]$ und $t \in (0,1)$ liegt $(1-t)x + ty$ in $[0,1)$, außer für $x = y = 1$; die linke Seite der Konvexitätsungleichung ist also 0 oder es gilt Gleichheit, und die rechte Seite ist ≥ 0. f ist im Endpunkt 1 unstetig; Satz 11.14 (3) sagt nur über innere Punkte etwas.

(G6) Minkowski für $r < 1$. Mit derselben Formel wie in 11.6 für $r = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{x} = (1,0)$ und $\boldsymbol{y} = (0,1)$ ist $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_{1/2} = (1+1)^2 = 4$, aber $\|\boldsymbol{x}\|_{1/2} + \|\boldsymbol{y}\|_{1/2} = 2$. Im Beweis fehlt die Hölder-Ungleichung, denn zu $r < 1$ gibt es keinen konjugierten Exponenten $q > 1$; dahinter steht, dass $t \mapsto t^r$ für $r < 1$ auf $(0,\infty)$ nicht konvex ist.

(G7) Newton ohne Konvexität. Für $f(x) = x^3 - 2x + 2$ und $x_0 = 0$ ist $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, also $x_1 = 1$; dann $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, also $x_2 = 0$. Die Folge springt für immer zwischen 0 und 1, obwohl f eine reelle Nullstelle hat (in $(-2,-1)$, denn $f(-2) = -2 < 0 < 3 = f(-1)$). Auf dem Intervall zwischen Nullstelle und Startwert hat f' eine Nullstelle, nämlich $-\sqrt{2/3}$, und f'' ist dort negativ, während $f(x_0) > 0$ ist; die Voraussetzungen von Satz 11.22 sind verletzt.

11.9 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (die Leitfrage, erster Teil: $\sin\frac{1}{2}$). Nach Satz 11.10 (2) mit $m = 4$ ist

$$\sin\tfrac{1}{2} = T(\tfrac{1}{2}) + R, \qquad T(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880},$$

mit $|R| \le \frac{(1/2)^{11}}{11!} = \frac{1}{81\,749\,606\,400} < 1{,}23 \cdot 10^{-11}$. Genauer: Die Lagrange-Form mit $n = 10$ enthält $\sin^{(11)}(\xi) = -\cos\xi$ mit $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, und $\cos\xi > 0$ dort (Satz 9.29 (1)); also ist $R < 0$. Die Auswertung von $T(\frac{1}{2})$ braucht nur Grundrechenarten und ergibt den Bruch $\frac{12724951}{26542080} = 0{,}479425538616\ldots$ Daraus folgt

$$0{,}4794255386041 < \sin\tfrac{1}{2} < 0{,}4794255386165,$$

und die zehn Nachkommastellen 0,4794255386 sind gesichert. Fünf Glieder genügen, weil die Fakultät im Nenner so schnell wächst. Dieselbe Einschließung liefert schon Satz 9.24 mit $m = 2$, denn T ist dort die Partialsumme S_4. Der Satz von Taylor kommt hier also zu keinem neuen Ergebnis, aber auf einem Weg, der von der Reihe nicht abhängt: Benutzt werden nur die Ableitungen von sin in 0 und eine Schranke für die elfte Ableitung. Derselbe Weg führt bei $\sqrt{1+x}$ (Aufgabe R1) und $\ln(1+x)$ (Satz 11.10 (4)) zum Ziel, und bei $\cos 3$ (Aufgabe R5), wofür Satz 9.24 nicht ausgesprochen ist; dort liefert die Lagrange-Form das Vorzeichen des Fehlers erst mit dem passenden Grad.

Beispiel 2 (die Leitfrage, zweiter Teil: $\sqrt{2}$). $f(x) = x^2 - 2$ auf $[1,2]$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 11.22: $f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$, $f'(x) = 2x > 0$, $f'' = 2 \geq 0$. Die Newton-Iteration ist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big),$$

das Verfahren von Heron. Mit $x_0 = 2$ erhält man

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{17}{12}, \quad x_3 = \frac{577}{408}, \quad x_4 = \frac{665857}{470832} = 1{,}41421356237469\ldots$$

Fehlerschranke im Voraus: $m = f'(1) = 2$, $M = 2$, also $K = \frac{1}{2}$, und $e_0 = 2 - \sqrt{2} < 0{,}6$. Aus $e_{n+1} \leq \frac{1}{2}e_n^2$ folgt $e_1 \leq 0{,}18$, $e_2 \leq 0{,}0162$, $e_3 \leq 1{,}32 \cdot 10^{-4}$, $e_4 \leq 8{,}8 \cdot 10^{-9}$, $e_5 \leq 3{,}9 \cdot 10^{-17}$; jede Stufe folgt aus der zuvor genannten Zahl. Eine schärfere Kontrolle im Nachhinein: Es ist $665857^2 - 2 \cdot 470832^2 = 1$, also

$$0 \leq x_4 - \sqrt{2} = \frac{x_4^2 - 2}{x_4 + \sqrt{2}} = \frac{1}{470832^2\,(x_4 + \sqrt{2})} < \frac{1}{2 \cdot 470832^2} < 2{,}3 \cdot 10^{-12},$$

wegen $x_4 + \sqrt{2} > 2$. Also $\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$ mit zehn gesicherten Nachkommastellen nach vier Schritten. Die Folge nähert sich von oben, wie Satz 11.22 (2) voraussagt.

Die Folge ist die Heron-Folge aus Satz 2.18; dort beginnt die Zählung mit $x_1 = 2$, das hiesige x_4 ist dort das fünfte Glied. Satz 2.18 hat für sie $0 \leq x_n^2 - 2 \leq 2 \cdot 4^{1-n}$ gezeigt, für dieses Glied also $x_4^2 - 2 \leq \frac{1}{128}$. Tatsächlich ist $x_4^2 - 2 = \frac{1}{470832^2} < 5 \cdot 10^{-12}$. Die Abschätzung in Einheit 2 gewinnt pro Schritt einen festen Faktor 4, die Folge selbst quadriert ihren Fehler bei jedem Schritt ungefähr. Erst Satz 11.22 (3) erklärt das: Die Tangente weicht von der Parabel nur um einen Term zweiter Ordnung ab.

Beispiel 3 (zweiter Beweis von Satz 4.21: e ist irrational). Nach Satz 11.10 (1) mit $x = 1$, genauer nach der Lagrange-Form, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\exp(\xi_n)}{(n+1)!} \qquad \text{mit } 0 < \xi_n < 1.$$

Es ist $e \le s_1 + 1 = 3$ nach Satz 4.20 mit $n = 1$. Angenommen, $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Für $n \ge \max(q, 2)$ ist $n!\,e$ eine ganze Zahl und ebenso $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Ihre Differenz ist

$$n!\,e - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{\exp(\xi_n)}{n+1} \in \Big(0, \frac{3}{n+1}\Big) \subseteq (0,1),$$

denn $1 < \exp(\xi_n) < e \le 3$ und $n + 1 \ge 3$. Eine ganze Zahl echt zwischen 0 und 1 gibt es nicht. Also ist e irrational. Der Schluss ist derselbe wie im Beweis von Satz 4.21: Eine ganze Zahl $n!\,(e - s_n)$ läge echt zwischen 0 und 1. Verschieden ist die Herkunft der Abschätzung. Satz 4.21 schätzt den Rest der Reihe $\sum \frac{1}{k!}$ mit Satz 4.20 ab; hier liefert das Restglied von Lagrange den Rest in geschlossener Form, aus den Ableitungen von exp in 0 und der groben Schranke $\exp(\xi_n) < 3$.

Beispiel 4 ($\ln 2$ und die Cauchy-Form). Satz 11.10 (4) mit $x = -\frac{1}{2}$ gibt $\ln \frac{1}{2} = -\sum_{k\ge1} \frac{1}{k\,2^k}$, also

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}, \qquad \Big|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k}\Big| \le \frac{(1/2)^{n+1}}{1/2} = 2^{-n}.$$

Mit $n = 10$ ist die Teilsumme 0,69306 …, der Fehler höchstens $2^{-10} < 10^{-3}$; tatsächlich ist $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$ Die Schranke aus Satz 11.10 (4) für $x = 1$ verlangt für denselben Fehler etwa tausend Glieder.

Beispiel 5 (ein Grenzwert über Peano). Gesucht ist $\lim_{x\to0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4}$. Nach Satz 11.6 ist $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + r_1(x)$ mit $r_1(x) = o(x^4)$, und $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + r_2(u)$ mit $r_2(u) = o(u^2)$. Mit $u = -\frac{x^2}{2}$ ist

$$\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + r_2\Big(-\frac{x^2}{2}\Big),$$

und $\frac{r_2(-x^2/2)}{x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{r_2(u)}{u^2} \to 0$, denn für $x \ne 0$ ist $u \ne 0$, und $u \to 0$ für $x \to 0$. Die Differenz ist $\big(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\big)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^4}{12} + o(x^4)$, und der Grenzwert ist $-\frac{1}{12}$. Nach Folgerung 11.7 ist zugleich $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$ das vierte Taylorpolynom von $\exp(-x^2/2)$ in 0, ohne dass eine Ableitung ausgerechnet wurde. Mit de l'Hospital wären vier Anwendungen nötig gewesen.

Beispiel 6 (Jordansche Ungleichung). Folgerung 11.25 (4) gibt $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Der Beweis zeigt den Gewinn des Begriffs: Statt die Funktion $\sin x - \frac{2}{\pi}x$ mit Ableitungen zu diskutieren, vergleicht man die konkave Funktion sin mit ihrer Tangente in 0 (sie liegt darunter) und mit der Sehne von $(0,0)$ nach $(\frac{\pi}{2}, 1)$ (sie liegt darüber).

11.10 Ausblick

- **Integralform des Restglieds (Einheit 13).** Mit dem Hauptsatz und partieller Integration wird $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ bewiesen (Satz 13.9). Sie verlangt $f \in C^{n+1}$ und enthält keine unbekannte Zwischenstelle mehr.
- **Potenzreihen (Einheit 14).** Dort wird gezeigt, dass eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzintervall gliedweise differenziert werden darf (Satz 14.19) und mit ihrer Taylorreihe übereinstimmt (Folgerung 14.20). Die Frage, wann umgekehrt die Taylorreihe gegen f konvergiert, führt auf die reell-analytischen Funktionen; (G1) und (G2) zeigen die beiden Arten des Scheiterns. Die Binomialreihe (Aufgabe V1) ist ein weiterer Fall, in dem die Cauchy-Form zum Ziel führt.
- **Integralungleichungen.** Jensen, Hölder und Minkowski gelten ebenso für Integrale an Stelle von Summen; die L^p-Räume der Maß- und Integrationstheorie beruhen auf ihnen.
- **Konvexität.** Konvexe Funktionen sind ein eigenes Gebiet mit Anwendungen in Optimierung und Wahrscheinlichkeitstheorie (dort ist Jensen die Ungleichung $f(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}f(X)$). Auf Teilmengen eines Vektorraums erklärt man konvexe Funktionen wörtlich wie in Definition 11.12, solange der Definitionsbereich eine konvexe Menge ist. In mehreren Veränderlichen tritt an die Stelle von $f'' \ge 0$ die Bedingung, dass die Matrix der zweiten Ableitungen positiv semidefinit ist.
- **Newton.** Das Verfahren überträgt sich auf Gleichungssysteme, mit der Ableitung als linearer Abbildung; seine lokale quadratische Konvergenz ist ein Satz der Numerik.

Zum Vergleich.[1] Taylorformel, Konvexität und die Ungleichungen von Young, Hölder und Minkowski gehören zum Standardstoff einer ersten Analysis-Vorlesung. Parallel lesen kann man O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage, Springer Spektrum 2016, § 16 (Konvexität, Hölder, Minkowski), § 17 (Newton-Verfahren) und § 22 (Taylor-Reihen). Dort werden die Restglieder aus der Integralform gewonnen und die Reihe des Logarithmus durch Integration; hier stehen alle Restglieder vor dem Integral und folgen aus Mittelwertsätzen. In eigener Formulierung folgt die Einheit Forster an diesen Stellen: Die Folge Young – Hölder – Minkowski in Abschnitt 11.6 und die Beweise der Sätze 11.20 und 11.21 entsprechen § 16, Hilfssatz, Satz 8 und Satz 9 (S. 187–189). Satz 11.22 ist wie § 17, Satz 2 (S. 200–202), gegliedert: eindeutige Nullstelle, monotone Konvergenz bei Start mit $f(x_0) \ge 0$, quadratische Fehlerabschätzung; Voraussetzungen und Beweise sind hier andere, und die Abschätzung mit $\frac{M}{2m}$ gilt im Voraus. Satz 11.11 ist das Beispiel (22.2) (S. 286–287), mit demselben Induktionsgang und derselben Rekursion für die Polynome p_k. Aufgabe V1 behandelt die Binomialreihe wie § 22, Satz 7 (S. 293–295), mit Quotientenkriterium und derselben Art der Restabschätzung, hier mit dem Restglied von Cauchy statt der Integralform. Folgerung 11.7 und Satz 11.8 stehen dort als

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

Aufgaben 22.2 und 22.1. Aufgaben zu diesen Themen enthält das *Übungsbuch zur Analysis 1* von O. Forster und R. Wessoly, 5. Auflage, Vieweg+Teubner 2011, § 16, § 17 und § 22. Satz 11.3 steht dort mit derselben Einschränkung auf natürliche p als Aufgabe 22 E, gelöst über die Integralform; eine Gleichung derselben Bauart wie $\exp(x) = 3x$ nach Folgerung 11.24, nämlich $2^x = 3x$, ist Aufgabe 17 E. Die Namen der Restgliedformen (Lagrange, Cauchy, Schlömilch, Peano) sind die üblichen Bezeichnungen.

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 11

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom T_3 von $f(x) = \sqrt{1+x}$ im Punkt 0 und das Restglied in der Form von Lagrange. Schätzen Sie den Fehler für $0 < x \leq 0{,}1$ ab, geben Sie sein Vorzeichen an und schließen Sie $\sqrt{1{,}1}$ in ein Intervall ein.

R2. Entscheiden Sie mit Satz 11.8, ob im Punkt 0 beziehungsweise 1 eine lokale Extremstelle vorliegt, und welcher Art:

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$ im Punkt 1,

(b) $g(x) = \sin x - x$ im Punkt 0,

(c) $h(x) = \cos x + \frac{x^2}{2}$ im Punkt 0.

R3. Bestimmen Sie die Intervalle, auf denen die Funktion konvex beziehungsweise konkav ist:

(a) $f(x) = x^4 - 6x^2$,

(b) $g(x) = x \exp(x)$.

R4. Berechnen Sie $\sqrt[3]{2}$ mit dem Newton-Verfahren für $f(x) = x^3 - 2$, Startwert $x_0 = 2$. Geben Sie $x_1, \ldots, x_4$ an. Schätzen Sie mit Satz 11.22 den Fehler von x_4 ab; benutzen Sie dazu ab x_1 das Intervall $[1{,}25;\ 1{,}5]$ statt $[1, 2]$, und erklären Sie, warum das zulässig und vorteilhaft ist.

R5. Sei $C_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$.

(a) Bestimmen Sie mit Satz 11.10 (3) das kleinste m, für das die dortige Schranke an der Stelle $x = 3$ kleiner als 10^{-3} ist.

(b) Zeigen Sie $|\cos 3 - C_6(3)| < 5{,}5 \cdot 10^{-5}$ und folgern Sie $-0{,}99000 < \cos 3 < -0{,}98988$.

(c) Warum lässt sich Satz 9.24 hier nicht unmittelbar anwenden? Warum liefert die Lagrange-Form mit $n = 13$, anders als in Beispiel 1 von 11.9, kein Vorzeichen des Fehlers? Bestimmen Sie das Vorzeichen mit der Lagrange-Form für $n = 12$ und verschärfen Sie damit den Einschluss aus (b).

R6. (a) Zeigen Sie mit Satz 11.6, ohne die Ableitungen von $\ln\cos$ zu berechnen: Für $x \to 0$ gilt

$$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

(b) Folgern Sie $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x + x^2/2}{x^4} = -\frac{1}{12}$ sowie die Werte der zweiten und vierten Ableitung von $x \mapsto \ln\cos x$ in 0.

Stufe B – Beweisen

B1. (a) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, J ein Intervall mit $f(I) \subseteq J$ und $g : J \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ konvex ist.

(b) Zeigen Sie: Summen konvexer Funktionen sind konvex, und mit f_1, f_2 ist auch $\max(f_1, f_2)$ konvex.

(c) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \exp(x^2)$ und $x \mapsto |x|^p$ für $p \geq 1$ auf $\mathbb{R}$ konvex sind.

(d) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass in (a) auf die Monotonie von g nicht verzichtet werden kann.

B2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass f konstant ist. Gilt das auch für konvexe Funktionen auf $(0, \infty)$?

B3. (a) Seien $a_1, \dots, a_n > 0$ und $b_1, \dots, b_n > 0$, $A = \sum_i a_i$, $B = \sum_i b_i$. Zeigen Sie mit der Ungleichung von Jensen für $f(t) = t \ln t$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geq A \ln \frac{A}{B},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle Quotienten $\frac{a_i}{b_i}$ gleich sind.

(b) Folgern Sie für $x_1, \dots, x_n > 0$ mit $\sum_i x_i = 1$: $\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq -\ln n$ und $\prod_{i=1}^{n} x_i^{x_i} \geq \frac{1}{n}$, jeweils mit Gleichheit genau für $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$.

B4. Bestimmen Sie mit dem Satz von Taylor (Peano-Form) den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)\sin x - x - x^2}{x^3}.$$

B5. Sei $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

(a) Zeigen Sie $\exp(x) \geq T_n(x)$ für $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ auf zwei Wegen: aus der Reihendarstellung (Einheit 9) und mit der Lagrange-Form. Welcher der beiden Wege lässt sich auf $x < 0$ übertragen?

(b) Zeigen Sie: Ist n ungerade, so gilt $\exp(x) \geq T_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; ist n gerade, so gilt $\exp(x) < T_n(x)$ für alle $x < 0$.

(c) Folgern Sie, dass T_n für gerades n keine reelle Nullstelle hat.

B6. Sei $f(x) = \sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$ und $f(x) = -\sqrt[3]{-x}$ für $x < 0$.

(a) Zeigen Sie: Für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ ist die Newton-Folge $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ erklärt, und es gilt $x_n = (-2)^n x_0$. Die Folge entfernt sich also von der einzigen Nullstelle 0.

(b) Welche Voraussetzungen von Satz 11.22 sind auf einem Intervall $[a, b]$ mit $a < 0 < b$ verletzt, und warum lässt sich der Satz auch nicht nach Spiegelung anwenden?

Stufe V – Vertiefen

V1 (Binomialreihe). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)$ der allgemeine Binomialkoeffizient aus Einheit 1. Zeigen Sie für $|x| < 1$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Benutzen Sie das Restglied nach Cauchy. Sie dürfen das Quotientenkriterium (Satz 6.15) benutzen.

V2. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass die Menge der inneren Punkte von I, in denen f nicht differenzierbar ist, abzählbar ist (Definition 2.42).

V3 (Division durch Multiplikation). Sei $a > 0$. Wenden Sie das Newton-Verfahren auf $f(x) = \frac{1}{x} - a$ an und zeigen Sie, dass die Iteration $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ lautet; sie enthält keine Division. Zeigen Sie mit $r_n = 1 - ax_n$ die Gleichung $r_{n+1} = r_n^2$, und bestimmen Sie alle Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$, für die die Folge $x_{n+1} = x_n(2-ax_n)$ gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert (für $x_0 \leq 0$ ist das keine Newton-Folge von f mehr, die Iteration ist aber erklärt).

V4. Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $p \geq 1$ sei $\|\boldsymbol{x}\|_p$ wie in 11.6.

(a) Zeigen Sie: $p \mapsto \|\boldsymbol{x}\|_p$ ist auf $[1, \infty)$ monoton fallend, und mit $M = \max_k |x_k|$ gilt $M \leq \|\boldsymbol{x}\|_p \leq n^{1/p} M$.

(b) Zeigen Sie mit der Hölder-Ungleichung für $1 \leq p < r$: $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq n^{1/p-1/r}\|\boldsymbol{x}\|_r$.

(c) Sei $n = 10$. Zeigen Sie: Für $p = 240$ gilt $\|\boldsymbol{x}\|_p \leq 1{,}01 \cdot \max_k |x_k|$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{10}$, für $p = 200$ nicht. Benutzen Sie Folgerung 11.25.

V5 (Minimum und Maximum konvexer Funktionen). Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex.

(a) Zeigen Sie: Jede lokale Minimalstelle von f ist eine globale Minimalstelle.

(b) Zeigen Sie: Die Menge M der globalen Minimalstellen ist leer oder ein Intervall. Ist f streng konvex, so hat M höchstens ein Element.

(c) Sei $I = [a, b]$. Zeigen Sie $f(x) \leq \max\big(f(a), f(b)\big)$ für alle $x \in [a, b]$.

(d) Bestimmen Sie M für $g(x) = \max(|x| - 1, 0)$ und für exp auf $\mathbb{R}$. Warum zeigt g, dass in (b) „streng“ nicht entbehrlich ist?

Lösungen

Lösung R1. Mit der Potenzregel aus Einheit 10:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\tfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad f'''(x) = \tfrac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, \quad f^{(4)}(x) = -\tfrac{15}{16}(1+x)^{-7/2}.$$

In 0 sind die Werte $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{8}$, also

$$T_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

Lagrange: $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x^4 = -\frac{5}{128}(1+\xi)^{-7/2}x^4$ mit ξ zwischen 0 und x. Für $0 < x \leq 0{,}1$ ist $0 < (1+\xi)^{-7/2} < 1$, also

$$-\frac{5}{128}x^4 < R_3(x) < 0, \qquad |R_3(x)| < \frac{5}{128}\cdot 10^{-4} < 3{,}91 \cdot 10^{-6}.$$

$T_3(0{,}1) = 1 + 0{,}05 - 0{,}00125 + 0{,}0000625 = 1{,}0488125$. Wegen $R_3 < 0$ folgt

$$1{,}0488085 < \sqrt{1{,}1} < 1{,}0488125.$$

(Der tatsächliche Wert ist 1,04880884 …; der Fehler ist $3{,}65 \cdot 10^{-6}$, die Schranke also fast scharf.)

Lösung R2. (a) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x-1)^3$, $f''(x) = 12(x-1)^2$, $f'''(x) = 24(x-1)$, $f^{(4)} = 24$. In 1 verschwinden die ersten drei Ableitungen, und $f^{(4)}(1) = 24 > 0$. Nach Satz 11.8 mit $n = 4$ (gerade) liegt eine strikte lokale Minimalstelle vor. Tatsächlich ist $f(x) = (x-1)^4 - 1$, und 1 ist globale Minimalstelle.

(b) $g'(x) = \cos x - 1$, $g''(x) = -\sin x$, $g'''(x) = -\cos x$. In 0: $g'(0) = g''(0) = 0$, $g'''(0) = -1 \neq 0$. Nach Satz 11.8 mit $n = 3$ (ungerade) liegt keine Extremstelle vor. Das passt zu $\sin x < x$ für $x > 0$ (Satz 9.24 für $0 < x \leq 2$, und $\sin x \leq 1 < x$ für $x > 2$) und, weil sin ungerade ist, $\sin x > x$ für $x < 0$.

(c) $h'(x) = -\sin x + x$, $h''(x) = 1 - \cos x$, $h'''(x) = \sin x$, $h^{(4)}(x) = \cos x$. In 0: $h'(0) = h''(0) = h'''(0) = 0$, $h^{(4)}(0) = 1 > 0$. Strikte lokale Minimalstelle. Das ist die Ungleichung $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ für kleine $x \neq 0$; sie gilt sogar für alle $x \neq 0$, wie man mit (b) und dem Monotoniekriterium für h' sieht.

Lösung R3. (a) $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$. Es ist $f'' \geq 0$ genau für $|x| \geq 1$ und $f'' \leq 0$ genau für $|x| \leq 1$. Nach Folgerung 11.16, angewandt auf die Einschränkung von f auf das jeweilige Intervall: f ist konvex auf $(-\infty, -1]$ und auf $[1, \infty)$, konkav auf

$[-1,1]$. Auf keinem größeren Intervall ist f konvex oder konkav, denn jedes solche Intervall enthält einen Punkt, in dem f'' das falsche Vorzeichen hat, und der erste Teil von Folgerung 11.16 ist eine Äquivalenz.

(b) $g'(x) = (1+x)\exp(x)$, $g''(x) = (2+x)\exp(x)$. g ist konvex auf $[-2,\infty)$ und konkav auf $(-\infty,-2]$.

Lösung R4. $f(x) = x^3 - 2$ auf $[1,2]$: $f(1) = -1 < 0 < 6 = f(2)$, $f'(x) = 3x^2 > 0$, $f''(x) = 6x \geq 0$; f'' ist stetig. Die Iteration lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2} = \frac{2}{3}\Big(x_n + \frac{1}{x_n^2}\Big).$$

Mit $x_0 = 2$:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{35}{27} = 1{,}296296\ldots, \quad x_3 = \frac{125116}{99225} = 1{,}260932\ldots, \quad x_4 = 1{,}2599219\ldots$$

Auf $[1,2]$ ist $m = f'(1) = 3$, $M = f''(2) = 12$, also $K = \frac{M}{2m} = 2$, und mit $e_0 = 2 - \sqrt[3]{2} > 0{,}7$ ist $Ke_0 > 1$: Die Schranke aus Satz 11.22 (3) sagt anfangs nichts.

Wegen $1{,}25^3 = 1{,}953125 < 2 < 3{,}375 = 1{,}5^3$ ist $\sqrt[3]{2} \in (1{,}25; 1{,}5)$, und $f(1{,}25) < 0 < f(1{,}5)$. Satz 11.22 gilt also auch auf $[a,b] = [1{,}25; 1{,}5]$ mit dem Startwert $x_1 = 1{,}5$, und er liefert dieselbe Folge $x_1, x_2, \ldots$ Dort ist $m = 3 \cdot 1{,}25^2 = 4{,}6875$, $M = 6 \cdot 1{,}5 = 9$, also $K = \frac{9}{9{,}375} = 0{,}96$. Mit $e_1 = 1{,}5 - \sqrt[3]{2} < 0{,}25$ folgt

$$e_2 \leq 0{,}96 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}06, \quad e_3 \leq 0{,}96 \cdot 0{,}06^2 < 0{,}0035, \quad e_4 \leq 0{,}96 \cdot 0{,}0035^2 < 1{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

Tatsächlich ist $e_4 \approx 8{,}1 \cdot 10^{-7}$. Je enger das Intervall um die Nullstelle, desto kleiner ist $M/(2m)$; die quadratische Konvergenz setzt mit voller Kraft erst ein, wenn Ke_n deutlich unter 1 liegt.

Lösung R5. (a) Die Schranke ist $\frac{3^{2m+2}}{(2m+2)!}$. Für $m = 5$ ist sie $\frac{3^{12}}{12!} = \frac{531441}{479001600} > 1{,}1 \cdot 10^{-3}$, für $m = 6$ ist sie $\frac{3^{14}}{14!} = \frac{19683}{358758400} < 5{,}5 \cdot 10^{-5}$. Für $m \leq 4$ ist sie noch größer, denn $\frac{3^{2m+4}}{(2m+4)!} = \frac{3^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdot \frac{9}{(2m+3)(2m+4)}$, und der letzte Faktor ist für $m \geq 0$ kleiner als 1; die Schranken fallen also mit wachsendem m. Das gesuchte m ist 6.

(b) Nach (a) ist $|\cos 3 - C_6(3)| \leq \frac{19683}{358758400} < 5{,}5 \cdot 10^{-5}$. Die Summanden $\frac{3^{2j}}{(2j)!}$ sind für $j = 0, \ldots, 6$ gleich $1, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \frac{81}{80}, \frac{6561}{40320}, \frac{59049}{3628800}, \frac{531441}{479001600}$, und mit wechselnden Vorzeichen summiert ergibt sich der Bruch

$$C_6(3) = -\frac{278767}{281600} = -0{,}98993963\ldots$$

Also ist $C_6(3) - 5{,}5 \cdot 10^{-5} < \cos 3 < C_6(3) + 5{,}5 \cdot 10^{-5}$, das heißt $-0{,}9899947 < \cos 3 < -0{,}9898846$, und das liegt in $(-0{,}99000;\ -0{,}98988)$.

(c) Satz 9.24 ist nur für $0 < x \leq 2$ ausgesprochen, und die Beträge der Glieder der Kosinusreihe fallen für $x = 3$ nicht von Anfang an (1, 4,5, 3,375, …). Trennt man wie im Beweis von Satz 9.24 das erste Glied ab, so fallen die übrigen Beträge $b_j = \frac{3^{2j+2}}{(2j+2)!}$ wegen $\frac{b_{j+1}}{b_j} = \frac{9}{(2j+3)(2j+4)} \leq \frac{3}{4}$ zwar streng, und Lemma 9.23 ließe sich dort anwenden; das ist aber ein Weg über die Reihe. Satz 11.10 (3) braucht keine solche Monotonie. Zum Vorzeichen: Wegen $C_6 = T_{12} = T_{13}$ ist $\cos 3 - C_6(3) = R_{12}(3) = R_{13}(3)$. Die Lagrange-Form mit $n = 13$ gibt $\frac{\cos^{(14)}(\xi)}{14!} 3^{14} = -\frac{\cos \xi}{14!} 3^{14}$ mit einem $\xi \in (0, 3)$; auf $(0, 3)$ nimmt cos positive und negative Werte an ($\frac{\pi}{2} < 3$), und über ξ ist nichts weiter bekannt, das Vorzeichen bleibt also offen. In Beispiel 1 liegt die entsprechende Zwischenstelle in $(0, \frac{1}{2})$, wo cos positiv ist; dort liefert die Lagrange-Form mit $n = 10$ Schranke und Vorzeichen zugleich. Die Lagrange-Form mit $n = 12$ gibt dagegen $\frac{\cos^{(13)}(\xi')}{13!} 3^{13} = -\frac{\sin \xi'}{13!} 3^{13}$ mit einem $\xi' \in (0, 3)$, und wegen $3 < \pi$ (Definition 9.27 und der Absatz danach) ist $\sin \xi' > 0$ (Satz 9.29 (1)). Also ist $\cos 3 < C_6(3)$, und zusammen mit (b) folgt $C_6(3) - 5{,}5 \cdot 10^{-5} < \cos 3 < C_6(3)$, das heißt $-0{,}9899947 < \cos 3 < -0{,}9899396$. Bei $x = 3$ nimmt man also die Schranke vom höheren Grad $n = 13$ und das Vorzeichen vom niedrigeren Grad $n = 12$ desselben Taylorpolynoms.

Lösung R6. (a) Für $|x| < \frac{\pi}{2}$ ist $\cos x > 0$ (Satz 9.29 (1)), also $\ln \cos x$ erklärt. Nach Satz 11.6 mit $n = 4$ ist $\cos x = 1 + u(x)$ mit

$$u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + r_1(x), \qquad r_1(x) = o(x^4).$$

Für $g(t) = \ln(1 + t)$ auf $(-1, \infty)$ ist $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = -1$ (Beispiel (c) in 11.1); Satz 11.6 mit $n = 2$ gibt $g(t) = t - \frac{t^2}{2} + r_2(t)$ mit $r_2(0) = 0$ und $r_2(t)/t^2 \to 0$ für $t \to 0$. Für $|x| < \frac{\pi}{2}$ ist $u(x) = \cos x - 1 \in (-1, 0]$, also

$$\ln \cos x = g\big(u(x)\big) = u(x) - \frac{u(x)^2}{2} + r_2\big(u(x)\big).$$

Das Quadrat. Es ist $\frac{u(x)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{r_1(x)}{x^2} \to -\frac{1}{2}$, also $\frac{u(x)^2}{x^4} \to \frac{1}{4}$ und damit $u(x)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

Der Rest. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta' > 0$ mit $|r_2(t)| \leq \varepsilon t^2$ für $|t| < \delta'$ (für $t = 0$ wegen $r_2(0) = 0$). Da u stetig ist mit $u(0) = 0$ und $\frac{u(x)^2}{x^4} \to \frac{1}{4}$, ist für alle $x \neq 0$ nahe 0 sowohl $|u(x)| < \delta'$ als auch $u(x)^2 \leq x^4$, also $\big|r_2(u(x))\big| \leq \varepsilon u(x)^2 \leq \varepsilon x^4$. Damit ist $r_2(u(x)) = o(x^4)$.

Zusammen:

$$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

(b) Division durch x^4 gibt den Grenzwert $-\frac{1}{12}$. Die Funktion $h(x) = \ln\cos x$ ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nach Ketten- und Quotientenregel beliebig oft differenzierbar. Nach Folgerung 11.7 ist $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$ ihr viertes Taylorpolynom in 0, also nach Lemma 11.2 (2) $\frac{h''(0)}{2} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{h^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{12}$, das heißt $h''(0) = -1$ und $h^{(4)}(0) = -2$. (Probe für die zweite Ableitung: $h' = -\frac{\sin}{\cos}$, $h'' = -\frac{1}{\cos^2}$ nach der Quotientenregel, $h''(0) = -1$.) Wie in Beispiel 5 von 11.9 ersetzt die Rechnung mit Restgliedern viermaliges Ableiten.

Lösung B1. (a) Seien $x, y \in I$, $t \in [0,1]$. Da f konvex ist, gilt $f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$; der rechte Ausdruck liegt zwischen $f(x)$ und $f(y)$, also in J. Da g wächst und konvex ist:

$$g\big(f((1-t)x+ty)\big) \le g\big((1-t)f(x)+tf(y)\big) \le (1-t)g(f(x)) + tg(f(y)).$$

(b) Für $f_1 + f_2$ addiert man die beiden Konvexitätsungleichungen. Für $h = \max(f_1, f_2)$: $f_i((1-t)x+ty) \le (1-t)f_i(x) + tf_i(y) \le (1-t)h(x) + th(y)$ für $i = 1, 2$, also auch für das Maximum der linken Seiten.

(c) $x \mapsto x^2$ ist konvex (Beispiel (b) nach Definition 11.12), exp ist konvex und wachsend; nach (a) ist $\exp(x^2)$ konvex. Für $|x|^p$: $|x|$ ist konvex mit Werten in $[0,\infty)$. Die Funktion $u(t) = t^p$ ist auf $[0,\infty)$ differenzierbar: Für $t > 0$ ist $u'(t) = pt^{p-1}$, in 0 ist $\frac{u(t)-u(0)}{t} = t^{p-1}$, was für $p > 1$ gegen 0 und für $p = 1$ gegen 1 strebt. Also ist $u'(t) = pt^{p-1}$ auch in 0 (mit $0^{p-1} = 0$ für $p > 1$), und u' ist monoton wachsend. Nach Satz 11.15 ist u konvex auf $[0,\infty)$, und u wächst. Nach (a) ist $|x|^p = u(|x|)$ konvex.

(d) $f(x) = x^2$ ist konvex, $g(t) = -t$ ist konvex (affin), aber fallend; $g \circ f = -x^2$ ist streng konkav, nicht konvex.

Lösung B2. Angenommen, es gibt $x < y$ mit $f(x) \ne f(y)$; sei $s = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \ne 0$.

Ist $s > 0$, so liefert Lemma 11.13 für $z > y$ mit den Punkten $x < y < z$: $\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \ge s$, also $f(z) \ge f(y) + s(z-y)$, und das ist für $z \to \infty$ unbeschränkt.

Ist $s < 0$, so liefert das Lemma für $z < x$ mit den Punkten $z < x < y$: $\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \le s$, also $f(z) \ge f(x) + |s|(x-z)$, unbeschränkt für $z \to -\infty$.

Beides widerspricht der Beschränktheit. Also nimmt f überall denselben Wert an.

Auf $(0,\infty)$ ist die Aussage falsch: $f(x) = 1/x$ ist dort konvex ($f'' = 2/x^3 > 0$) und nicht konstant, aber nicht nach oben beschränkt. Ein nach oben beschränktes Beispiel ist $f(x) = \exp(-x)$: konvex, mit Werten in $(0,1)$, nicht konstant. Der Beweis versagt, weil man nach links nicht beliebig weit gehen kann.

Lösung B3. (a) Auf $(0,\infty)$ ist $f'(t) = \ln t + 1$ und $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$; nach Folgerung 11.16 ist f streng konvex. Setze $\lambda_i = \frac{b_i}{B} > 0$ und $x_i = \frac{a_i}{b_i}$. Dann ist $\sum_i \lambda_i = 1$ und $\sum_i \lambda_i x_i = \frac{1}{B}\sum_i a_i = \frac{A}{B}$. Satz 11.17 gibt

$$\frac{A}{B}\ln\frac{A}{B} = f\Big(\sum_i \lambda_i x_i\Big) \le \sum_i \lambda_i f(x_i) = \sum_i \frac{b_i}{B}\cdot\frac{a_i}{b_i}\ln\frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{B}\sum_i a_i \ln\frac{a_i}{b_i}.$$

Multiplikation mit $B > 0$ ergibt die Behauptung. Da f streng konvex ist und alle $\lambda_i > 0$ sind, gilt nach Satz 11.17 Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$; umgekehrt sind bei gleichen x_i beide Seiten der Ungleichung von Jensen gleich $f(x_1)$.

(b) Mit $a_i = x_i$, $b_i = 1$ ist $A = 1$, $B = n$, und (a) gibt $\sum_i x_i \ln x_i \ge \ln\frac{1}{n} = -\ln n$, mit Gleichheit genau, wenn alle x_i gleich sind, wegen $\sum x_i = 1$ also gleich $\frac{1}{n}$. Da exp streng monoton wächst und $\exp\big(\sum_i x_i \ln x_i\big) = \prod_i \exp(x_i \ln x_i) = \prod_i x_i^{x_i}$ ist (Einheit 9), folgt die zweite Ungleichung mit demselben Gleichheitsfall.

Ausblick. $-\sum_i x_i \ln x_i$ ist die Entropie einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf n Punkten; (b) sagt, dass die Gleichverteilung sie maximiert.

Lösung B4. $F(x) = \exp(x)\sin x$ ist beliebig oft differenzierbar. Mit der Produktregel:

$$F' = \exp\cdot(\sin+\cos), \qquad F'' = 2\exp\cdot\cos, \qquad F''' = 2\exp\cdot(\cos-\sin).$$

Also $F(0)=0, F'(0)=1, F''(0)=2, F'''(0)=2$, und $T_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$. Nach Satz 11.6 ist $F(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + r(x)$ mit $r(x)/x^3 \to 0$, also

$$\frac{F(x) - x - x^2}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{r(x)}{x^3} \to \frac{1}{3}.$$

Ohne höhere Ableitungen von F geht es so. Nach Satz 11.6 ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + r_1(x)$ und $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + r_2(x)$ mit $r_1(x) = o(x^2)$ und $r_2(x) = o(x^3)$. Dann ist $F(x) = \big(1 + x + \frac{x^2}{2}\big)\sin x + r_1(x)\sin x$, und Ausmultiplizieren gibt

$$F(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + q(x), \qquad q(x) = -\frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} + \Big(1 + x + \frac{x^2}{2}\Big)r_2(x) + r_1(x)\sin x.$$

Jeder Summand von q ist $o(x^3)$: Für die Potenzen ist das klar; $\frac{(1+x+x^2/2)\,r_2(x)}{x^3} \to 1 \cdot 0$; $\frac{r_1(x)\sin x}{x^3} = \frac{r_1(x)}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \to 0 \cdot 1$. Also $\frac{F(x)-x-x^2}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{q(x)}{x^3} \to \frac{1}{3}$. Nach Folgerung 11.7 ist zugleich $T_3 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}$, in Übereinstimmung mit der Rechnung über die Ableitungen.

Lösung B5. (a) Aus der Reihe: Für $x \geq 0$ und $N \geq n$ ist $\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \geq T_n(x)$, weil die hinzukommenden Glieder nichtnegativ sind; der Grenzübergang $N \to \infty$ gibt $\exp(x) \geq T_n(x)$ (Erhaltung von $\leq$, Satz 4.10). Mit Lagrange: $\exp(x) - T_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \geq 0$ für $x > 0$; für $x = 0$ ist der Rest 0. Für $x < 0$ wechseln die Vorzeichen der weggelassenen Glieder, und der erste Weg sagt nichts. Die Lagrange-Form liefert dagegen auch für $x < 0$ das Vorzeichen des Rests, siehe (b).

(b) Für $x < 0$ ist $\exp(x) - T_n(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ mit $\exp(\xi) > 0$. Ist n ungerade, so ist $n+1$ gerade und $x^{n+1} > 0$: Der Rest ist positiv. Zusammen mit (a) gilt $\exp \geq T_n$ auf ganz $\mathbb{R}$. Ist n gerade, so ist $x^{n+1} < 0$ und der Rest negativ: $\exp(x) < T_n(x)$.

(c) Sei n gerade. Für $x \geq 0$ ist $T_n(x) \geq 1 > 0$, weil alle Summanden nichtnegativ sind und der erste 1 ist. Für $x < 0$ ist nach (b) $T_n(x) > \exp(x) > 0$. Für ungerades n hat T_n als Polynom ungeraden Grades dagegen eine reelle Nullstelle (Folgerung 7.20).

Lösung B6. (a) Für $x > 0$ ist $f(x) = x^{1/3}$ und $f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} > 0$ (Satz 10.9); für $x < 0$ ist $f(x) = -(-x)^{1/3}$ und nach der Kettenregel $f'(x) = \frac{1}{3}(-x)^{-2/3} > 0$. Für $x \neq 0$ ist also $f'(x) = \frac{1}{3}|x|^{-2/3}$ und

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\pm|x|^{1/3}}{\frac{1}{3}|x|^{-2/3}} = \pm 3|x| = 3x,$$

mit dem Vorzeichen von x. Damit ist $x_{n+1} = x_n - 3x_n = -2x_n$; mit $x_n \neq 0$ ist auch $x_{n+1} \neq 0$, die Folge ist erklärt, und durch Induktion $x_n = (-2)^n x_0$. Wegen $|x_n| = 2^n |x_0|$ ist sie unbeschränkt.

(b) f ist in 0 nicht differenzierbar, denn $\frac{f(x)-f(0)}{x} = |x|^{-2/3}$ ist für $x \to 0$ unbeschränkt; Satz 11.22 verlangt aber zweimalige Differenzierbarkeit auf ganz $[a, b]$. Auch abseits der Nullstelle passt die Krümmung nicht: Für $x > 0$ ist $f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} < 0$, für $x < 0$ ist $f''(x) = \frac{2}{9}(-x)^{-5/3} > 0$. Auf beiden Seiten haben f und f'' also verschiedene Vorzeichen, und f'' wechselt auf $[a, b] \setminus \{0\}$ sein Vorzeichen; die Startregel im Anschluss an Satz 11.22 verlangt aber ein $\sigma \in \{1, -1\}$ mit $\sigma f'' \geq 0$ auf dem ganzen Intervall. Eine Spiegelung $g(x) = \sigma f(\tau x)$ ändert daran nichts: g ist in 0 ebenfalls nicht differenzierbar, $g''(y) = \sigma f''(\tau y)$ nimmt auf $[a, b] \setminus \{0\}$ beide Vorzeichen an, so dass $g'' \geq 0$ auf $[a, b]$ verletzt bleibt, und $g(y)g''(y) = f(\tau y) f''(\tau y) < 0$ für alle $y \neq 0$. Die Tangente ist so flach,

dass ihre Nullstelle über die Nullstelle von f hinausschießt, und zwar jedes Mal doppelt so weit.

Lösung V1. Sei $f(x) = (1+x)^\alpha$ auf $(-1,\infty)$. Durch Induktion mit der Potenzregel ist

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} = k!\binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k},$$

also $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}x^k$. Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist $\binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > \alpha$, f ist ein Polynom, und die Behauptung ist der Binomialsatz (Satz 1.20); sei also $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Für $x = 0$ sind beide Seiten gleich 1; sei also $0 < |x| < 1$.

Nach Folgerung 11.4 (Cauchy) gibt es η echt zwischen 0 und x mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n x = (n+1)\binom{\alpha}{n+1}x\,(1+\eta)^{\alpha-1}\Big(\frac{x-\eta}{1+\eta}\Big)^n.$$

Erstens: $|\frac{x-\eta}{1+\eta}| \le |x|$. Für $0 < \eta < x$ ist das $x - \eta \le x + x\eta$, also $0 \le \eta(1+x)$. Für $x < \eta < 0$ ist es $\eta - x \le -x(1+\eta)$, also $\eta(1+x) \le 0$. Beides gilt.

Zweitens: $1+\eta$ liegt zwischen 1 und $1+x$, und $t \mapsto t^{\alpha-1}$ ist auf $(0,\infty)$ monoton. Also liegt $(1+\eta)^{\alpha-1}$ zwischen 1 und $(1+x)^{\alpha-1}$ und ist höchstens $C = \max\big(1,(1+x)^{\alpha-1}\big)$, unabhängig von n.

Damit ist $|R_n(x)| \le C|x|\,c_n$ mit $c_n = (n+1)|\binom{\alpha}{n+1}|\,|x|^n > 0$. Wegen $\binom{\alpha}{n+2} = \binom{\alpha}{n+1}\frac{\alpha-n-1}{n+2}$ ist

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{|\alpha-n-1|}{n+2}\cdot|x| = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\,|x| \to |x| < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium (Satz 6.15, Zusatz mit $\lambda = |x| < 1$) konvergiert $\sum c_n$; insbesondere ist $c_n \to 0$ (Folgerung 6.5), also $R_n(x) \to 0$. □

Die Lagrange-Form liefert für $-1 < x < -\frac{1}{2}$ keine brauchbare Schranke: Der Faktor $(1+\xi)^{\alpha-n-1}|x|^{n+1}$ kann für ξ nahe bei x wie $\big(\frac{|x|}{1+x}\big)^{n+1}$ wachsen, und $\frac{|x|}{1+x} > 1$; über ξ ist nichts weiter bekannt (vergleiche (G3)).

Lösung V2. Sei N die Menge der inneren Punkte von I, in denen f nicht differenzierbar ist. Nach Satz 11.14 existieren in jedem inneren Punkt u die einseitigen Ableitungen $f'_-(u) \le f'_+(u)$, als einseitige Grenzwerte von s_u. Nach Lemma 7.8, angewandt auf s_u, ist f in u genau dann differenzierbar, wenn $f'_-(u) = f'_+(u)$ gilt. Also ist N die Menge der inneren Punkte mit $f'_-(u) < f'_+(u)$. Sei $k \mapsto r_k$ eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ (Satz 2.45). Für $u \in N$ sei k_u der kleinste Index mit $f'_-(u) < r_{k_u} < f'_+(u)$; er existiert nach der Dichtheit

von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) und der Wohlordnung (Satz 1.16). Für $u < v$ in N gilt nach Satz 11.14 (2) $f'_+(u) \le f'_-(v)$, also

$$r_{k_u} < f'_+(u) \le f'_-(v) < r_{k_v}.$$

Daher ist $k_u \neq k_v$, die Abbildung $u \mapsto k_u$ ist injektiv, und N ist nach Lemma 2.44 abzählbar. Wie in Satz 7.23 legt die feste Abzählung von $\mathbb{Q}$ die zugeordnete Zahl fest; eine Auswahl wird nicht gebraucht. Satz 7.23 benutzt dieselbe Beweisidee für die Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen; hier spielt f'_+ die Rolle der monotonen Funktion.

Lösung V3. $f(x) = \frac{1}{x} - a$ auf $(0, \infty)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, also

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x + x^2\Big(\frac{1}{x} - a\Big) = 2x - ax^2 = x(2 - ax).$$

Mit $r_n = 1 - ax_n$: $r_{n+1} = 1 - ax_n(2 - ax_n) = 1 - 2ax_n + a^2x_n^2 = (1 - ax_n)^2 = r_n^2$. Also $r_n = r_0^{2^n}$ und $x_n = \frac{1 - r_0^{2^n}}{a}$, und diese Formel gilt für jeden reellen Startwert, denn die Iteration ist für alle x erklärt.

- Ist $|r_0| < 1$, also $0 < x_0 < \frac{2}{a}$, so ist $r_0^{2^n} \to 0$ und $x_n \to \frac{1}{a}$, quadratisch: $|r_{n+1}| = |r_n|^2$.
- Ist $|r_0| = 1$, also $x_0 \in \{0, \frac{2}{a}\}$, so ist $r_n = 1$ für $n \ge 1$, also $x_n = 0$ für $n \ge 1$.
- Ist $|r_0| > 1$, also $x_0 < 0$ oder $x_0 > \frac{2}{a}$, so ist $r_0^{2^n} \to \infty$ und $x_n \to -\infty$.

Genau für $0 < x_0 < \frac{2}{a}$ konvergiert das Verfahren gegen $\frac{1}{a}$. Für $0 < x_0 \le \frac{1}{a}$ ist $r_n \ge 0$ fallend, also x_n von unten wachsend; das entspricht Satz 11.22 nach der Spiegelung $g(x) = f(-x)$ aus Abschnitt 11.7, denn f ist konvex und fallend. Für $\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$ ist $r_0 < 0$, aber $r_1 > 0$: Nach einem Schritt liegt die Folge links der Nullstelle.

Lösung V4. (a) Sei $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (sonst ist alles 0) und $1 \le p < r$. Für $c > 0$ und jedes $s \ge 1$ gilt $\|c\boldsymbol{x}\|_s = c\|\boldsymbol{x}\|_s$. Setze $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|_p$; dann ist $\sum |y_k|^p = 1$, also $|y_k| \le 1$ und $|y_k|^r \le |y_k|^p$ für alle k. Damit ist $\sum |y_k|^r \le 1$, also $\|\boldsymbol{y}\|_r \le 1$ und $\|\boldsymbol{x}\|_r \le \|\boldsymbol{x}\|_p$.

Sei $M = \max_k |x_k|$. Dann ist $M^p \le \sum_k |x_k|^p \le nM^p$, also $M \le \|\boldsymbol{x}\|_p \le n^{1/p}M$. Beide Schranken werden angenommen: die linke für $\boldsymbol{x} = (1, 0, \dots, 0)$, die rechte für $\boldsymbol{x} = (1, \dots, 1)$.

(b) Hölder mit den konjugierten Exponenten $s = \frac{r}{p} > 1$ und $s' = \frac{r}{r-p}$, angewandt auf die Vektoren $(|x_k|^p)_k$ und $(1, \dots, 1)$:

$$\sum_k |x_k|^p \cdot 1 \le \Big(\sum_k |x_k|^r\Big)^{p/r} n^{1-p/r}.$$

Die p-te Wurzel gibt $\|\boldsymbol{x}\|_p \le n^{1/p-1/r}\|\boldsymbol{x}\|_r$. Für $\boldsymbol{x} = (1,\dots,1)$ gilt Gleichheit. Zusammen mit (a) liegen alle Normen $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{R}^n$ zwischen festen Vielfachen voneinander.

(c) Nach (a) mit $n = 10$ genügt $10^{1/240} \le 1{,}01$, das heißt $\ln 10 \le 240 \ln 1{,}01$, denn ln und exp wachsen streng. Folgerung 11.25 (3) für $x = \frac{100}{101}$ gibt $\ln\frac{100}{101} \le -\frac{1}{101}$, also $\ln 1{,}01 \ge \frac{1}{101}$. Es genügt also $\ln 10 \le \frac{240}{101}$, das heißt $\exp\big(\frac{240}{101}\big) \ge 10$. Nun ist $\frac{240}{101} = 2 + \frac{38}{101}$, ferner $e \ge 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{65}{24}$ (Aufgabe B5 (a) mit $n = 4$ und $x = 1$) und $\exp\big(\frac{38}{101}\big) \ge 1 + \frac{38}{101} + \frac{1}{2}\big(\frac{38}{101}\big)^2 = \frac{14761}{10201}$ (Folgerung 11.25 (2)). Also

$$\exp\Big(\frac{240}{101}\Big) = e^2 \exp\Big(\frac{38}{101}\Big) \ge \frac{4225}{576} \cdot \frac{14761}{10201} = \frac{62365225}{5875776} > 10,$$

denn $10 \cdot 5875776 = 58757760 < 62365225$. Für $p = 200$ und $\boldsymbol{x} = (1,\dots,1)$ ist $\|\boldsymbol{x}\|_{200} = 10^{1/200}$ und $\max_k |x_k| = 1$. Wegen $\ln 1{,}01 \le 0{,}01$ (Folgerung 11.25 (3)) und $e \le 3$ (Satz 4.20 mit $n = 1$, wie in Beispiel 3 von Abschnitt 11.9) ist $1{,}01^{200} = \exp(200 \ln 1{,}01) \le e^2 \le 9 < 10$, also $1{,}01 < 10^{1/200}$; für dieses $\boldsymbol{x}$ ist die Ungleichung falsch.

Lösung V5. (a) Sei u eine lokale Minimalstelle (Definition 10.11): Es gibt $\delta > 0$ mit $f(z) \ge f(u)$ für alle $z \in I$ mit $|z-u| < \delta$. Angenommen, es gibt $y \in I$ mit $f(y) < f(u)$. Für $t \in (0,1]$ liegt $z_t = (1-t)u + ty$ in I, und nach Definition 11.12 ist

$$f(z_t) \le (1-t)f(u) + tf(y) = f(u) - t\big(f(u) - f(y)\big) < f(u).$$

Wegen $|z_t - u| = t|y-u|$ ist $|z_t - u| < \delta$ für hinreichend kleines $t > 0$. Widerspruch zur lokalen Minimalität.

(b) Sei $M \ne \varnothing$ und m der Minimalwert. Seien $u < v$ in M und $w \in [u,v]$, also $w = (1-t)u + tv$ mit $t \in [0,1]$. Dann ist $m \le f(w) \le (1-t)m + tm = m$, also $w \in M$. Mit je zwei Punkten enthält M alles dazwischen; nach Lemma 7.18 ist M ein Intervall. Ist f streng konvex und wären $u < v$ in M, so gäbe $t = \frac{1}{2}$ den Widerspruch $f\big(\frac{u+v}{2}\big) < \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m$.

(c) Für $x = (1-t)a + tb$ mit $t \in [0,1]$ ist $f(x) \le (1-t)f(a) + tf(b) \le (1-t)\max\big(f(a),f(b)\big) + t\max\big(f(a),f(b)\big) = \max\big(f(a),f(b)\big)$.

(d) $|x| - 1$ ist als Summe der konvexen Funktionen $|x|$ und -1 konvex, und g ist nach Aufgabe B1 (b) als Maximum der konvexen Funktionen $|x| - 1$ und 0 konvex. Es ist $g \ge 0$ und $g(x) = 0$ genau für $|x| \le 1$; also $M = [-1,1]$. Für exp ist $M = \varnothing$: Aus $\exp(x-1) = \exp(x)/e < \exp(x)$ folgt, dass kein Wert minimal ist, obwohl exp konvex und durch 0 nach unten beschränkt ist. g ist konvex, aber nicht streng konvex, und hat unendlich viele Minimalstellen; ohne „streng“ ist die Eindeutigkeit in (b) also falsch.

Ausblick. (a) ist der Grund, warum konvexe Optimierungsaufgaben gutartig sind: Ein Verfahren, das nur lokal sucht, findet bereits das globale Minimum.

EINHEIT 12

Das Riemann-Integral

Leitfrage

Wie groß ist die Fläche unter der Parabel $y = x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$? Die Idee, eine gesuchte Fläche zwischen Figuren bekannter Größe einzuschließen, ist alt; schon Archimedes hat so die Fläche eines Parabelsegments bestimmt. Dasselbe lässt sich mit Rechtecken tun. Teilt man $[0, 1]$ in n gleich lange Stücke und setzt auf jedes Stück ein Rechteck, dessen Höhe der kleinste beziehungsweise der größte Funktionswert auf dem Stück ist, so liegt die gesuchte Fläche zwischen

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2},$$

nach der Summenformel für Quadratzahlen (Einheit 1, Aufgabe R1). Beide Ausdrücke streben gegen $\frac{1}{3}$. Also kann die Fläche nur $\frac{1}{3}$ sein.

Das Argument enthält zwei unausgesprochene Annahmen: dass es eine Fläche gibt, und dass sie zwischen den Rechtecksummen liegt. Für die Parabel ist beides anschaulich klar. Für die Funktion, die auf den rationalen Zahlen den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat, ist nichts mehr klar. **Für welche Funktionen ist „die Fläche unter dem Graphen" eine sinnvolle Zahl, und wie bestimmt man sie?** Diese Einheit macht das Einschließungsargument zur Definition. Das Integral einer Funktion ist die Zahl, die zwischen allen unteren und allen oberen Rechtecksummen liegt, sofern es genau eine solche Zahl gibt.

Voraussetzungen. Benutzt werden aus Einheit 1 die Summenformeln (Satz 1.12, Aufgabe R1), die geometrische Summe (Satz 1.13) und die Dreiecksungleichung (Satz 1.23) sowie Aufgabe B6 (d); aus Einheit 2 die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (Satz 2.9) und die Lücke in $\mathbb{Q}$ (Satz 2.11), die archimedische Eigenschaft (Satz 2.29), der ganze Teil (Lemma 2.30), die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31), die Supremumseigenschaft (Satz 2.34, Folgerung 2.35) mit den Regeln aus Lemma 2.36, die Monotonie der Potenzen (Lemma 2.38) und die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.45); aus Einheit 4 die Grundbeispiele (Satz 4.4), die Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 4.9), die Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.10) und Aufgabe V5 (c); aus Einheit 7 das Folgenkriterium (Satz 7.5), die Einschränkung

(Lemma 7.28), die Vorzeichenerhaltung (Lemma 7.13), der Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16), die Dirichlet-Funktion (G2) und die Thomaesche Funktion (G4); aus Einheit 8 die Kompaktheit von $[a, b]$ (Lemma 8.11, Folgerung 8.28), der Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16), gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit (Definition 8.19), der Satz von Heine (Satz 8.21) und Folgerung 8.22; aus Einheit 9 die Exponentialfunktion mit $e^x = \exp(x)$ (Satz 9.16 (3)) und $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ (Satz 9.6), ihre Stetigkeit und Monotonie (Satz 9.8), der Logarithmus (Definition 9.12) mit seinen Rechenregeln und Ungleichungen (Satz 9.13), die allgemeine Potenz (Definition 9.15, Satz 9.16 (2), Satz 9.17), die Stetigkeit des Sinus (Folgerung 9.25) und die Zahl π (Definition 9.27); aus Einheit 10 $\exp' = \exp$ (Satz 10.9) und der Mittelwertsatz (Satz 10.14); aus Einheit 11 die Jordansche Ungleichung $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (Folgerung 11.25 (4)). Für die Aufgaben und den Ausblick kommen hinzu: aus Einheit 1 Beispiel 3 in Abschnitt 1.11, aus Einheit 2 die Wurzeln (Satz 2.39), aus Einheit 3 die fehlende Anordnung auf $\mathbb{C}$ (Satz 3.16), aus Einheit 4 die Einschließung (Satz 4.11), aus Einheit 5 die Intervallschachtelung (Definition 5.5, Folgerung 5.15 (3)), aus Einheit 6 die Rechenregeln für Reihen (Satz 6.3), aus Einheit 7 die Stetigkeit (Definition 7.9, Satz 7.10) mit ihren Rechenregeln (Satz 7.11), aus Einheit 8 der Cantorsche Durchschnittssatz (Folgerung 8.14), aus Einheit 9 die Ungleichung $e^t \ge 1 + t$ (Satz 9.7 (2)) und aus Einheit 11 die Restgliedformen (Folgerung 11.4), die Reihe von $\ln(1 + x)$ (Satz 11.10 (4)), konvexe Funktionen (Definition 11.12, Satz 11.14 (3), Folgerung 11.16), die Jensensche Ungleichung (Satz 11.17) und die Standardabschätzungen (Folgerung 11.25 (1), (2)). Alle Funktionen sind reellwertig; $a < b$ sind reelle Zahlen. Die Nummern 12.20 bis 12.24 stehen an der sachlich passenden Stelle, deshalb folgt die Zählung nicht überall der Reihenfolge im Text.

12.1 Zerlegungen, Ober- und Untersummen

Die Leitfrage teilt $[0, 1]$ in gleich lange Stücke. Für die Definition wäre das zu eng. Man möchte einen Punkt c als Teilungspunkt erzwingen können, um ein Integral in zwei aufzuteilen (Satz 12.11), Teilungspunkte an Sprungstellen legen (Satz 12.15) und Zerlegungen an den Integranden anpassen, wie in Aufgabe R1 die Zerlegung mit den Teilungspunkten $\frac{k^2}{n^2}$ für $\sqrt{x}$. Deshalb sind beliebige endliche Teilungen zugelassen.

Definition 12.1. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Menge $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Die Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ heißen *Teilintervalle*, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ihre Längen, $\max_k \Delta x_k$ die *Feinheit* von Z. Eine Zerlegung Z' heißt *Verfeinerung* von Z, wenn $Z \subseteq Z'$.

Wegen $a < b$ ist $\{a, b\}$ eine Zerlegung, und jede Zerlegung ist eine Verfeinerung von ihr. Je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 haben die gemeinsame Verfeinerung $Z_1 \cup Z_2$. Die *äquidistante* Zerlegung mit n Teilen ist $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0, \dots, n$; ihre Feinheit ist $\frac{b-a}{n}$.

Definition 12.2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung. Mit

$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}, \qquad M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

heißen

$$U(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k \,\Delta x_k \qquad \text{und} \qquad O(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k \,\Delta x_k$$

die *Untersumme* und die *Obersumme* von f zu Z. Für eine nichtleere Menge A, auf der f beschränkt ist, schreiben wir $\sup_A f = \sup f(A)$ und $\inf_A f = \inf f(A)$; also ist $m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$ und $M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f$.

Die Beschränktheit wird gebraucht, damit m_k und M_k existieren; das ist die Supremumseigenschaft (Satz 2.34, Folgerung 2.35), angewandt auf die beschränkten Mengen $f([x_{k-1}, x_k])$. Ein kleinster oder größter Funktionswert, wie in der Leitfrage, muss nicht existieren: Für $f(x) = x$ auf $[0,1)$ und $f(1) = 0$ ist das Supremum auf dem letzten Teilintervall $[x_{n-1}, 1]$ gleich 1, wird aber nicht angenommen. Für stetige Funktionen sind m_k und M_k nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16) Minimum und Maximum. Ist $m \le f \le M$ auf $[a,b]$, so gilt $m \le m_k \le M_k \le M$ und daher

$$m(b-a) \le U(f,Z) \le O(f,Z) \le M(b-a).$$

Beispiel. Für eine konstante Funktion $f = c$ ist $U(f,Z) = O(f,Z) = c(b-a)$ für jede Zerlegung. Für $f(x) = x$ auf $[0,1]$ und die äquidistante Zerlegung mit n Teilen ist $m_k = \frac{k-1}{n}$, $M_k = \frac{k}{n}$, also nach Satz 1.12

$$U(f,Z) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{n-1}{2n}, \qquad O(f,Z) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}.$$

Lemma 12.3 (Verfeinerung). Ist Z' eine Verfeinerung von Z, so gilt

$$U(f,Z) \le U(f,Z') \le O(f,Z') \le O(f,Z).$$

Beweisidee. Ein zusätzlicher Teilungspunkt zerlegt ein Rechteck in zwei. Das Infimum über ein kleineres Intervall ist mindestens so groß wie das über das größere.

Beweis. Die mittlere Ungleichung gilt wegen $m_k \le M_k$. Da $Z' \setminus Z$ endlich ist, genügt es nach Induktion über die Anzahl der zusätzlichen Punkte, den Fall $Z' = Z \cup \{y\}$ mit $x_{k-1} < y < x_k$ zu behandeln. Seien m' und m'' die Infima von f über $[x_{k-1}, y]$ und $[y, x_k]$. Beide Mengen sind Teilmengen von $[x_{k-1}, x_k]$, also $m' \ge m_k$ und $m'' \ge m_k$. Die Untersummen unterscheiden sich nur im k-ten Summanden:

$$U(f,Z') - U(f,Z) = m'(y - x_{k-1}) + m''(x_k - y) - m_k(x_k - x_{k-1}) = (m' - m_k)(y - x_{k-1}) + (m'' - m_k)(x_k - y) \ge 0.$$

Für die Obersummen ebenso mit Suprema und umgekehrtem Vorzeichen. □

Folgerung 12.4. Für je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt $U(f, Z_1) \le O(f, Z_2)$.

Beweis. Mit $Z = Z_1 \cup Z_2$ und Lemma 12.3: $U(f, Z_1) \le U(f, Z) \le O(f, Z) \le O(f, Z_2)$. □

Jede Untersumme ist also eine untere Schranke für die Menge aller Obersummen, und jede Obersumme eine obere Schranke für die Menge aller Untersummen. Beide Mengen sind nicht leer, weil $\{a, b\}$ eine Zerlegung ist. Nach Satz 2.34 und Folgerung 2.35 existieren daher die folgenden Zahlen.

Definition 12.5. Für beschränktes $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißen

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_Z U(f, Z) \qquad \text{und} \qquad \overline{\int_a^b} f = \inf_Z O(f, Z)$$

das *Unterintegral* und das *Oberintegral* von f; Supremum und Infimum laufen über alle Zerlegungen von $[a, b]$. Nach Folgerung 12.4 ist stets $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$. Die Funktion f heißt *(Riemann-)integrierbar*, wenn beide übereinstimmen; der gemeinsame Wert heißt das *Integral* von f über $[a, b]$ und wird mit

$$\int_a^b f \qquad \text{oder} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet. Die Variable x in der zweiten Schreibweise ist gebunden wie ein Summationsindex; $\int_a^b f(t)\,dt$ bedeutet dasselbe. In Beweisen, in denen das Intervall feststeht, schreiben wir kurz $\int f$, $\underline{\int} f$ und $\overline{\int} f$.

Eine Zahl s liegt genau dann zwischen allen Unter- und allen Obersummen, wenn $\underline{\int_a^b} f \le s \le \overline{\int_a^b} f$ gilt: $s \ge U(f, Z)$ für alle Z heißt, dass s obere Schranke der Untersummen ist, also $s \ge \sup_Z U(f, Z)$; ebenso heißt $s \le O(f, Z)$ für alle Z, dass $s \le \inf_Z O(f, Z)$. Die eingeschlossenen Zahlen bilden also das Intervall zwischen Unter- und Oberintegral. Es besteht genau dann aus einem einzigen Punkt, wenn f integrierbar ist, und dieser Punkt ist $\int_a^b f$. Insbesondere gilt für integrierbares f die Ungleichung $U(f, Z) \le \int_a^b f \le O(f, Z)$ für jede Zerlegung Z, und $\int_a^b f$ ist die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft. Umgekehrt ist f integrierbar, wenn es genau eine Zahl zwischen allen Unter- und allen Obersummen gibt. Das ist das Einschließungsprinzip der Leitfrage, jetzt als Satz in beiden Richtungen.

Oft ist eine Funktion auf einer größeren Menge erklärt, und man integriert nur über ein Stück davon.

Definition 12.20 (Integral über ein Teilintervall). Sei f auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärt und $[c,d] \subseteq D$ mit $c < d$. Dann heißt f *auf* $[c,d]$ *integrierbar*, wenn die Einschränkung $f|_{[c,d]} : [c,d] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, beschränkt und im Sinn von Definition 12.5 integrierbar ist. Ihr Integral wird mit $\int_c^d f$ bezeichnet. Ebenso bezeichnen $U(f,Z)$ und $O(f,Z)$ für eine Zerlegung Z von $[c,d]$ die Unter- und Obersumme der Einschränkung.

In $\int_c^d f$ gehen nur die Werte von f auf $[c,d]$ ein. Für $D = [c,d]$ ist das Definition 12.5. In diesem Sinn sind alle Aussagen „f ist auf $[a,c]$ integrierbar“ in dieser und den folgenden Einheiten gemeint.

Bemerkung (Darboux und Riemann). Bernhard Riemann definierte das Integral über Summen $\sum f(\xi_k)\Delta x_k$ mit beliebigen Stellen ξ_k im k-ten Teilintervall; die Fassung über Ober- und Untersummen geht auf Gaston Darboux zurück. Beide Definitionen ergeben denselben Begriff (Satz 12.17).

Bemerkung (Vollständigkeit). Ober- und Unterintegral sind als Infimum und Supremum definiert. In $\mathbb{Q}$ gäbe es sie im Allgemeinen nicht. Man betrachte auf $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \le x \le 2\}$ die Funktion mit $f(x) = 1$ für $x^2 < 2$ und $f(x) = 0$ sonst, mit rationalen Teilungspunkten: Liegt $\sqrt{2}$ im Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, so ist die Obersumme gleich x_j; als Obersummen kommen also genau die rationalen Zahlen in $(\sqrt{2}, 2]$ vor, und diese Menge hat in $\mathbb{Q}$ kein Infimum. Es ist dieselbe Lücke wie in Satz 2.11. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ geht hier zum ersten Mal in die Integralrechnung ein; der Ausblick (Abschnitt 12.9) stellt die übrigen Stellen der Einheit zusammen.

12.2 Das Riemannsche Kriterium

Mit Ober- und Unterintegral allein rechnet man ungern, weil Supremum und Infimum über alle Zerlegungen laufen. Das folgende Kriterium verlangt nur, eine einzige passende Zerlegung zu finden.

Satz 12.6 (Riemannsches Integrabilitätskriterium). Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit

$$O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon.$$

Beweis. „⇐“: Für jede Zerlegung Z ist $U(f,Z) \le \underline{\int} f \le \overline{\int} f \le O(f,Z)$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung ein Z mit $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$; also ist $0 \le \overline{\int} f - \underline{\int} f < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, sind Ober- und Unterintegral gleich (Einheit 1, Aufgabe B6 (d)).

„⇒“: Sei f integrierbar mit Integral I und $\varepsilon > 0$. Nach Definition von Supremum und Infimum gibt es Zerlegungen Z_1, Z_2 mit $U(f,Z_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(f,Z_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Für

$Z = Z_1 \cup Z_2$ folgt mit Lemma 12.3

$$O(f,Z) - U(f,Z) \le O(f,Z_2) - U(f,Z_1) < \varepsilon. \qquad \square$$

Die Differenz $O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_k (M_k - m_k)\Delta x_k$ misst, wie stark f auf den Teilintervallen schwankt, gewichtet mit deren Länge. Die Schwankung auf einer Menge beschreibt das folgende Lemma, das in den Beweisen dieser Einheit immer wieder gebraucht wird.

Lemma 12.7 (Schwankung). Sei f auf einer nichtleeren Menge A beschränkt. Dann gilt

$$\sup_A f - \inf_A f = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A\}.$$

Beweis. Für $x, y \in A$ ist $f(x) - f(y) \le \sup_A f - \inf_A f$, und mit vertauschten Rollen auch $f(y) - f(x) \le \sup_A f - \inf_A f$; also ist die linke Seite eine obere Schranke für alle $|f(x) - f(y)|$. Sei umgekehrt $\eta > 0$. Es gibt $x \in A$ mit $f(x) > \sup_A f - \frac{\eta}{2}$ und $y \in A$ mit $f(y) < \inf_A f + \frac{\eta}{2}$, also $|f(x) - f(y)| \ge f(x) - f(y) > \sup_A f - \inf_A f - \eta$. Keine kleinere Zahl ist daher obere Schranke. $\square$

12.3 Monotone und stetige Funktionen

Satz 12.8. Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweisidee. Bei monotonem f werden Infimum und Supremum an den Endpunkten der Teilintervalle angenommen; die Schwankungen summieren sich dann teleskopisch zur Gesamtschwankung $|f(b) - f(a)|$.

Beweis. Sei f monoton wachsend. f ist beschränkt, denn $f(a) \le f(x) \le f(b)$. Für die äquidistante Zerlegung Z_n mit n Teilen ist $m_k = f(x_{k-1})$, $M_k = f(x_k)$ und $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, also

$$O(f,Z_n) - U(f,Z_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \frac{(b-a)\big(f(b) - f(a)\big)}{n}.$$

Für monoton fallendes f ist $m_k = f(x_k)$ und $M_k = f(x_{k-1})$, und dieselbe Rechnung ergibt $\frac{(b-a)(f(a)-f(b))}{n}$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle n so groß, dass die rechte Seite kleiner als ε ist (archimedische Eigenschaft, Satz 2.29). Satz 12.6 liefert die Behauptung. $\square$

Monotone Funktionen dürfen unendlich viele Sprungstellen haben, zum Beispiel $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{1}{n}$ für $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$. Integrierbarkeit verlangt also keine Stetigkeit.

Satz 12.9. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweisidee. Man braucht eine Zerlegung, auf deren Teilintervallen f überall wenig schwankt. Eine einzige Feinheit, die an allen Stellen zugleich genügt, liefert die gleichmäßige Stetigkeit; für gleich lange Teilintervalle hat Einheit 8 genau das als Folgerung 8.22 vorbereitet.

Beweis. Das Intervall $[a, b]$ ist kompakt (Lemma 8.11). Nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16) ist f beschränkt, nach dem Satz von Heine (Satz 8.21) gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $\delta > 0$, sodass aus $x, y \in [a, b]$ und $|x - y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Sei Z eine Zerlegung mit Feinheit kleiner als δ, etwa die äquidistante mit $n > \frac{b-a}{\delta}$ Teilen (Satz 2.29). Je zwei Punkte eines Teilintervalls haben Abstand kleiner als δ; nach Lemma 12.7 ist daher $M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für jedes k, und

$$O(f, Z) - U(f, Z) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Nach Satz 12.6 ist f integrierbar. □

Der Beweis zeigt mehr: Für stetiges f ist $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$ für *jede* Zerlegung hinreichend kleiner Feinheit, nicht nur für eine. Die Stetigkeit allein, ohne „gleichmäßig", hätte zu jedem Punkt ein eigenes δ geliefert und keine gemeinsame Feinheit. Nach Folgerung 8.28 sind die Intervalle $[a, b]$ die einzigen nichtleeren kompakten Intervalle. Auf einem nicht abgeschlossenen oder unbeschränkten Intervall ist Satz 8.21 nicht anwendbar, und gleichmäßige Stetigkeit gilt dort im Allgemeinen nicht; ein Beispiel ist $\frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ (Einheit 8). Dort beginnt das uneigentliche Integral (Einheit 13).

Bemerkung (Fehlerschranke). Ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L (Definition 8.19), so lässt sich der Abstand quantitativ angeben. Nach Lemma 12.7 ist $M_k - m_k \leq L \, \Delta x_k$, also

$$O(f, Z) - U(f, Z) \leq L \sum_{k=1}^{n} (\Delta x_k)^2 \leq L \, (b - a) \, \delta,$$

wenn δ die Feinheit von Z ist. Für die äquidistante Zerlegung mit n Teilen ist die rechte Seite $\frac{L(b-a)^2}{n}$. Jede Zahl zwischen $U(f, Z)$ und $O(f, Z)$, insbesondere jede Riemannsche Summe (Abschnitt 12.5), weicht also höchstens um $\frac{L(b-a)^2}{n}$ vom Integral ab. Für e^x auf $[0, 1]$ ist $L = e$ eine Lipschitz-Konstante: Nach dem Mittelwertsatz (Satz 10.14) mit $\exp' = \exp$ (Satz 10.9) und der Monotonie von exp (Satz 9.8) ist $|e^x - e^y| = e^\xi |x - y| \leq e \, |x - y|$ für $x, y \in [0, 1]$. Für $n = 100$ ist die Schranke $\frac{e}{100} \approx 0{,}027$. Die tatsächliche Differenz ist nach Beispiel 2 aus Abschnitt 12.8 mit $h = \frac{1}{100}$ gleich $O_n - U_n = (e^h - 1) U_n = (e - 1) h \approx 0{,}017$, kleiner als die Schranke.

12.4 Rechenregeln

Das Integral über Zerlegungen auszurechnen ist mühsam, und Integrierbarkeit über ein Kriterium nachzuweisen ebenso. Die folgenden Regeln sorgen dafür, dass man beides selten tun muss: Aus wenigen integrierbaren Funktionen entstehen durch Rechenoperationen und Zusammensetzen viele weitere, und ihre Integrale ergeben sich aus bekannten.

Satz 12.10 (Linearität und Monotonie). Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $f+g$ ist integrierbar und $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
2. cf ist integrierbar und $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.
3. Ist $f \le g$, so ist $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Beweis. (1) Auf jedem Teilintervall J ist $f(x)+g(x) \le \sup_J f + \sup_J g$ für alle $x \in J$, also $\sup_J(f+g) \le \sup_J f + \sup_J g$, und ebenso $\inf_J(f+g) \ge \inf_J f + \inf_J g$. Daher gilt für jede Zerlegung

$$U(f,Z) + U(g,Z) \le U(f+g,Z) \le O(f+g,Z) \le O(f,Z) + O(g,Z).$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 12.6 gibt es Z_1, Z_2 mit $O(f,Z_1) - U(f,Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g,Z_2) - U(g,Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$; nach Lemma 12.3 gilt beides auch für $Z = Z_1 \cup Z_2$. Dann ist $O(f+g,Z) - U(f+g,Z) < \varepsilon$, also ist $f+g$ integrierbar. Die Zahlen $\int(f+g)$ und $\int f + \int g$ liegen beide im Intervall $[U(f,Z)+U(g,Z),\ O(f,Z)+O(g,Z)]$ der Länge kleiner als ε; ihr Abstand ist also kleiner als ε für jedes $\varepsilon > 0$, und sie sind gleich.

(2) Für $c \ge 0$ ist $\sup_J(cf) = c\sup_J f$ und $\inf_J(cf) = c\inf_J f$, also $O(cf,Z) = c\,O(f,Z)$ und $U(cf,Z) = c\,U(f,Z)$; daraus folgt die Behauptung, indem man Infimum und Supremum über Z bildet (für $c > 0$ Lemma 2.36 (3), bei Infima mit Folgerung 2.35; für $c = 0$ sind alle Summen null). Für $c = -1$ ist $\sup_J(-f) = -\inf_J f$, also $O(-f,Z) = -U(f,Z)$ und $U(-f,Z) = -O(f,Z)$, und das Ober- und Unterintegral von $-f$ sind $-\underline{\int} f$ und $-\overline{\int} f$. Für $c < 0$ kombiniert man beide Fälle.

(3) Aus $f \le g$ folgt $U(f,Z) \le U(g,Z)$ für jede Zerlegung, und das Supremum über Z ergibt $\int f \le \int g$. □

Die integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bilden also einen reellen Vektorraum, und $f \mapsto \int_a^b f$ ist eine lineare Abbildung in $\mathbb{R}$, die nichtnegative Funktionen auf nichtnegative Zahlen abbildet.

Die Fläche über $[a,b]$ sollte die Summe der Flächen über $[a,c]$ und $[c,b]$ sein. Für die Definition ist das nicht selbstverständlich, weil Zerlegungen von $[a,b]$ den Punkt c nicht enthalten müssen.

Satz 12.11 (Additivität bezüglich des Intervalls). Sei $a < c < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Genau dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar, wenn f auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ integrierbar ist (Definition 12.20), und dann gilt

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Beweis. Ist Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $c \in Z$, so zerfällt Z in eine Zerlegung $Z_1 = Z \cap [a,c]$ von $[a,c]$ und eine Zerlegung $Z_2 = Z \cap [c,b]$ von $[c,b]$, und es gilt $O(f,Z) = O(f,Z_1) + O(f,Z_2)$, ebenso für Untersummen. Umgekehrt ist $Z_1 \cup Z_2$ für beliebige Zerlegungen Z_1 von $[a,c]$ und Z_2 von $[c,b]$ eine Zerlegung von $[a,b]$, die c enthält. Nach Lemma 12.3 ändert sich das Infimum der Obersummen nicht, wenn man nur Zerlegungen mit $c \in Z$ zulässt, denn $Z \cup \{c\}$ hat höchstens die Obersumme von Z. Also ist

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{Z_1,Z_2} \big(O(f,Z_1) + O(f,Z_2)\big) = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

Zur zweiten Gleichung: Jede Summe $O(f,Z_1) + O(f,Z_2)$ ist mindestens $\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$, diese Zahl ist also eine untere Schranke. Zu $\eta > 0$ gibt es nach Definition des Infimums (Lemma 2.36 (1), angewandt auf die Mengen der negativen Obersummen) Zerlegungen Z_1, Z_2 mit $O(f,Z_1) < \overline{\int_a^c} f + \frac{\eta}{2}$ und $O(f,Z_2) < \overline{\int_c^b} f + \frac{\eta}{2}$; ihre Summe ist kleiner als $\overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f + \eta$. Also ist keine größere Zahl untere Schranke. Ebenso für die Unterintegrale. Subtraktion ergibt

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = \Big(\overline{\int_a^c} f - \underline{\int_a^c} f\Big) + \Big(\overline{\int_c^b} f - \underline{\int_c^b} f\Big).$$

Beide Klammern sind nichtnegativ. Die linke Seite ist also genau dann null, wenn beide Klammern null sind, und dann addieren sich die Integrale. □

Damit ist f auch auf jedem Teilintervall $[c,d] \subseteq [a,b]$ mit $c < d$ integrierbar (höchstens zweimal Satz 12.11). Für Integrale mit beliebig liegenden Grenzen trifft man folgende Vereinbarung.

Definition 12.21 (Integral mit beliebigen Grenzen). Sei f auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärt und seien $\alpha, \beta \in D$; ist $\alpha \neq \beta$, so werde das Intervall mit den Endpunkten α und β in D vorausgesetzt. Für $\alpha < \beta$ ist $\int_\alpha^\beta f$ das Integral aus Definition 12.20, falls f auf $[\alpha,\beta]$ integrierbar ist. Ferner setzt man

$$\int_\alpha^\alpha f = 0 \qquad \text{und} \qquad \int_\alpha^\beta f = -\int_\beta^\alpha f \quad \text{für } \alpha > \beta, \text{ falls } f \text{ auf } [\beta,\alpha] \text{ integrierbar ist.}$$

Für $\alpha > \beta$ integriert man also über $[\beta, \alpha]$ und wechselt das Vorzeichen. In allen Fällen gilt $\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f$, sobald eine Seite erklärt ist. Die Vereinbarung ist so gewählt, dass die Additivität aus Satz 12.11 ohne Fallunterscheidung gilt.

Satz 12.22 (Rechenregeln für beliebige Grenzen). Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$. Dann gilt:

1. $\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f$ (Dreipunkteregel).
2. $\int_\alpha^\beta (f + cg) = \int_\alpha^\beta f + c\int_\alpha^\beta g$ und $\int_\alpha^\beta c\,dx = c(\beta - \alpha)$.
3. Ist $|f| \le K$ auf $[a,b]$, so ist $\left|\int_\alpha^\beta f\right| \le \left|\int_\alpha^\beta |f|\right| \le K|\beta - \alpha|$. Insbesondere ist $\left|\int_a^b f\right| \le (b-a)\sup_{[a,b]} |f|$.

Beweis. Nach dem Absatz vor Definition 12.21 sind alle vorkommenden Integrale erklärt. (2) und (3): Für $\alpha < \beta$ sind das Satz 12.10, das Beispiel nach Definition 12.2 für Konstanten und Folgerung 12.13 (1) auf $[\alpha, \beta]$ (Folgerung 12.13 steht weiter unten; ihr Beweis benutzt Satz 12.22 nicht); die rechte Ungleichung in (3) folgt aus $|f| \le K$ mit Satz 12.10 (3), weil die Konstante K das Integral $K(\beta - \alpha)$ hat (Beispiel nach Definition 12.2). Für $\alpha = \beta$ sind alle Seiten null. Für $\alpha > \beta$ wechseln in (2) beide Seiten das Vorzeichen, und in (3) ändern sich die Beträge nicht.

(1) Setze

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f + \int_\gamma^\alpha f.$$

Wegen $\int_\gamma^\alpha f = -\int_\alpha^\gamma f$ ist (1) gleichwertig mit $D(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Der Ausdruck D ändert sich nicht, wenn man die drei Argumente zyklisch vertauscht, und wechselt das Vorzeichen, wenn man zwei Argumente vertauscht, denn jeder Summand $\int_x^y f$ geht dabei in einen Summanden $\int_y^x f = -\int_x^y f$ über; etwa ist $D(\beta, \alpha, \gamma) = \int_\beta^\alpha f + \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f = -D(\alpha, \beta, \gamma)$. Sind zwei der Punkte gleich, etwa nach solchen Vertauschungen $\alpha = \beta$, so ist $D(\alpha, \alpha, \gamma) = 0 + \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\alpha f = 0$. Sind die Punkte verschieden, so entsteht ihre Anordnung durch solche Vertauschungen aus der aufsteigenden $p < q < r$, also ist $D(\alpha, \beta, \gamma) = \pm D(p, q, r)$. Nach Satz 12.11 auf $[p, r]$ ist $\int_p^r f = \int_p^q f + \int_q^r f$, also $D(p, q, r) = 0$. □

Die Monotonie (Satz 12.10 (3)) gilt nur für $\alpha \le \beta$: Für $\alpha > \beta$ kehrt sich die Ungleichung um. Sind f und g auf einem beliebigen Intervall I erklärt und auf jedem Intervall $[c, d] \subseteq I$ mit $c < d$ integrierbar, so gilt Satz 12.22 für alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$: Sind nicht alle drei gleich, so wendet man ihn auf das kleinste Intervall $[a, b]$ an, das die drei Punkte enthält; sind alle gleich, so sind alle Seiten null.

Verschieben, Strecken und Spiegeln der Variablen ändern das Integral nur um den Streckfaktor. Für stetige Integranden folgt das in Einheit 13 aus der Substitutionsregel; hier gilt es für jede integrierbare Funktion.

Lemma 12.23 (affine Variablentransformation). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, seien $\lambda, c \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$, $\varphi(t) = \lambda t + c$ und $J = \varphi^{-1}([a,b])$. Dann ist J ein Intervall $[p,q]$ mit $p < q$, $f \circ \varphi$ ist auf J integrierbar, und für alle $\alpha, \beta \in J$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda t + c)\,dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda\alpha+c}^{\lambda\beta+c} f(x)\,dx.$$

Beweis. Die Abbildung φ ist bijektiv mit Umkehrung $x \mapsto \frac{x-c}{\lambda}$, streng monoton wachsend für $\lambda > 0$ und streng monoton fallend für $\lambda < 0$. Daher ist $J = \left[\frac{a-c}{\lambda}, \frac{b-c}{\lambda}\right]$ für $\lambda > 0$ und $J = \left[\frac{b-c}{\lambda}, \frac{a-c}{\lambda}\right]$ für $\lambda < 0$, und φ bildet jedes Intervall $[s,t] \subseteq J$ auf das Intervall mit den Endpunkten $\varphi(s)$, $\varphi(t)$ ab, das die Länge $|\lambda|(t-s)$ hat. Ist $Z' = \{t_0, \dots, t_n\}$ eine Zerlegung von J, so ist $\varphi(Z')$ eine Zerlegung von $[a,b]$, und jede Zerlegung Z von $[a,b]$ entsteht so, nämlich aus $Z' = \varphi^{-1}(Z)$. Die Funktion $f \circ \varphi$ nimmt auf $[t_{k-1}, t_k]$ dieselben Werte an wie f auf dessen Bild, hat dort also dasselbe Infimum und Supremum; insbesondere ist $f \circ \varphi$ beschränkt. Die Teilintervalle von $\varphi(Z')$ sind genau die Bilder der Teilintervalle von Z' (für $\lambda < 0$ in umgekehrter Reihenfolge). Daher ist

$$U(f \circ \varphi, Z') = \frac{1}{|\lambda|}\, U\big(f, \varphi(Z')\big), \qquad O(f \circ \varphi, Z') = \frac{1}{|\lambda|}\, O\big(f, \varphi(Z')\big).$$

Supremum und Infimum über alle Zerlegungen (Lemma 2.36 (3), für Infima mit Folgerung 2.35) zeigen, dass Unter- und Oberintegral von $f \circ \varphi$ das $\frac{1}{|\lambda|}$-fache derer von f sind. Also ist $f \circ \varphi$ integrierbar mit $\int_p^q f \circ \varphi = \frac{1}{|\lambda|} \int_a^b f$. Für $\lambda > 0$ ist $\varphi(p) = a$ und $\varphi(q) = b$, und das ist die Behauptung für $\alpha = p$, $\beta = q$. Für $\lambda < 0$ ist $\varphi(p) = b$, $\varphi(q) = a$ und $\frac{1}{|\lambda|} \int_a^b f = \frac{1}{\lambda} \int_b^a f$ nach Definition 12.21; wieder ist das die Behauptung. Für $\alpha < \beta$ in J wendet man dasselbe auf die Einschränkung von f auf das Intervall $\varphi([\alpha,\beta])$ an, die nach Satz 12.11 integrierbar ist; ihr Urbild unter φ ist $[\alpha,\beta]$. Für $\alpha = \beta$ sind beide Seiten null, und für $\alpha > \beta$ wechseln beide das Vorzeichen. □

Mit $\lambda = 1$ ist das die Verschiebung $\int_\alpha^\beta f(t+c)\,dt = \int_{\alpha+c}^{\beta+c} f$, mit $c = 0$ die Streckung und mit $\lambda = -1$, $c = 0$ die Spiegelung $\int_\alpha^\beta f(-t)\,dt = \int_{-\beta}^{-\alpha} f$. Anwendungen auf gerade, ungerade und periodische Funktionen stehen in Aufgabe B3.

Ist das Produkt zweier integrierbarer Funktionen integrierbar? Direkt ist das schwer zu sehen, weil sich $\sup_J(fg)$ nicht aus $\sup_J f$ und $\sup_J g$ ablesen lässt; schon bei negativen Werten kehren sich die Ungleichungen um. Man geht deshalb einen Umweg: Man schreibt fg mit Quadraten und zeigt allgemeiner, dass eine Funktion integrierbar bleibt, wenn man sie mit einer Funktion verkettet, die Abstände höchstens um einen festen Faktor streckt. Die Schwankung wächst dann höchstens um diesen Faktor.

Satz 12.12 (Verkettung mit Lipschitz-Funktionen). Sei $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, $D\subseteq\mathbb{R}$ eine Menge mit $f([a,b])\subseteq D$ und $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Konstante L (Definition 8.19), also $|\varphi(s)-\varphi(t)|\le L|s-t|$ für alle $s,t\in D$. Dann ist $\varphi\circ f$ integrierbar.

Beweis. $\varphi\circ f$ ist beschränkt, denn $|\varphi(f(x))|\le|\varphi(f(a))|+L|f(x)-f(a)|$. Auf jedem Teilintervall J gilt nach Lemma 12.7

$$\sup_J \varphi\circ f-\inf_J \varphi\circ f=\sup_{x,y\in J}|\varphi(f(x))-\varphi(f(y))|\le L\sup_{x,y\in J}|f(x)-f(y)|=L\big(\sup_J f-\inf_J f\big).$$

Also ist $O(\varphi\circ f,Z)-U(\varphi\circ f,Z)\le L\big(O(f,Z)-U(f,Z)\big)$ für jede Zerlegung, und Satz 12.6 überträgt sich. □

Folgerung 12.13. Seien $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind integrierbar:

1. $|f|$, und es gilt $\big|\int_a^b f\big|\le\int_a^b|f|$;
2. f^2 und fg;
3. $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$, insbesondere $f^+=\max(f,0)$ und $f^-=\max(-f,0)$;
4. $1/f$, falls es ein $c>0$ mit $|f(x)|\ge c$ für alle x gibt.

Beweis. (1) $\varphi(t)=|t|$ ist nach Satz 1.23 Lipschitz-stetig mit $L=1$. Aus $-|f|\le f\le|f|$ folgt mit Satz 12.10 $-\int|f|\le\int f\le\int|f|$.

(2) Sei $|f|\le K$. Auf $D=[-K,K]$ ist $\varphi(t)=t^2$ Lipschitz-stetig mit $L=2K$, denn $|s^2-t^2|=|s+t|\,|s-t|\le 2K|s-t|$. Also ist f^2 integrierbar, und $fg=\frac14\big((f+g)^2-(f-g)^2\big)$ nach Satz 12.10.

(3) $\max(f,g)=\frac12\big(f+g+|f-g|\big)$ und $\min(f,g)=\frac12\big(f+g-|f-g|\big)$.

(4) Auf $D=\{t:\ |t|\ge c\}$ ist $\big|\frac1s-\frac1t\big|=\frac{|t-s|}{|s|\,|t|}\le\frac{1}{c^2}|s-t|$. □

Für das Produkt gilt keine Produktregel: $\int fg$ ist im Allgemeinen nicht $\int f\cdot\int g$ (schon $f=g=x$ auf $[0,1]$ gibt $\frac13\ne\frac14$, mit den Werten aus Abschnitt 12.8). Ob $\varphi\circ f$ für jedes *stetige* φ integrierbar ist, untersucht Aufgabe V1; dass Integrierbarkeit von φ, sogar Monotonie, nicht genügt, zeigt (G6).

Lemma 12.14 (Randstücke). Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt und auf $[c,b]$ integrierbar für jedes c mit $a<c<b$. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar. Dasselbe gilt mit vertauschten Rollen der Endpunkte.

Beweisidee. Das Randstück $[a,c]$ trägt zur Differenz von Ober- und Untersumme höchstens seine Länge mal der doppelten Schranke bei, und es lässt sich beliebig kurz wählen.

Beweis. Sei $|f| \le K$ mit $K > 0$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $c \in (a,b)$ mit $2K(c-a) < \frac{\varepsilon}{2}$ und nach Satz 12.6 eine Zerlegung Z' von $[c,b]$ mit $O(f,Z') - U(f,Z') < \frac{\varepsilon}{2}$. Für die Zerlegung $Z = \{a\} \cup Z'$ von $[a,b]$ ist das erste Teilintervall $[a,c]$, und auf ihm ist $M_1 - m_1 \le 2K$. Also

$$O(f,Z) - U(f,Z) \le 2K(c-a) + O(f,Z') - U(f,Z') < \varepsilon. \qquad \square$$

Satz 12.15. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und bis auf endlich viele Stellen stetig. Dann ist f integrierbar.

Beweis. Seien $p_1 < \cdots < p_r$ die Unstetigkeitsstellen, ergänzt um a und b; die so entstehenden Punkte $a = q_0 < q_1 < \cdots < q_s = b$ zerlegen $[a,b]$ in Intervalle $[q_{j-1}, q_j]$, in deren Innerem f stetig ist. Sei $q_{j-1} < c < d < q_j$. Auf $[c,d]$ ist f stetig (Lemma 7.28 (1)), nach Satz 12.9 also integrierbar. Lemma 12.14, angewandt auf $[q_{j-1}, d]$ (linkes Randstück), zeigt die Integrierbarkeit auf $[q_{j-1}, d]$ für jedes $d < q_j$; nochmals Lemma 12.14 (rechtes Randstück) die auf $[q_{j-1}, q_j]$. Nach Satz 12.11 ist f auf $[a,b]$ integrierbar. $\square$

Folgerung 12.16. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und unterscheidet sich $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ von f nur an endlich vielen Stellen, so ist g integrierbar und $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Beweis. $h = g - f$ ist an höchstens N Stellen von null verschieden; sei $|h| \le K$. Für eine Zerlegung Z der Feinheit δ liegt jede dieser Stellen in höchstens zwei Teilintervallen. Auf allen übrigen Teilintervallen ist $h = 0$. Also ist

$$-2NK\delta \le U(h,Z) \le O(h,Z) \le 2NK\delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, ist h nach Satz 12.6 integrierbar mit $\int h = 0$, und $g = f + h$ nach Satz 12.10. $\square$

Insbesondere hängt das Integral nicht von den Werten an den Endpunkten ab. Ist f an endlich vielen Stellen von $[a,b]$ nicht erklärt und sonst beschränkt, so setzt man f an diesen Stellen beliebig fort; ob die Fortsetzung integrierbar ist und welchen Wert ihr Integral hat, hängt nach Folgerung 12.16 nicht von der Wahl ab.

Definition 12.24 (Treppenfunktion). Eine Funktion $t\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $\{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$ und Zahlen $c_1, \dots, c_n$ gibt mit $t(x) = c_k$ für $x_{k-1} < x < x_k$. Über die Werte $t(x_0), \dots, t(x_n)$ in den Teilungspunkten wird nichts verlangt.

Auf $[x_{k-1}, x_k]$ stimmt eine Treppenfunktion bis auf die Endpunkte mit der Konstanten c_k überein. Nach Folgerung 12.16 ist sie dort integrierbar mit dem Integral $c_k\,\Delta x_k$, und nach Satz 12.11 (Induktion über n) ist t auf $[a,b]$ integrierbar mit

$$\int_a^b t = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\Delta x_k.$$

Eine Treppenfunktion lässt sich mit vielen Zerlegungen beschreiben, etwa mit jeder Verfeinerung einer passenden. Weil die rechte Seite stets gleich dem Integral ist, hängt ihr Wert nicht davon ab, mit welcher Zerlegung man t beschreibt. Untersummen und Obersummen sind Integrale von Treppenfunktionen unterhalb und oberhalb von f: Ist $t = m_k$ auf (x_{k-1}, x_k) und $t = f$ in den Teilungspunkten, so ist $t \le f$ und $\int_a^b t = U(f, Z)$; ebenso für $O(f, Z)$.

12.5 Riemannsche Summen

Für Anwendungen ist eine andere Beschreibung des Integrals bequemer: als Grenzwert von Summen, in denen der Funktionswert an einer beliebigen Stelle jedes Teilintervalls steht.

Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ eine Wahl von *Zwischenstellen*. Dann heißt

$$S(f, Z, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k$$

eine *Riemannsche Summe* von f.

Stets ist $U(f, Z) \le S(f, Z, \xi) \le O(f, Z)$.

Satz 12.17 (Riemannsche Summen). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $I \in \mathbb{R}$. Genau dann ist f integrierbar mit $\int_a^b f = I$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$|S(f, Z, \xi) - I| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung Z mit Feinheit kleiner als δ und jede Wahl der Zwischenstellen gilt.

Beweisidee. Die Hinrichtung ist der Kern: Satz 12.6 liefert *eine* gute Zerlegung Z_0. Eine beliebige feine Zerlegung Z unterscheidet sich von $Z \cup Z_0$ nur auf den wenigen Teilintervallen, die einen Punkt von Z_0 im Inneren enthalten, und diese sind kurz.

Beweis. „⇒“: Sei $|f| \le K$ mit $K > 0$ und $\varepsilon > 0$. Nach Satz 12.6 und Lemma 12.3 gibt es eine Zerlegung $Z_0 = \{y_0, \dots, y_m\}$ mit $O(f, Z_0) < I + \frac{\varepsilon}{2}$. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{4Km}$. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung der Feinheit kleiner als δ und $Z' = Z \cup Z_0$. Nach Lemma 12.3 ist $O(f, Z') \le O(f, Z_0) < I + \frac{\varepsilon}{2}$.

Wir vergleichen $O(f, Z)$ mit $O(f, Z')$. Ein Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ von Z, das keinen der Punkte $y_1, \dots, y_{m-1}$ im Inneren enthält, ist auch Teilintervall von Z' und liefert in beiden Obersummen denselben Beitrag. Jedes der höchstens $m - 1$ übrigen Teilintervalle wird in Z' in Stücke zerlegt; sein Beitrag zu $O(f, Z)$ ist höchstens $K\Delta x_k$, der Beitrag seiner

Stücke zu $O(f, Z')$ mindestens $-K\Delta x_k$. Daher ist

$$O(f,Z) \le O(f,Z') + (m-1)\cdot 2K\delta < I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon.$$

Dieselbe Überlegung für $-f$, das nach Satz 12.10 integrierbar ist mit Integral $-I$, liefert ein $\delta' > 0$, sodass $O(-f,Z) < -I+\varepsilon$, also $U(f,Z) > I-\varepsilon$ für jede Zerlegung der Feinheit kleiner als δ'. Wir ersetzen δ durch $\min(\delta, \delta')$. Jede Riemannsche Summe liegt zwischen $U(f,Z)$ und $O(f,Z)$, also gilt $|S(f,Z,\xi) - I| < \varepsilon$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\varepsilon > 0$, δ wie in der Voraussetzung und Z eine Zerlegung der Feinheit kleiner als δ. Nach Definition des Supremums gibt es zu jedem k ein $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ mit $f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$. Für diese Zwischenstellen ist

$$O(f,Z) < S(f,Z,\xi) + \varepsilon < I + 2\varepsilon.$$

Ebenso gibt es Zwischenstellen ξ' mit $f(\xi'_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$, und es folgt $U(f,Z) > I - 2\varepsilon$. Also ist $I - 2\varepsilon < \underline{\int} f \le \overline{\int} f < I + 2\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$; beide sind gleich I. □

Bemerkung (Gebrauch). In der Anwendung benutzt man meist nur: Ist f integrierbar und (Z_n) eine Folge von Zerlegungen, deren Feinheit gegen 0 strebt, so konvergiert jede zugehörige Folge Riemannscher Summen gegen $\int_a^b f$. Für die äquidistanten Zerlegungen und die rechten Endpunkte als Zwischenstellen heißt das

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f.$$

Die Integrierbarkeit muss dabei vorher feststehen. Eine einzelne konvergente Folge Riemannscher Summen beweist sie nicht: Für die Dirichlet-Funktion χ aus (G1) auf $[0,1]$ sind die rechten Endpunkte $\frac{k}{n}$ rational, die Riemannschen Summen zu den äquidistanten Zerlegungen sind also alle gleich 1 und konvergieren. Wählt man in denselben Zerlegungen irrationale Zwischenstellen, so sind alle Summen gleich 0. In Satz 12.17 ist deshalb die Bedingung „jede Wahl der Zwischenstellen“ wesentlich. Ist die Integrierbarkeit gesichert, so lassen sich Grenzwerte von Summen als Integrale berechnen (Abschnitt 12.8, Beispiel 4).

12.6 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 12.18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung).

1. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $m \le f(x) \le M$ für alle x, so gilt $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.

2. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$.
3. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $g \geq 0$, so gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweisidee. Der Mittelwert $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ liegt zwischen dem kleinsten und dem größten Funktionswert; eine stetige Funktion nimmt jeden Wert dazwischen an.

Beweis. (1) ist Satz 12.10 (3), angewandt auf $m \leq f \leq M$, zusammen mit $\int_a^b c = c(b-a)$.

(3) Das Produkt fg ist nach Satz 12.9 und Folgerung 12.13 integrierbar. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum (Satz 8.16, mit Lemma 8.11) gibt es Stellen $p, q \in [a,b]$ mit $f(p) = m = \min f$ und $f(q) = M = \max f$. Wegen $g \geq 0$ ist $mg \leq fg \leq Mg$, nach Satz 12.10 also

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g.$$

Ist $\int_a^b g = 0$, so ist auch $\int_a^b fg = 0$, und jedes ξ leistet das Verlangte. Andernfalls ist $\int g > 0$, und $\mu = \int fg / \int g$ liegt in $[m,M]$. Ist $p = q$, so ist $m = M = \mu$ und $\xi = p$. Sonst ist die Einschränkung von f auf das Intervall zwischen p und q stetig (Lemma 7.28 (1)), und nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) nimmt f dort den Wert μ an einer Stelle ξ an.

(2) ist (3) mit $g = 1$. □

Die Zahl $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ heißt der *Mittelwert* von f auf $[a,b]$. Teil (2) besagt: Eine stetige Funktion nimmt ihren Mittelwert an. Ohne Stetigkeit ist das falsch (G5).

Folgerung 12.19. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$ und $\int_a^b f = 0$, so ist $f = 0$.

Beweis. Angenommen, $f(x_0) = 2\eta > 0$ für ein x_0. Nach der Vorzeichenerhaltung (Lemma 7.13) gibt es $\delta > 0$ mit $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} = \eta$ für alle $x \in [a,b] \cap B_\delta(x_0)$. Für $c = \max\bigl(a, x_0 - \frac{\delta}{2}\bigr)$ und $d = \min\bigl(b, x_0 + \frac{\delta}{2}\bigr)$ ist $x_0 \in [c,d]$, $[c,d] \subseteq [a,b] \cap B_\delta(x_0)$ und $c < d$, denn wegen $a < b$ ist höchstens einer der beiden Punkte gleich x_0. Auf $[c,d]$ ist $f \geq \eta$. Nach Satz 12.22 (1) und Satz 12.10 (3) ist

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f \geq 0 + \eta(d-c) + 0 > 0,$$

ein Widerspruch. □

Ohne Stetigkeit ist auch das falsch (G7).

12.7 Gegenbeispiele

(G1) Beschränkt, aber nicht integrierbar. Die *Dirichlet-Funktion* χ (Einheit 7, (G2)), eingeschränkt auf $[0,1]$, hat den Wert $\chi(x) = 1$ für rationales und $\chi(x) = 0$ für irrationales x. Jedes Intervall $[c,d]$ mit $c < d$ enthält eine rationale Zahl (Satz 2.31) und eine irrationale: Zu einer rationalen Zahl r mit $c - \sqrt{2} < r < d - \sqrt{2}$ ist $r + \sqrt{2} \in (c,d)$, und $r + \sqrt{2}$ ist irrational, weil sonst $\sqrt{2} = (r + \sqrt{2}) - r$ rational wäre (Satz 2.9). Daher ist $m_k = 0$ und $M_k = 1$ auf jedem Teilintervall jeder Zerlegung, also $U(\chi, Z) = 0$ und $O(\chi, Z) = 1$. Unterintegral 0 und Oberintegral 1 sind verschieden. Die Rechtecksummen schließen hier keine Zahl ein, sondern ein ganzes Intervall.

(G2) Unbeschränkte Funktionen. Sei $f(x) = \frac{1}{x}$ für $0 < x \leq 1$ und $f(0) = 0$. Definition 12.2 ist nicht anwendbar, weil f auf dem ersten Teilintervall jeder Zerlegung kein Supremum hat. Die Einschränkung auf beschränkte Funktionen ist nicht willkürlich: Auch die Riemannschen Summen versagen. Seien eine Zerlegung Z, Zwischenstellen $\xi_2, \dots, \xi_n$ und ein $R > 0$ gegeben. Für jedes $\xi_1 \in (0, x_1]$ mit $\frac{\Delta x_1}{\xi_1} > R - \sum_{k \geq 2} f(\xi_k)\Delta x_k$ ist $S(f, Z, \xi) > R$, und solche ξ_1 gibt es, weil $\frac{\Delta x_1}{\xi_1}$ für kleines $\xi_1 > 0$ beliebig groß wird (Riemannsche Summen: Abschnitt 12.5). Die Riemannschen Summen sind also bei keiner Feinheit beschränkt und können nicht konvergieren. Integrale solcher Funktionen werden in Einheit 13 als Grenzwerte erklärt (uneigentliche Integrale).

(G3) Integrierbar trotz dicht liegender Unstetigkeitsstellen. Sei $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Einschränkung der Thomaeschen Funktion aus Einheit 7, (G4): $T(x) = \frac{1}{q}$, wenn x rational und q die kleinste natürliche Zahl mit $qx \in \mathbb{Z}$ ist, und $T(x) = 0$ für irrationales x; insbesondere $T(0) = T(1) = 1$. Nach Einheit 7, (G4), und Lemma 7.28 (1) ist T in jedem irrationalen Punkt von $[0,1]$ stetig. In jedem rationalen Punkt $x_0 \in [0,1]$ ist T unstetig, denn $T(x_0) > 0$, und jedes Intervall um x_0 enthält irrationale Punkte von $[0,1]$ mit $T = 0$ (G1). Trotzdem ist T integrierbar mit $\int_0^1 T = 0$.

Beweis. Jedes Teilintervall enthält eine irrationale Zahl (G1), also ist $U(T, Z) = 0$ für jede Zerlegung. Sei $Q \geq 2$ eine natürliche Zahl und $E_Q = \{x \in [0,1] : T(x) > \frac{1}{Q}\}$. Jeder Punkt von E_Q ist rational mit kleinstem Nenner $q \leq Q - 1$, also von der Form $\frac{p}{q}$ mit $p = qx \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq p \leq q$. Nach Satz 1.12 hat E_Q daher höchstens $\sum_{q=1}^{Q-1}(q+1) = \frac{(Q-1)(Q+2)}{2} \leq Q^2$ Elemente. Sei Z_n die äquidistante Zerlegung von $[0,1]$ mit $n = Q^3$ Teilen. Jeder Punkt von E_Q liegt in höchstens zwei Teilintervallen. Auf diesen höchstens $2Q^2$ Teilintervallen ist $M_k \leq 1$, ihr Beitrag zu $O(T, Z_n)$ ist also höchstens $2Q^2 \cdot \frac{1}{Q^3} = \frac{2}{Q}$. Ein Teilintervall ohne Punkt von E_Q enthält nur Punkte mit $T \leq \frac{1}{Q}$. Dort ist $M_k \leq \frac{1}{Q}$, und diese Teilintervalle tragen zusammen höchstens $\frac{1}{Q}$ bei. Also ist

$$0 = U(T, Z_n) \leq O(T, Z_n) \leq \frac{3}{Q}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $Q \geq 2$ mit $Q > \frac{3}{\varepsilon}$ (Satz 2.29). Nach Satz 12.6 ist T integrierbar. Wegen $0 \leq \int_0^1 T \leq \frac{3}{Q}$ für jedes $Q \geq 2$ ist $\int_0^1 T = 0$ (Satz 2.29). □

Integrierbarkeit verlangt also nicht, dass f bis auf endlich viele Stellen stetig ist. Die genaue Bedingung ist das Lebesgue-Kriterium (Ausblick).

(G4) Grenzwerte integrierbarer Funktionen. Sei $r_1, r_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (Satz 2.45) und $f_n(x) = 1$ für $x \in \{r_1, \ldots, r_n\}$, sonst $f_n(x) = 0$. Jedes f_n ist nach Folgerung 12.16 integrierbar mit Integral 0, die Folge ist wachsend und konvergiert in jedem Punkt gegen die Dirichlet-Funktion χ, die nicht integrierbar ist. Punktweise Grenzwerte vertragen sich nicht mit dem Integral; Einheit 14 zeigt, dass gleichmäßige Konvergenz genügt (Satz 14.6).

(G5) Mittelwertsatz ohne Stetigkeit. Für $f(x) = -1$ auf $[0,1)$ und $f(x) = 1$ auf $[1,2]$ ist $\int_0^2 f = 0$ nach Satz 12.11 und Folgerung 12.16, aber f nimmt den Wert 0 nicht an. In Satz 12.18 (2) und (3) kann auf die Stetigkeit von f nicht verzichtet werden. In (3) auch nicht auf $g \geq 0$: Für $f(x) = x$ und $g(x) = 1 - 2x$ auf $[0,1]$ ist nach Beispiel 1 und Satz 12.10 $\int_0^1 g = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$, aber $\int_0^1 fg = \int_0^1 (x - 2x^2)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \neq f(\xi) \cdot 0$.

(G6) Verkettung integrierbarer Funktionen. Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) = 1$ für $t > 0$. φ ist monoton, nach Satz 12.8 also integrierbar, und die Thomaesche Funktion T ist nach (G3) integrierbar. Weil $T(x) > 0$ genau für rationales x gilt, ist $\varphi \circ T = \chi$ die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$, die nicht integrierbar ist. In Satz 12.12 genügt es also nicht, φ integrierbar zu verlangen. Stetigkeit von φ genügt (Aufgabe V1); der Sprung von φ im Punkt 0 ist hier die Ursache.

(G7) Nichtnegativ mit Integral null. Die Thomaesche Funktion ist nichtnegativ, nicht identisch null und hat das Integral 0. Folgerung 12.19 braucht die Stetigkeit; schon eine Funktion, die an einer einzigen Stelle den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat, ist ein Gegenbeispiel.

12.8 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (Potenzen). Sei $b > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Funktion x^k ist auf $[0,b]$ monoton wachsend (Lemma 2.38 (1)), also integrierbar (Satz 12.8). Für die äquidistante Zerlegung mit n Teilen ist das Infimum auf dem j-ten Teilintervall $\left(\frac{(j-1)b}{n}\right)^k$ und das Supremum $\left(\frac{jb}{n}\right)^k$, also

$$O_n = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} j^k, \qquad U_n = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{j=0}^{n-1} j^k = O_n - \frac{b^{k+1}}{n}.$$

Eine geschlossene Summenformel wird nicht gebraucht, nur das Wachstum der Summe: Nach Einheit 4, Aufgabe V5 (c), strebt $\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{n} j^k$ gegen $\frac{1}{k+1}$. Nach Satz 4.9 und Satz 4.4 (1) konvergieren also beide Folgen gegen $\frac{b^{k+1}}{k+1}$. Da $U_n \leq \int_0^b x^k\,dx \leq O_n$ für

jedes n gilt, folgt mit Satz 4.10

$$\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1} \qquad (k \in \mathbb{N},\ b > 0).$$

Für $k = 0$ gilt dieselbe Formel, denn die Konstante 1 hat das Integral b. Für $0 \le a < b$ folgt mit Satz 12.11 $\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. Für $k = 1$ und $k = 2$ lassen sich U_n und O_n mit Satz 1.12 und Einheit 1, Aufgabe R1, sogar geschlossen ausrechnen; für $k = 2, b = 1$ sind das die Summen der Leitfrage. Insbesondere ist $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$ und $\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$. Der Hauptsatz (Einheit 13) erspart auch diese Grenzwertrechnung.

Beispiel 2 (Exponentialfunktion). Sei $a < b$ und $h = \frac{b-a}{n}$. Die Funktion $e^x = \exp(x)$ (Satz 9.16 (3)) ist monoton wachsend (Satz 9.8), also $m_k = e^{a+(k-1)h}$, $M_k = e^{a+kh}$. Mit der geometrischen Summe (Satz 1.13, $q = e^h \ne 1$):

$$U_n = h\sum_{k=0}^{n-1} e^{a+kh} = h\,e^a\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1} = (e^b - e^a)\,\frac{h}{e^h-1}, \qquad O_n = e^h\,U_n.$$

Für $n \to \infty$ strebt h gegen 0, also $\frac{h}{e^h-1} \to 1$ (Satz 9.6 mit dem Folgenkriterium, Satz 7.5, und Satz 4.9 (4)) und $e^h \to 1$ (Satz 9.8). Beide Folgen konvergieren gegen $e^b - e^a$. Da e^x nach Satz 12.8 integrierbar ist und $U_n \le \int_a^b e^x\,dx \le O_n$ für jedes n gilt, folgt mit Satz 4.10 $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$.

Beispiel 3 (Logarithmus). Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist auf jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq (0, \infty)$ monoton fallend, nach Satz 12.8 also dort integrierbar. Für $s \ge 1$ sei

$$F(s) = \int_1^s \frac{dx}{x},$$

insbesondere $F(1) = 0$ (Definition 12.21). Statt die Summen einer bestimmten Zerlegung auszurechnen, gewinnen wir zwei Eigenschaften von F aus den Rechenregeln und schließen den Wert dann ein.

Erstens: $F(st) = F(s) + F(t)$ für $s, t \ge 1$. Für $s = 1$ oder $t = 1$ ist das klar. Seien $s, t > 1$. Lemma 12.23 mit $\lambda = s$ und Verschiebung 0, angewandt auf $\frac{1}{x}$ über $[s, st]$, gibt wegen $\varphi^{-1}([s, st]) = [1, t]$

$$\int_1^t \frac{du}{su} = \frac{1}{s}\int_s^{st} \frac{dx}{x}.$$

Nach Satz 12.10 (2) ist die linke Seite $\frac{1}{s}F(t)$, also $\int_s^{st} \frac{dx}{x} = F(t)$. Die Dreipunkteregel (Satz 12.22 (1)) auf $[1, st]$ ergibt $F(st) = F(s) + \int_s^{st} \frac{dx}{x} = F(s) + F(t)$. Durch Induktion

folgt $F(s^n) = nF(s)$ für $s \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, und wegen $s^n \geq 1$ ist $F(s^{n+1}) = F(s^n \cdot s) = F(s^n) + F(s) = (n+1)F(s)$.

Zweitens: $1 - \frac{1}{s} \leq F(s) \leq s - 1$ für $s \geq 1$. Für $s = 1$ sind alle drei Zahlen null. Für $s > 1$ ist $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ auf $[1, s]$, und Satz 12.18 (1) gibt $\frac{1}{s}(s-1) \leq F(s) \leq s - 1$.

Sei nun $c > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Mit $h_n = \frac{\ln c}{n}$ ist $c^{1/n} = e^{h_n}$ (Definition 9.15) und $c^{-1/n} = e^{-h_n} = \frac{1}{c^{1/n}}$ (Satz 9.17 (1)). Wegen $\ln c > 0$ ist $h_n > 0$, also $c^{1/n} > 1$ (Satz 9.8), und $(c^{1/n})^n = c$ (Satz 9.16 (2)). Die beiden Eigenschaften mit $s = c^{1/n}$ ergeben $F(c) = nF(c^{1/n})$ und, nach Multiplikation mit n,

$$n\big(1 - e^{-h_n}\big) \leq F(c) \leq n\big(e^{h_n} - 1\big).$$

Die rechte Seite ist $\ln c \cdot \frac{e^{h_n}-1}{h_n}$. Wegen $h_n = \ln c \cdot \frac{1}{n} \to 0$ (Satz 4.4 (1), Satz 4.9) und $h_n \neq 0$ strebt sie nach Satz 9.6 mit dem Folgenkriterium (Satz 7.5) und Satz 4.9 gegen $\ln c$. Die linke Seite ist e^{-h_n} mal die rechte und strebt wegen $e^{-h_n} \to e^0 = 1$ (Satz 9.6) ebenfalls gegen $\ln c$. Nach Satz 4.10 ist

$$\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c.$$

Für $c = 1$ sind beide Seiten null. Für $0 < c < 1$ gibt Lemma 12.23 mit $\lambda = c$ und Verschiebung 0 auf $[c, 1]$ ebenso $\int_c^1 \frac{dx}{x} = F(\frac{1}{c}) = \ln \frac{1}{c} = -\ln c$ (Satz 9.13 (1)), nach Definition 12.21 also ebenfalls $\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c$.

Die erste Eigenschaft ist die Funktionalgleichung des Logarithmus (Satz 9.13 (1)), hier aus der Streckungsregel und der Dreipunkteregel gewonnen; die zweite ist die Ungleichung aus Satz 9.13 (2), hier als Abschätzung des Integrals. Keine Unter- oder Obersumme wird ausgerechnet: Die Einschließung entsteht aus der Funktionalgleichung und der groben Schranke, angewandt auf das kurze Intervall $[1, c^{1/n}]$.

Beispiel 4 (Grenzwert einer Summe). Gesucht ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Es ist

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + k/n}.$$

Die Punkte $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$, bilden die äquidistante Zerlegung von $[1, 2]$, und die rechte Seite ist die Riemannsche Summe der stetigen Funktion $\frac{1}{x}$ zu dieser Zerlegung mit den rechten Endpunkten als Zwischenstellen. Nach Satz 12.17 (Bemerkung „Gebrauch“) und Beispiel 3 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Weil $\frac{1}{x}$ fällt, ist die Summe sogar die Untersumme zu dieser Zerlegung und liegt für jedes n höchstens bei $\ln 2$; für $n = 1000$ ist sie 0,69289 …, während $\ln 2 = 0{,}69314\ldots$ ist.

Beispiel 5 (Abschätzung ohne Auswertung). Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt die Jordansche Ungleichung $\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ (Folgerung 11.25 (4)). Alle drei Funktionen sind stetig (Folgerung 9.25), also integrierbar. Nach Satz 12.10 (3) und Beispiel 1 ist

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \le \int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

Numerisch: $0{,}785 \le \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx \le 1{,}234$. Der wahre Wert 1 folgt in Einheit 13 aus dem Hauptsatz.

12.9 Ausblick

Antwort auf die Leitfrage. Die beiden unausgesprochenen Annahmen der Parabelrechnung sind durch eine Definition ersetzt: Die Fläche unter dem Graphen einer beschränkten Funktion *ist* die Zahl zwischen allen Unter- und Obersummen, sofern es genau eine gibt (Definition 12.5 und der Absatz danach). Dass $\frac{1}{3}$ die Fläche unter $y = x^2$ über $[0, 1]$ ist, ist damit kein Augenschein mehr, sondern Beispiel 1. Für welche Funktionen das gelingt, beantwortet die Einheit teilweise: für monotone (Satz 12.8), stetige (Satz 12.9) und beschränkte, bis auf endlich viele Stellen stetige Funktionen (Satz 12.15), für Summen, Produkte und Beträge solcher Funktionen (Satz 12.10, Folgerung 12.13), sogar für manche Funktionen mit dicht liegenden Unstetigkeitsstellen (G3), aber nicht für die Dirichlet-Funktion der Leitfrage (G1) und nicht für unbeschränkte Funktionen (G2). Die vollständige Antwort gibt das Lebesgue-Kriterium unten, ohne Beweis. Wie man die Zahl bestimmt, beantworten bisher nur Rechtecksummen (Beispiele 1 und 2), die Rechenregeln zusammen mit einer Einschließung (Beispiel 3), Riemannsche Summen (Beispiel 4) oder Abschätzungen (Beispiel 5). Ein allgemeines Rechenverfahren liefert erst Einheit 13.

- Der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** (Einheit 13, Satz 13.4 und Folgerung 13.5) verbindet Integral und Ableitung: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ für jede Stammfunktion F von f. Die Rechnungen der Beispiele 1 bis 3 werden dann zu Einzeilern.
- **Uneigentliche Integrale** (Einheit 13, Definition 13.11) behandeln unbeschränkte Funktionen wie in (G2) und unbeschränkte Intervalle als Grenzwerte von Riemann-Integralen.
- **Vertauschung von Grenzwert und Integral** (Einheit 14): (G4) zeigt, dass punktweise Konvergenz nicht genügt. Bei gleichmäßiger Konvergenz ist der Grenzwert integrierbar, und Grenzwert und Integral dürfen vertauscht werden (Satz 14.6).

- **Lebesgue-Kriterium** (ohne Beweis, gehört in die Maß- und Integrationstheorie): Eine beschränkte Funktion auf $[a, b]$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Nullmenge ist, das heißt, sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch abzählbar viele Intervalle der Gesamtlänge kleiner als ε überdecken lässt. Satz 12.8, Satz 12.15 und (G3) sind Sonderfälle; die Dirichlet-Funktion ist überall unstetig. Eine schwächere Folgerung, dass die Stetigkeitsstellen einer integrierbaren Funktion dicht liegen, beweist Aufgabe V3 direkt.
- **Komplexwertige Integranden** (ohne Beweis). Für $f = u + iv\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ mit reellwertigen u, v nennt man f integrierbar, wenn u und v es sind, und setzt $\int_a^b f = \int_a^b u + i \int_a^b v$. Linearität und Additivität übertragen sich komponentenweise. Monotonie und Teil (1) des Mittelwertsatzes setzen eine Anordnung voraus, die es auf $\mathbb{C}$ nicht gibt (Satz 3.16). Teil (2) lässt sich formulieren, ist aber falsch: $f(x) = (1-2x) + i(1-6x+6x^2)$ ist auf $[0, 1]$ stetig mit $\int_0^1 f = 0$ (Beispiel 1), hat aber keine Nullstelle, denn der Realteil verschwindet nur in $x = \frac{1}{2}$, wo der Imaginärteil $-\frac{1}{2}$ ist. Die Einheiten 13 und 14 integrieren nur reellwertige Funktionen.
- **Roter Faden Vollständigkeit.** In dieser Einheit geht die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ unter anderem an folgenden Stellen ein: in der Existenz von Ober- und Unterintegral (Supremumseigenschaft, Definition 12.5), in der Integrierbarkeit stetiger Funktionen (gleichmäßige Stetigkeit nach dem Satz von Heine, Satz 8.21, der auf der Kompaktheit von $[a, b]$ beruht; Satz 12.9), im Mittelwertsatz (Satz vom Maximum und Minimum und Zwischenwertsatz; Satz 12.18), in Aufgabe V3 (Cantorscher Durchschnittssatz, Folgerung 8.14) und in Aufgabe V5 (Intervallschachtelungsprinzip, Folgerung 5.15 (3)).
- Das **Lebesgue-Integral** der Maß- und Integrationstheorie beseitigt die Schwäche aus (G4): Für monotone Folgen messbarer Funktionen vertauschen Grenzwert und Integral, und die Dirichlet-Funktion erhält das Integral 0.

Zum Vergleich.[1] Otto Forster, Analysis 1 (12. Auflage 2016), § 18, baut das Integral über Treppenfunktionen auf. Ober- und Unterintegral sind dort Infimum und Supremum von Integralen von Treppenfunktionen. Hier dagegen werden Ober- und Untersummen nach Darboux benutzt. Die Sätze über monotone und stetige Funktionen, Linearität, Betrag und Produkt, den Mittelwertsatz der Integralrechnung, Riemannsche Summen und die Additivität bezüglich des Intervalls stehen dort als Satz 3 bis Satz 9 und sind hier eigenständig bewiesen. Den Wert $\int_0^a x\,dx$ rechnet dort Beispiel (18.4) mit Riemannschen Summen aus (hier das Beispiel nach Definition 12.2). Unter den Aufgaben zu § 18 stehen die Berechnung von $\int_0^a x^k\,dx$ und $\int_0^a e^x\,dx$ mit Riemannschen Summen (Aufgaben 18.1 und 18.2; hier Beispiel 1 auf anderem Weg und Beispiel 2), $\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a$ mit der geometrischen Teilung (Aufgabe 18.3; hier Beispiel 3 auf anderem Weg), der Grenzwert

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n} \to \ln 2$ (Aufgabe 18.4; hier Beispiel 4, abgewandelt in Aufgabe R2 (b)) und die Integrierbarkeit beschränkter Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen (Aufgabe 18.6; hier Satz 12.15). Das Übungsbuch zur Analysis 1 von Forster und Wessoly (5. Auflage 2011), § 18, enthält dieselben Rechnungen für $\int_0^a x^k\,dx$ und $\int_1^a \frac{dx}{x}$ als Aufgaben 18 A und 18 B mit Lösungen, ferner die Integrierbarkeit von $\frac{1}{f}$ für $f \geq \delta > 0$ (Aufgabe 18 D; hier Folgerung 12.13 (4)) und die Integrierbarkeit der Thomaeschen Funktion mit dem Integral 0 (Aufgabe 18 G; hier (G3) mit anderer Abschätzung). Ohne abgedruckte Lösung stehen dort die Verkettung mit einer stetig differenzierbaren Funktion (Aufgabe 18 E; hier allgemeiner Satz 12.12 und Aufgabe V1) und komplexwertige Integranden (Aufgabe 18 F; hier im Ausblick).

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 12

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Sei $f(x) = \sqrt{x}$ auf $[0,1]$ und $Z_n' = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $x_k = \frac{k^2}{n^2}$.

(a) Berechnen Sie $U(f, Z_n')$ und $O(f, Z_n')$ mit Satz 1.12 und Einheit 1, Aufgabe R1, und bestimmen Sie $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$. Wie groß muss n sein, damit $O(f, Z_n') - U(f, Z_n') < 10^{-3}$ gilt?

(b) Zeigen Sie $U(f, Z_n') + O(g, Z_n) = 1$ für $g(x) = x^2$ und die äquidistante Zerlegung Z_n von $[0,1]$ mit n Teilen, und deuten Sie die Gleichung als Zerlegung des Einheitsquadrats in Rechtecke.

R2. Bestimmen Sie mit Riemannschen Summen die Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2}\, e^{k^2/n^2}$ (Hinweis: Zerlegung $x_k = \frac{k^2}{n^2}$ wie in R1),

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k}$.

R3. Bestimmen Sie jeweils alle Stellen ξ, die der Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 12.18) liefert:

(a) $f(x) = x^2$ auf $[0, b]$ mit $b > 0$ (Teil 2),

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ auf $[0,1]$ (Teil 3),

(c) $f(x) = x$, $g(x) = x$ auf $[0,1]$ (Teil 3).

Die benötigten Integrale von Potenzen entnehmen Sie Beispiel 1.

R4. Zeigen Sie ohne Auswertung des Integrals

$$\frac{4}{3} \le \int_0^1 e^{x^2}\, dx \le \frac{e+2}{3}.$$

Benutzen Sie $e^t \ge 1 + t$ und die Konvexität der Exponentialfunktion. Verbessern Sie die untere Schranke mit $e^t \ge 1 + t + \frac{t^2}{2}$ für $t \ge 0$ und Beispiel 1.

R5. Berechnen Sie $\int_0^3 \lfloor x \rfloor\, dx$ und $\int_0^3 \big(x - \lfloor x \rfloor\big)\, dx$. Dabei ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\le x$ (Lemma 2.30). Begründen Sie jeden Schritt mit einem Satz aus dem Kapitel.

Stufe B – Beweisen

B1. (Cauchy-Schwarz) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie

$$\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \le \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2.$$

B2. (a) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \le g$ und $f \neq g$. Zeigen Sie $\int_a^b f < \int_a^b g$.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$, ohne den Wert von $\int_0^1 x^n\,dx$ zu benutzen.

B3. (Anwendungen von Lemma 12.23)

(a) Sei $c > 0$ und $h\colon [-c,c] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie: Ist h ungerade ($h(-x) = -h(x)$ für alle x), so ist $\int_{-c}^{c} h = 0$; ist h gerade ($h(-x) = h(x)$ für alle x), so ist $\int_{-c}^{c} h = 2\int_0^c h$.

(b) Sei $p > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x+p) = f(x)$ für alle x, und sei f auf $[0,p]$ integrierbar. Zeigen Sie, dass f auf jedem Intervall $[\alpha,\beta]$ mit $\alpha < \beta$ integrierbar ist und dass $\int_\alpha^{\alpha+p} f = \int_0^p f$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

B4. Sei $f(0) = 0$ und $f(x) = (-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}$ für $0 < x \le 1$. Zeigen Sie, dass f auf $[0,1]$ integrierbar ist, obwohl f unendlich viele Unstetigkeitsstellen hat, und stellen Sie $\int_0^1 f$ als Reihe dar.

B5. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) Ist $\int_c^d f = 0$ für alle $c < d$ in $[a,b]$, so ist $f = 0$.

(b) Ist $\int_a^b fg = 0$ für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so ist $f = 0$.

Stufe V – Vertiefen

V1. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $m \le f \le M$ und $\varphi\colon [m,M] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $\varphi \circ f$ integrierbar ist. Vergleichen Sie mit (G6).

V2. Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für rationales und $f(x) = 0$ für irrationales x. Bestimmen Sie Ober- und Unterintegral.

V3. (Stetigkeitsstellen integrierbarer Funktionen) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

(a) Zeigen Sie: In jedem Intervall (c,d) mit $a \le c < d \le b$ gibt es einen Punkt, in dem f stetig ist. Konstruieren Sie dazu mit Satz 12.6 geschachtelte kompakte Intervalle, auf denen f immer weniger schwankt und von denen jedes im Inneren des vorigen liegt, und benutzen Sie den Cantorschen Durchschnittssatz (Folgerung 8.14).

(b) Folgern Sie erneut, dass die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$ nicht integrierbar ist. Welche Punkte sind die Stetigkeitsstellen der Thomaeschen Funktion aus (G3), und wie passt das zu (a)?

V4. (Jensen für Integrale) Sei I ein offenes Intervall, $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ konvex und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f([a,b]) \subseteq I$.

(a) Zeigen Sie mit Riemannschen Summen und der Ungleichung von Jensen (Satz 11.17): $\varphi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f$.

(b) Folgern Sie $e^{1/2} \le e-1$ und $\big(\int_a^b f\big)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2$. Mit welchem Spezialfall von Aufgabe B1 stimmt die zweite Ungleichung überein?

V5. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) > 0$ für alle x. Zeigen Sie $\int_a^b f > 0$. Stetigkeit ist nicht vorausgesetzt; benutzen Sie das Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3)).

Lösungen

Lösung R1. (a) f ist monoton wachsend (aus $0 \le u < v$ und $\sqrt{u} \ge \sqrt{v}$ folgte nach Lemma 2.38 (1) $u \ge v$), also integrierbar (Satz 12.8). Auf $[x_{k-1}, x_k]$ ist $m_k = \sqrt{x_{k-1}} = \frac{k-1}{n}$ und $M_k = \frac{k}{n}$ (Satz 2.39), ferner $\Delta x_k = \frac{k^2-(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$. Mit $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Satz 1.12) und $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Einheit 1, Aufgabe R1) ist

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6},$$

und wegen $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n(n+1) - n = n^2$ (Satz 1.12) ist $\sum_{k=1}^n (k-1)(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - n^2 = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$. Also

$$U(f, Z_n') = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(2k-1) = \frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2}, \qquad O(f, Z_n') = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n^2}.$$

Beide Folgen konvergieren gegen $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (Satz 4.9). Da $U(f, Z_n') \le \int_0^1 \sqrt{x}\,dx \le O(f, Z_n')$ für jedes n gilt, ist $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$ (Satz 4.10). Die Differenz ist

$$O(f, Z_n') - U(f, Z_n') = \frac{(4n^2+3n-1) - (4n^2-3n-1)}{6n^2} = \frac{1}{n},$$

also kleiner als 10^{-3} genau für $n \ge 1001$. Die äquidistante Zerlegung liefert nach dem Beweis von Satz 12.8 ebenfalls die Differenz $\frac{1}{n}$; der Vorteil der angepassten Zerlegung

liegt nicht in der Genauigkeit, sondern darin, dass die Summen mit bekannten Formeln ausrechenbar sind.

(b) Nach Beispiel 1 (Fall $k = 2$, $b = 1$; die geschlossene Form steht in der Leitfrage) ist $O(g, Z_n) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$, also

$$U(f, Z_n') + O(g, Z_n) = \frac{(4n^2 - 3n - 1) + (2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} = 1.$$

Deutung (anschaulich, kein Beweis): Der Graph von $\sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ ist der an der Diagonale gespiegelte Graph von x^2. Die Rechtecke der Untersumme von $\sqrt{x}$ zu Z_n' und die gespiegelten Rechtecke der Obersumme von x^2 zu Z_n füllen zusammen das Einheitsquadrat, ohne sich zu überlappen (bis auf Randstrecken). Im Grenzwert ist $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_0^1 x^2\, dx = 1$, in Übereinstimmung mit $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$.

Lösung R2. (a) Mit $x_k = \frac{k^2}{n^2}$, $k = 0, \dots, n$, ist Z_n' eine Zerlegung von $[0, 1]$ mit $\Delta x_k = \frac{2k-1}{n^2}$. Ihre Feinheit ist $\Delta x_n = \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2}{n}$, strebt also gegen 0. Mit den rechten Endpunkten $\xi_k = x_k$ als Zwischenstellen ist die gegebene Summe die Riemannsche Summe

$$S(\exp, Z_n', \xi) = \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\, \Delta x_k.$$

Die Exponentialfunktion ist stetig (Satz 9.8), also integrierbar (Satz 12.9). Nach Satz 12.17 (Bemerkung „Gebrauch“) konvergiert die Folge gegen $\int_0^1 e^x\, dx = e - 1$ (Beispiel 2). Numerisch: Für $n = 10, 100, 1000$ hat die Summe die Werte 1,846 …, 1,730 …, 1,719 …; es ist $e - 1 = 1{,}718\ldots$ Die Aufgabe braucht Satz 12.17 für nicht äquidistante Zerlegungen; die Formel für äquidistante Zerlegungen in der Bemerkung „Gebrauch“ genügt hier nicht.

(b) Es ist $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+k/n}$, die Riemannsche Summe der stetigen Funktion $\frac{1}{x}$ auf $[2, 3]$ zur äquidistanten Zerlegung $x_k = 2 + \frac{k}{n}$ mit den rechten Endpunkten als Zwischenstellen. Nach Satz 12.17 (Bemerkung „Gebrauch“), Satz 12.22 (1), Beispiel 3 des Kapitels und Satz 9.13 (1) ist der Grenzwert

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \int_1^3 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \approx 0{,}405.$$

Zur Kontrolle: Für $n = 10$ hat die Summe den Wert 0,397 …; weil $\frac{1}{x}$ fällt, ist sie eine Untersumme von $\frac{1}{x}$ auf $[2, 3]$ und liegt deshalb unter dem Grenzwert.

Lösung R3. (a) Nach Beispiel 1 ist $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$. Gesucht ist $\xi \in [0,b]$ mit $\xi^2 b = \frac{b^3}{3}$, also $\xi = \frac{b}{\sqrt{3}}$; es gibt genau eine solche Stelle.

(b) Nach Beispiel 1 ist $\int_0^1 x^2 \cdot x\,dx = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$ und $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. Gesucht ist $\xi \in [0,1]$ mit $\xi^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, also $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; wegen $\xi \geq 0$ ist das die einzige Stelle.

(c) $\int_0^1 x \cdot x\,dx = \frac{1}{3}$, also $\xi \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ und $\xi = \frac{2}{3}$; das ist die einzige Stelle. Der gewichtete Mittelwert von x bezüglich des Gewichts x liegt rechts von $\frac{1}{2}$, weil das Gewicht große Werte bevorzugt.

Lösung R4. Die Funktion e^{x^2} ist stetig (Satz 9.8, Satz 7.11), also integrierbar. Für $x \in [0,1]$ ist $t = x^2 \in [0,1]$.

Untere Schranke: $e^t \geq 1 + t$ (Satz 9.7 (2), auch Folgerung 11.25 (1)) gibt $e^{x^2} \geq 1 + x^2$, nach Satz 12.10 und Beispiel 1 also $\int_0^1 e^{x^2}\,dx \geq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Obere Schranke: Die Exponentialfunktion ist konvex (Folgerung 11.16, denn $\exp'' = \exp > 0$ nach Satz 10.9). Definition 11.12 mit den Punkten 0 und 1 ergibt für $0 \leq t \leq 1$: $e^t = e^{(1-t)\cdot 0 + t\cdot 1} \leq (1-t)\cdot 1 + t \cdot e = 1 + (e-1)t$; der Graph liegt also unter der Sehne (so auch Folgerung 11.25 (1)). Damit ist $e^{x^2} \leq 1 + (e-1)x^2$ und

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq 1 + \frac{e-1}{3} = \frac{e+2}{3} \approx 1{,}573.$$

Verbesserung: Für $t \geq 0$ ist $e^t \geq 1 + t + \frac{t^2}{2}$ (Folgerung 11.25 (2)). Direkt: Für $t > 0$ ist nach Folgerung 11.4 (Lagrange) mit $n = 2$ und Entwicklungspunkt 0 der Rest $\frac{e^\tau}{6} t^3$ mit einem $\tau \in (0,t)$ nichtnegativ; für $t = 0$ gilt Gleichheit. Also ist $e^{x^2} \geq 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$, und mit $\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5}$ (Beispiel 1) folgt

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \geq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{43}{30} \approx 1{,}433.$$

(Der wahre Wert ist 1,4627 ...; das ist eine numerische Angabe, kein Beweis.)

Lösung R5. Die Funktion $\lfloor x \rfloor$ ist auf $[0,1)$ gleich 0, auf $[1,2)$ gleich 1, auf $[2,3)$ gleich 2 und $\lfloor 3 \rfloor = 3$. Sie ist eine Treppenfunktion zur Zerlegung $\{0,1,2,3\}$ (Definition 12.24); nach der Formel nach Definition 12.24 (die Werte an den Stellen $1,2,3$ spielen nach Folgerung 12.16 keine Rolle) ist

$$\int_0^3 \lfloor x \rfloor\,dx = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

Auf $[k, k+1]$ stimmt $x-\lfloor x\rfloor$ bis auf den Punkt $k+1$ mit $x-k$ überein. Mit Folgerung 12.16, Satz 12.10 und $\int_k^{k+1} x\,dx = \frac{(k+1)^2-k^2}{2}$ (Beispiel 1) ist

$$\int_k^{k+1} (x - \lfloor x\rfloor)\,dx = \frac{2k+1}{2} - k = \frac{1}{2},$$

also nach Satz 12.11 $\int_0^3 (x - \lfloor x\rfloor)\,dx = \frac{3}{2}$.

Lösung B1. Nach Folgerung 12.13 sind f^2, g^2 und fg integrierbar. Setze $A = \int f^2$, $B = \int fg$, $C = \int g^2$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $(f+tg)^2 \geq 0$, nach Satz 12.10 also

$$0 \leq \int_a^b (f+tg)^2 = A + 2tB + t^2C.$$

Ist $C > 0$, so ergibt $t = -\frac{B}{C}$ die Ungleichung $0 \leq A - \frac{B^2}{C}$, also $B^2 \leq AC$. Ist $C = 0$, so gilt $0 \leq A + 2tB$ für alle t; wäre $B \neq 0$, so wäre die rechte Seite für $t = -\frac{A+1}{2B}$ gleich -1. Also ist $B = 0$, und $B^2 \leq AC$ gilt ebenfalls.

Lösung B2. (a) $h = g-f$ ist stetig, $h \geq 0$ und nicht identisch null. Nach Folgerung 12.19 ist $\int h \neq 0$, wegen $h \geq 0$ also $\int h > 0$, und nach Satz 12.10 ist $\int g - \int f = \int h > 0$.

(b) Sei $|f| \leq K$ (Satz 8.16) und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta \in (0,1)$ mit $K\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Nach Satz 12.11, Folgerung 12.13 (1) und Satz 12.18 (1) ist

$$\Big|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\Big| \leq \int_0^{1-\delta} x^n |f(x)|\,dx + \int_{1-\delta}^1 x^n |f(x)|\,dx \leq K(1-\delta)^n + K\delta.$$

Wegen $0 < 1-\delta < 1$ ist $(1-\delta)^n \to 0$ (Satz 4.4 (2); eine ausdrückliche Schranke gibt Einheit 1, Beispiel 3 in Abschnitt 1.11); für großes n ist $K(1-\delta)^n < \frac{\varepsilon}{2}$, und der Betrag des Integrals ist kleiner als ε. Das Gewicht x^n ist nur nahe bei 1 groß, und dort ist das Intervall kurz.

Lösung B3. (a) Lemma 12.23 mit $f = h$ auf $[-c, c]$, $\lambda = -1$ und Verschiebung 0 gibt $J = [-c, c]$ und für $\alpha = 0$, $\beta = c$

$$\int_0^c h(-t)\,dt = \frac{1}{-1}\int_0^{-c} h = \int_{-c}^0 h.$$

Ist h ungerade, so ist $h(-t) = -h(t)$, also $\int_{-c}^0 h = \int_0^c h(-t)\,dt = -\int_0^c h$ (Satz 12.10), und nach Satz 12.11 ist $\int_{-c}^c h = \int_{-c}^0 h + \int_0^c h = 0$. Ist h gerade, so ist $\int_{-c}^0 h = \int_0^c h$ und $\int_{-c}^c h = 2\int_0^c h$.

(b) Durch Induktion folgt $f(x+kp) = f(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$; wegen $f(x) = f\big((x-p)+p\big) = f(x-p)$ gilt das auch für negative ganze k.

Integrierbarkeit. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wende Lemma 12.23 auf die Einschränkung von f auf $[0,p]$ mit $\lambda = 1$ und $\varphi(t) = t - kp$ an. Dann ist $J = [kp,(k+1)p]$, und für $t \in J$ ist $f(\varphi(t)) = f(t-kp) = f(t)$. Also ist f auf $[kp,(k+1)p]$ integrierbar mit $\int_{kp}^{(k+1)p} f = \int_0^p f$. Zu $\alpha < \beta$ wähle nach Lemma 2.30 ganze Zahlen $k_0 = \lfloor \frac{\alpha}{p} \rfloor$ und $k_1 = \lfloor \frac{\beta}{p} \rfloor + 1$; dann ist $k_0 p \le \alpha < \beta < k_1 p$. Dabei ist f auf $\mathbb{R}$ beschränkt: Ist $|f| \le K$ auf $[0,p]$ und $x \in \mathbb{R}$, so liegt $x - kp$ mit $k = \lfloor \frac{x}{p} \rfloor$ in $[0,p)$, also ist $|f(x)| = |f(x-kp)| \le K$. Nach Satz 12.11 (Induktion über die Anzahl der Stücke) ist f daher auf $[k_0 p, k_1 p]$ integrierbar, also auch auf dem Teilintervall $[\alpha,\beta]$.

Formel. Sei $k = \lfloor \frac{\alpha}{p} \rfloor$, also $kp \le \alpha < (k+1)p \le \alpha + p < (k+2)p$. Lemma 12.23, angewandt auf die Einschränkung von f auf $[kp,(k+2)p]$ mit $\lambda = 1$ und $\varphi(t) = t + p$, gibt $J = [(k-1)p,(k+1)p]$ und für $kp, \alpha \in J$

$$\int_{kp}^{\alpha} f(t+p)\,dt = \int_{(k+1)p}^{\alpha+p} f.$$

Links steht wegen $f(t+p) = f(t)$ das Integral $\int_{kp}^{\alpha} f$. Mit Satz 12.22 (1) folgt

$$\int_{\alpha}^{\alpha+p} f = \int_{\alpha}^{(k+1)p} f + \int_{(k+1)p}^{\alpha+p} f = \int_{\alpha}^{(k+1)p} f + \int_{kp}^{\alpha} f = \int_{kp}^{(k+1)p} f = \int_0^p f.$$

Lösung B4. f ist beschränkt durch 1. Für $x \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ist $k \le \frac{1}{x} < k+1$, also $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = k$ und $f(x) = (-1)^k$. Sei $0 < c < 1$. Auf $[c,1]$ ist f höchstens an den endlich vielen Stellen $\frac{1}{k} \ge c$ unstetig, sonst lokal konstant und damit stetig. Nach Satz 12.15 ist f auf $[c,1]$ integrierbar, für jedes $c \in (0,1)$, und nach Lemma 12.14 auf $[0,1]$. Unstetig ist f an allen Stellen $\frac{1}{k}$ mit $k \ge 2$ (dort springt der Wert zwischen ± 1) und an der Stelle 0 (in jeder Umgebung kommen die Werte 1 und -1 vor).

Reihendarstellung: Auf $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ ist $f = (-1)^k$ bis auf den linken Endpunkt. Nach Satz 12.11 und Folgerung 12.16 ist für $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{1/(N+1)}^{1} f = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

Wegen $|f| \le 1$ ist $\big|\int_0^{1/(N+1)} f\big| \le \frac{1}{N+1} \to 0$ (Satz 12.22 (3)), und nach Satz 12.11 ist $\int_0^1 f = \int_0^{1/(N+1)} f + \int_{1/(N+1)}^1 f$. Also

$$\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

Die Reihe konvergiert absolut. Ihren Wert erhält man aus $\ln 2 = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (Satz 11.10 (4) mit $x = 1$). Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ und weil beide Teilreihen konvergieren (Satz 6.3), ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = -\ln 2 - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = -\ln 2 - (\ln 2 - 1) = 1 - 2\ln 2 \approx -0{,}386.$$

Lösung B5. (a) Das ist der Kern des Beweises von Folgerung 12.19, ohne die Voraussetzung $f \geq 0$. Angenommen, $f(x_0) \neq 0$, etwa $f(x_0) > 0$ (sonst betrachte $-f$). Wie im Beweis von Folgerung 12.19 gibt es $c < d$ in $[a, b]$ und $\eta > 0$ mit $f \geq \eta$ auf $[c, d]$, also $\int_c^d f \geq \eta(d - c) > 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) Wähle $g = f$. Dann ist f^2 stetig, $f^2 \geq 0$ und $\int_a^b f^2 = 0$. Nach Folgerung 12.19 ist $f^2 = 0$, also $f = 0$.

Lösung V1. Nach Lemma 8.11, Satz 8.16 und Satz 8.21 ist φ auf $[m, M]$ beschränkt, etwa $|\varphi| \leq C$ mit $C > 0$, und gleichmäßig stetig. (Ist $m = M$, so ist f konstant und $\varphi \circ f$ ebenfalls; sei also $m < M$.) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\eta > 0$ so, dass aus $s, t \in [m, M]$ und $|s - t| < \eta$ folgt $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Nach Satz 12.6 gibt es eine Zerlegung Z mit

$$O(f, Z) - U(f, Z) < \frac{\eta\,\varepsilon}{4C}.$$

Seien m_k, M_k die Infima und Suprema von f und m_k^*, M_k^* die von $\varphi \circ f$ auf den Teilintervallen. Wir teilen die Indizes k in zwei Sorten.

Gute k mit $M_k - m_k < \eta$: Für x, y im Teilintervall ist $|f(x) - f(y)| \leq M_k - m_k < \eta$, also $|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; nach Lemma 12.7 ist $M_k^* - m_k^* \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Schlechte k mit $M_k - m_k \geq \eta$: Hier ist nur $M_k^* - m_k^* \leq 2C$ bekannt. Aber ihre Gesamtlänge ist klein:

$$\eta \sum_{k \text{ schlecht}} \Delta x_k \leq \sum_k (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\eta\,\varepsilon}{4C}, \qquad \text{also} \qquad \sum_{k \text{ schlecht}} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Zusammen:

$$O(\varphi \circ f, Z) - U(\varphi \circ f, Z) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a) + 2C \sum_{k \text{ schlecht}} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nach Satz 12.6 ist $\varphi \circ f$ integrierbar.

Vergleich mit (G6). Dort ist φ an der Stelle 0 unstetig, und genau diese Stelle nimmt T auf den Irrationalzahlen an. Der Beweis bricht bei den guten Teilintervallen ab: Kleine Schwankung von f zieht dort keine kleine Schwankung von $\varphi \circ f$ nach sich.

Lösung V2. *Unterintegral.* Jedes Teilintervall enthält eine irrationale Zahl (G1), und $f \geq 0$; also ist $m_k = 0$ und $U(f, Z) = 0$ für jede Zerlegung. Das Unterintegral ist 0.

Oberintegral. Auf $[x_{k-1}, x_k]$ ist $f(x) \leq x \leq x_k$. Umgekehrt gibt es nach der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.31) zu jedem $\eta > 0$ eine rationale Zahl r mit $\max(x_{k-1}, x_k - \eta) < r < x_k$, und $f(r) = r > x_k - \eta$. Also ist $M_k = x_k$ und

$$O(f, Z) = \sum_k x_k \, \Delta x_k = O(\mathrm{id}, Z),$$

die Obersumme der Funktion $\mathrm{id}(x) = x$. Deren Infimum über alle Z ist $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$ (Satz 12.8 und Beispiel 1). Das Oberintegral von f ist $\frac{1}{2}$, das Unterintegral 0; f ist nicht integrierbar. (Stetig ist f nur im Punkt 0; das folgt aus $|f(x)| \leq |x|$ und der Dichtheit der rationalen und der irrationalen Zahlen.)

Lösung V3. (a) Für ein Intervall $J = [u, v]$ mit $u < v$ schreiben wir $\omega(J) = \sup_J f - \inf_J f$. Wir konstruieren Intervalle $J_n = [s_n, t_n]$ mit $s_n < t_n$ und

$$J_0 \subseteq (c, d), \qquad J_n \subseteq (s_{n-1}, t_{n-1}), \qquad \omega(J_n) < \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

Sei $J_0 = \left[c + \frac{d-c}{4}, \, d - \frac{d-c}{4}\right]$. Ist J_{n-1} konstruiert und $\ell = t_{n-1} - s_{n-1} > 0$, so ist f auf J_{n-1} integrierbar (Satz 12.11, höchstens zweimal angewandt), und nach Satz 12.6 gibt es eine Zerlegung Z von J_{n-1} mit $O(f, Z) - U(f, Z) < \frac{\ell}{n}$. Wäre $M_k - m_k \geq \frac{1}{n}$ für jedes Teilintervall von Z, so wäre

$$O(f, Z) - U(f, Z) = \sum_k (M_k - m_k) \Delta x_k \geq \frac{1}{n} \, \ell,$$

ein Widerspruch. Also gibt es ein Teilintervall $[u, v]$ von Z, $u < v$, mit $\omega([u, v]) < \frac{1}{n}$. Setze $J_n = \left[u + \frac{v-u}{4}, \, v - \frac{v-u}{4}\right]$. Dann ist $J_n \subseteq (u, v) \subseteq (s_{n-1}, t_{n-1})$, denn $s_{n-1} \leq u$ und $v \leq t_{n-1}$. Wegen $J_n \subseteq [u, v]$ ist $\sup_{J_n} f \leq \sup_{[u,v]} f$ und $\inf_{J_n} f \geq \inf_{[u,v]} f$, also $\omega(J_n) \leq \omega([u, v]) < \frac{1}{n}$.

Die J_n sind nichtleer, kompakt (Lemma 8.11) und geschachtelt. Nach dem Cantorschen Durchschnittssatz (Folgerung 8.14) gibt es ein x_0, das in allen J_n liegt; wegen $x_0 \in J_0$ ist $x_0 \in (c, d)$. Die Längen der J_n werden dabei nicht kontrolliert; Folgerung 8.14 braucht das nicht.

f ist in x_0 stetig (Definition 7.9): Sei $\varepsilon > 0$ und n mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (Satz 2.29). Wegen $x_0 \in J_{n+1} \subseteq (s_n, t_n)$ ist $\delta = \min(x_0 - s_n, \, t_n - x_0) > 0$. Für $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ liegen x und x_0 in J_n, nach Lemma 12.7 also

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \omega(J_n) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(b) Wäre die Dirichlet-Funktion χ auf $[0,1]$ integrierbar, so hätte sie nach (a) eine Stetigkeitsstelle $x_0 \in (0,1)$. Nach (G1) enthält aber jedes Intervall um x_0 rationale und irrationale Punkte von $[0,1]$, also Punkte x mit $|\chi(x) - \chi(x_0)| = 1$; χ ist in x_0 nicht stetig. Für die Thomaesche Funktion sind die Stetigkeitsstellen nach (G3) genau die irrationalen Punkte von $[0,1]$. Sie liegen in jedem Intervall (c,d), wie (a) es verlangt.

Lösung V4. (a) Nach Satz 11.14 (3) ist φ auf dem offenen Intervall I stetig, also ist $\varphi \circ f$ stetig (Satz 7.11) und nach Satz 12.9 integrierbar; ebenso f. Nach Lemma 8.11 und Satz 8.16 gibt es $m = \min f$ und $M = \max f$; beide sind Werte von f, liegen also in I, und weil I ein Intervall ist, gilt $[m,M] \subseteq I$.

Sei $h = \frac{b-a}{n}$, $\xi_k = a + kh$ und

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k), \qquad t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\big(f(\xi_k)\big).$$

Das sind die Riemannschen Summen zur äquidistanten Zerlegung mit den rechten Endpunkten, geteilt durch $b-a$; nach Satz 12.17 (Bemerkung „Gebrauch“) und Satz 4.9 gilt $s_n \to \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ und $t_n \to \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f$. Die Ungleichung von Jensen (Satz 11.17) mit $\lambda_k = \frac{1}{n}$ und den Punkten $f(\xi_k) \in I$ gibt $s_n \in I$ und

$$\varphi(s_n) \le t_n \qquad \text{für jedes } n.$$

Nach Satz 12.18 (1) ist $m \le \mu \le M$, also $\mu \in I$. Da φ in μ stetig ist, folgt $\varphi(s_n) \to \varphi(\mu)$ (Folgenkriterium, Satz 7.10). Nach Satz 4.10 bleibt die Ungleichung im Grenzwert erhalten: $\varphi(\mu) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi \circ f$.

(b) Mit $I = \mathbb{R}$, $\varphi = \exp$ (konvex nach Folgerung 11.16) und $f(x) = x$ auf $[0,1]$ ist $\mu = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (Beispiel 1) und $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$ (Beispiel 2), also $e^{1/2} \le e - 1$. Numerisch: $1{,}6487\ldots \le 1{,}7182\ldots$

Mit $\varphi(t) = t^2$ (konvex nach Folgerung 11.16, denn die zweite Ableitung ist $2 \ge 0$) folgt $\big(\frac{1}{b-a}\int f\big)^2 \le \frac{1}{b-a}\int f^2$, nach Multiplikation mit $(b-a)^2$ die Behauptung. Das ist B1 mit $g = 1$, denn $\int_a^b 1^2 = b - a$. Jensen liefert diesen Spezialfall hier nur für stetiges f; B1 gilt für alle integrierbaren f.

Bemerkung. Der Beweis benutzt die Stetigkeit von f nur, damit $\varphi \circ f$ integrierbar ist und $[m,M]$ in I liegt. Ist f nur integrierbar, aber mit Werten in einem Intervall $[m',M'] \subseteq I$, so ist φ auf $[m',M']$ stetig, $\varphi \circ f$ nach V1 integrierbar, und der Beweis läuft mit $[m',M']$ statt $[m,M]$ unverändert.

Lösung V5. Wegen $f > 0$ ist $\int_a^b f \geq 0$ (Satz 12.10 (3)). Angenommen, $\int_a^b f = 0$. Für jedes Intervall $J = [c, d] \subseteq [a, b]$ mit $c < d$ ist dann nach Satz 12.22 (1) und $f \geq 0$ auch $0 \leq \int_J f \leq \int_a^b f = 0$. Für ein Intervall J bezeichne $|J|$ seine Länge.

Wir konstruieren Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$, $I_0 = [a, b]$, $I_n \subseteq I_{n-1}$, $|I_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$ und $f < \frac{1}{n}$ auf I_n für $n \geq 1$. Ist I_{n-1} konstruiert, so ist $\int_{I_{n-1}} f = 0$; nach Definition des Oberintegrals als Infimum gibt es eine Zerlegung Z von I_{n-1} mit $O(f, Z) < \frac{|I_{n-1}|}{n}$. Nach Lemma 12.3 dürfen wir den Mittelpunkt von I_{n-1} zu Z hinzunehmen, ohne dass $O(f, Z)$ wächst; dann ist jedes Teilintervall höchstens halb so lang wie I_{n-1}. Wäre $M_k \geq \frac{1}{n}$ für alle Teilintervalle, so wäre $O(f, Z) \geq \frac{1}{n}|I_{n-1}|$. Also gibt es ein Teilintervall mit $M_k < \frac{1}{n}$; es sei I_n. Dann ist $f < \frac{1}{n}$ auf I_n und $|I_n| \leq \frac{|I_{n-1}|}{2} \leq \frac{b-a}{2^n}$.

Es gilt $a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1}$, und $0 < b_n - a_n \leq (b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (Satz 4.4 (2), Satz 4.11). Die I_n bilden also eine Intervallschachtelung im Sinn von Definition 5.5. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Folgerung 5.15 (3)) gibt es ein x_0, das in allen I_n liegt. Dann ist $f(x_0) < \frac{1}{n}$ für jedes n, nach Satz 2.29 also $f(x_0) \leq 0$, im Widerspruch zu $f > 0$.

Bemerkung. Ohne die Halbierung müssten die Längen der I_n nicht gegen 0 gehen, und das Intervallschachtelungsprinzip wäre nicht anwendbar; dann hilft der Cantorsche Durchschnittssatz (Folgerung 8.14) wie in V3. Ein einfacheres Argument mit Stetigkeit (Folgerung 12.19) steht nicht zur Verfügung. Mit Aufgabe V3 gibt es einen zweiten Weg: f hat eine Stetigkeitsstelle $x_0 \in (a, b)$, und dort ist $f \geq \frac{f(x_0)}{2}$ auf einem Intervall positiver Länge (Lemma 7.13).

EINHEIT 13

Hauptsatz und Integrationstechnik

Leitfrage

In Einheit 12 kostete $\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$ eine Aussage über das Wachstum von $\sum_{j=1}^n j^k$ und einen Grenzübergang (Beispiel 1 dort), $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$ die geometrische Summe und $\int_1^c \frac{dx}{x} = \ln c$ die Streckungsregel und eine Einschließung. Die Ergebnisse dagegen sind leicht zu erraten: $\frac{b^{k+1}}{k+1}$ ist der Wert von $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ an der Stelle b, und $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ ist eine Funktion, deren Ableitung x^k ist; e^x ist seine eigene Ableitung, und ln hat die Ableitung $\frac{1}{x}$. **Warum lässt sich ein Grenzwert von Rechtecksummen durch eine Funktion ausrechnen, deren Ableitung der Integrand ist?** Das beantwortet der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er macht aus jeder Ableitungsregel eine Integrationsregel.

Die zweite Hälfte der Einheit benutzt diese Technik für eine Frage, die mit Integralen zunächst nichts zu tun hat: **Wie groß ist n!?** Die Zahl 100! hat 158 Stellen; sie direkt auszurechnen ist mühsam, ihre Größenordnung abzuschätzen ist mit Integralen leicht. Am Ende steht die Stirlingsche Formel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

vollständig bewiesen, mit einer ausdrücklichen Fehlerschranke.

Voraussetzungen. Einheit 12 mit allen Sätzen, insbesondere Integrale mit beliebiger Lage der Grenzen (Definition 12.21, Satz 12.22) und die affine Variablentransformation (Lemma 12.23). Ferner: die geometrische Summe (Satz 1.13); Supremum und Supremumseigenschaft (Definition 2.10, Satz 2.34); der ganze Teil $\lfloor x \rfloor$ (Lemma 2.30); aus Einheit 4 die Nullfolge (q^n) für $|q| < 1$, die Rechenregeln, die Erhaltung von Ungleichungen, die Einschließung, die Wurzelgrenzwerte, das Monotonieprinzip und die Irrationalität von e (Satz 4.4 (2), Satz 4.9 bis 4.12, Satz 4.16, Satz 4.21); aus Einheit 6 das Nullfolgenkriterium, die harmonische Reihe, der Verdichtungssatz mit Folgerung 6.12 und das Leibniz-Kriterium (Folgerung 6.5, Satz 6.6, Satz 6.11, Satz 6.16); aus Einheit 7 Grenzwerte von Funktionen einschließlich einseitiger Grenzwerte und $x \to \pm\infty$ (Satz 7.5, Satz 7.6, Definition 7.7, Lemma 7.8), der Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16), Satz 7.22,

Satz 7.25, Einschränkung und Lokalität (Lemma 7.28) sowie Endpunkte und innere Punkte (Definition 7.29); der Satz vom Maximum (Satz 8.16); aus Einheit 9 $e^t \geq 1 + t$ (Satz 9.7 (2)), Satz 9.8 ($e^x \to \infty$, $e^x \to 0$ für $x \to \pm\infty$), $e^t \geq \frac{t^m}{m!}$ für $t \geq 0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ (Satz 9.11), $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ (Satz 9.13 (2)), $\ln x \to \infty$ (Folgerung 9.14), Potenzen (Definition 9.15, Satz 9.17 und der Absatz danach), $\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$ und $x^\alpha \ln x \to 0$ (Satz 9.19), $\frac{\sin x}{x} \to 1$ (Folgerung 9.25 (3)), die Additionstheoreme (Satz 9.22), Verschiebungen und Nullstellen von Sinus und Kosinus (Satz 9.28, Satz 9.29), Tangens und Arkustangens (Satz 9.31) sowie $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Abschnitt 9.9, Beispiel 5); aus Einheit 10 Definition 10.1 mit dem Absatz danach, Folgerung 10.3 und die Bemerkung über Lokalität danach, Definition 10.4, die Ableitungsregeln (Satz 10.5 bis 10.7), die Ableitungen von exp, ln, x^α, sin und cos (Satz 10.9, Satz 10.10), der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz und der Satz von Darboux (Satz 10.13, 10.14, 10.17) mit Folgerung 10.15, die Ableitungen der Arkusfunktionen (Folgerung 10.19) und die Regel von de l'Hospital (Satz 10.20); aus Einheit 11 Folgerung 11.4, Satz 11.10, Folgerung 11.16 und Folgerung 11.25. Wie in Einheit 10 bezeichnen I und J stets Intervalle im Sinn von Abschnitt 2.2, die mehr als einen Punkt enthalten, auch unbeschränkte; Endpunkte und innere Punkte sind wie in Definition 7.29 erklärt. Die Nummern 13.22 bis 13.24 stehen in Abschnitt 13.5.

13.1 Integralfunktion und Stammfunktion

Definition 13.1. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von f (auf I). Differenzierbar ist im Sinn von Definition 10.1 gemeint; in einem Endpunkt, der zu I gehört, ist F' also nach dem Absatz nach Definition 10.1 die einseitige Ableitung, ohne dass das eigens vereinbart werden muss.

Beispiele. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist Stammfunktion von x^n auf $\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}_0$); $-\cos$ von sin; $\ln x$ von $\frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ und $\ln(-x)$ von $\frac{1}{x}$ auf $(-\infty, 0)$; arctan von $\frac{1}{1+x^2}$. Jede Ableitungsformel aus Einheit 10, von rechts nach links gelesen, ist eine Aussage über Stammfunktionen.

Satz 13.2 (Eindeutigkeit bis auf Konstanten). Sind F und G Stammfunktionen von f auf einem Intervall I, so ist $F - G$ konstant. Umgekehrt ist mit F auch $F + C$ für jede Konstante C eine Stammfunktion.

Beweis. $F - G$ ist differenzierbar, nach Folgerung 10.3 also stetig, und $(F - G)' = 0$ auf I. Nach Folgerung 10.15 (1) ist $F - G$ konstant. Die Umkehrung ist klar. □

Dass I ein Intervall ist, wird gebraucht: Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $\ln|x|$ und die Funktion, die für $x > 0$ gleich $\ln x$ und für $x < 0$ gleich $\ln(-x) + 1$ ist, beides Stammfunktionen von $\frac{1}{x}$, und ihre Differenz ist nicht konstant.

Satz 13.3 (Integralfunktion). Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $|f| \le K$, und sei

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \le x \le b).$$

1. Für alle $x, y \in [a,b]$ ist $|F(x) - F(y)| \le K|x-y|$; insbesondere ist F stetig.
2. Ist f im Punkt $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweisidee. Der Differenzenquotient $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ ist der Mittelwert von f auf dem Intervall zwischen x_0 und $x_0 + h$. Ist f bei x_0 stetig, so liegt dieser Mittelwert nahe bei $f(x_0)$.

Beweis. (1) Für $x < y$ ist $F(y) - F(x) = \int_x^y f$ nach Satz 12.11, und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 12.18 (1)) liegt dieses Integral zwischen $-K(y-x)$ und $K(y-x)$.

(2) Für $h \neq 0$ mit $x_0 + h \in [a,b]$ ist $f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$ (Satz 12.22 (2)), also nach der Dreipunkteregel (Satz 12.22 (1))

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $t \in [a,b]$ mit $|t - x_0| < \delta$. Für $0 < |h| < \delta$ liegen alle t zwischen x_0 und $x_0 + h$ in diesem Bereich. Nach Satz 12.18 (1), angewandt auf $f - f(x_0)$ auf dem Intervall mit den Endpunkten x_0 und $x_0 + h$ mit $m = -\varepsilon$ und $M = \varepsilon$, ist der Betrag des Integrals rechts höchstens $\varepsilon|h|$, der Betrag der rechten Seite also höchstens ε. □

13.2 Der Hauptsatz

Satz 13.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

1. Sei I ein Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f auf I.
2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar mit $F' = f$ auf (a,b). Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweisidee zu 2. Man zerlegt $F(b) - F(a)$ in die Zuwächse auf den Teilintervallen einer Zerlegung. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist jeder Zuwachs gleich $f(\xi_k)\Delta x_k$; die Summe ist eine Riemannsche Summe und liegt zwischen Unter- und Obersumme.

Beweis. (1) Sei $x \in I$. Wähle ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq I$ mit $\alpha < \beta$, das a und x enthält und, wenn x innerer Punkt von I ist, x im Inneren. Auf $[\alpha, \beta]$ ist f stetig und daher integrierbar (Satz 12.9), und nach der Dreipunkteregel (Satz 12.22 (1) mit dem Absatz danach) ist $F(y) = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^y f$ für $y \in [\alpha, \beta]$. Nach Satz 13.3 (2) ist $F|_{[\alpha,\beta]}$ in x differenzierbar mit Ableitung $f(x)$. Ist x innerer Punkt von I, so ist er innerer Punkt von $[\alpha, \beta]$; ist x ein Endpunkt von I, so ist $I \cap B_r(x) \subseteq [\alpha, \beta]$ für ein $r > 0$, weil I auf der anderen Seite von x keine Punkte hat. In beiden Fällen gilt nach der Bemerkung über Lokalität nach Folgerung 10.3 dasselbe für F, also $F'(x) = f(x)$.

(2) Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Auf jedem $[x_{k-1}, x_k]$ ist F stetig und im Inneren differenzierbar; nach dem Mittelwertsatz (Satz 10.14) gibt es $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit $F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)\Delta x_k$. Durch Teleskopsumme folgt

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

und das liegt zwischen $U(f, Z)$ und $O(f, Z)$. Da Z beliebig war, liegt $F(b)-F(a)$ zwischen Unter- und Oberintegral, und die sind gleich, weil f integrierbar ist (Definition 12.5). Also ist $F(b) - F(a) = \int_a^b f$. □

Teil 2 verlangt nicht, dass f stetig ist; er verlangt aber, dass f integrierbar ist. Dass eine Ableitung nicht integrierbar zu sein braucht, zeigt (G1).

Folgerung 13.5. Ist f auf einem Intervall I stetig und F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b.$$

Beweis. Für $a < b$ ist f auf $[a, b]$ integrierbar (Satz 12.9) und F dort stetig (Folgerung 10.3); das ist Satz 13.4 (2). Für $a = b$ sind beide Seiten null, für $a > b$ wechseln beide das Vorzeichen (Definition 12.21). □

Integrieren heißt damit, eine Stammfunktion zu finden. Die Beispiele aus Einheit 12 werden zu Einzeilern:

$$\int_0^b x^k\,dx = \Big[\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big]_0^b = \frac{b^{k+1}}{k+1}, \qquad \int_a^b e^x\,dx = \big[e^x\big]_a^b = e^b - e^a, \qquad \int_1^c \frac{dx}{x} = \big[\ln x\big]_1^c = \ln c,$$

und ebenso $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_0^{\pi/2} = 1$. Der letzte Wert liegt zwischen den Schranken 0,785 und 1,234 aus Einheit 12, Beispiel 5.

Bemerkung (Schreibweise). Man schreibt $\int f(x)\,dx$ ohne Grenzen für „eine Stammfunktion von f“, etwa $\int \cos x\,dx = \sin x + C$. Das ist eine Aussage über eine Menge von Funktionen, keine Gleichung zwischen Zahlen; in diesem Kurs wird die Schreibweise nur in diesem Sinn benutzt.

Bemerkung (Grenzen der Technik). Nicht jede Stammfunktion einer elementaren Funktion ist elementar. Die Funktion e^{-x^2} ist stetig und hat nach Satz 13.4 eine Stammfunktion, aber keine, die sich aus Polynomen, exp, ln, trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrungen durch endlich viele Rechenoperationen und Verkettungen bilden lässt (Liouville; ohne Beweis, das gehört in die Differentialalgebra). Dasselbe gilt für $\frac{\sin x}{x}$ und $\frac{1}{\ln x}$. Solche Integrale behandelt man mit Abschätzungen, numerisch oder mit Reihen. Für den letzten Weg stellt Einheit 14 die gliedweise Integration von Potenzreihen bereit (Satz 14.21); angewandt auf die Exponentialreihe von e^{-t^2}, die für alle t konvergiert, ergibt sie $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Einheit 14 beweist das und schließt damit $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ zwischen 0,7467 und 0,7469 ein (Abschnitt 14.11, Beispiel 6).

13.3 Partielle Integration

Aus der Produktregel wird die partielle Integration. Wie in Definition 10.4 ist $C^1(I)$ die Menge der differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$ mit stetiger Ableitung; solche Funktionen heißen *stetig differenzierbar*, und $C^n(I)$ ist entsprechend erklärt.

Satz 13.6 (Partielle Integration). Sei I ein Intervall und $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Beweis. Nach der Produktregel (Satz 10.5) ist fg eine Stammfunktion der stetigen Funktion $(fg)' = f'g + fg'$. Nach Folgerung 13.5 und Satz 12.22 (2) ist $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = [fg]_a^b$. □

Die Regel lohnt sich, wenn f' einfacher ist als f und g nicht schwerer als g'.

Beispiele. (a) $\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e-1) = 1$.

(b) Mit $f = \ln$, $g(x) = x$ auf $(0,\infty)$: $\int_1^c \ln x\,dx = [x\ln x]_1^c - \int_1^c x \cdot \frac{1}{x}\,dx = c\ln c - c + 1$ für jedes $c > 0$. Dass $x\ln x - x$ eine Stammfunktion von ln auf $(0,\infty)$ ist, bestätigt man auch direkt: $(x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

(c) $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = [-\sin x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x)\,dx$, also $2\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi$ und $\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$. Hier tritt das gesuchte Integral auf beiden Seiten auf, und man löst nach ihm auf.

Dasselbe Auflösen trägt das folgende Lemma. Die Integrale $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ sind deshalb interessant, weil ihre Werte Quotienten von Fakultäten sind und der Faktor π nur bei geradem n auftritt. Vergleicht man gerade und ungerade Exponenten, so entsteht eine Beziehung zwischen Fakultäten und π; sie liefert in Abschnitt 13.8 die Konstante der Stirlingschen Formel.

Lemma 13.7 (Wallis-Integrale). Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Dann gilt:

1. $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ und $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ für $n \geq 2$.
2. $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ und $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. $I_n > 0$ und $I_{n+1} \leq I_n$.
4. $n\,I_n\,I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ für $n \geq 1$.

Beweis. (1) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$. Für $n \geq 2$ partiell mit $f = \sin^{n-1}$, $g = -\cos$:

$$I_n = \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1)\big(I_{n-2} - I_n\big),$$

denn der Randterm verschwindet ($\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin 0 = 0$) und $\cos^2 = 1 - \sin^2$. Auflösen ergibt $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

(2) Induktion über n. Für $n = 0$ lauten die Formeln $I_0 = \frac{\pi}{2}$ und $I_1 = 1$. Schritt mit (1): $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}$, und

$$\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2};$$

ebenso $I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1}$ und $\frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(3) Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist $0 \leq \sin x \leq 1$, also $\sin^{n+1} \leq \sin^n$, und nach Satz 12.10 ist $I_{n+1} \leq I_n$. Die stetige Funktion $\sin^n$ ist nichtnegativ und nicht identisch null, nach Folgerung 12.19 also $I_n > 0$.

(4) Für $n = 1$ ist $1 \cdot I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$. Für $n \geq 2$ ist nach (1) $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$; die Größe nI_nI_{n-1} hängt also nicht von n ab. □

Satz 13.8 (Wallis-Produkt). Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

Beweisidee. Die geraden Wallis-Integrale enthalten π, die ungeraden nicht. Wegen der Monotonie liegt I_{2n} zwischen zwei ungeraden Nachbarn, deren Quotient gegen 1 geht.

Beweis. Nach Lemma 13.7 (3) ist $I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1}$, also

$$1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n},$$

zuletzt nach Lemma 13.7 (1). Daher strebt $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ gegen 1 (Satz 4.11). Nach Lemma 13.7 (2) ist

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!\,(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{W_n} \qquad \text{mit} \qquad W_n = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!\,(2n+1)!}.$$

Also strebt W_n gegen $\frac{\pi}{2}$. Es ist $\prod_{k=1}^{n}(2k)^2 = 2^{2n}(n!)^2$ und $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \cdot \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ (Produkte der ungeraden Zahlen bis $2n-1$ beziehungsweise $2n+1$); der Quotient ist W_n, und $4k^2-1 = (2k-1)(2k+1)$. Das ist die erste Behauptung. Für die zweite ist

$$\Big(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\Big)^2 = \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2\,n} = W_n \cdot \frac{2n+1}{n} \to \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi,$$

und die Wurzel vertauscht mit dem Grenzwert (Satz 4.12 (1)). □

Das Produkt trägt den Namen von John Wallis. Die zweite Form besagt, dass der Quotient aus dem mittleren Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ und $\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ gegen 1 strebt; das ist ein Sonderfall der Stirlingschen Formel, und umgekehrt wird er in Abschnitt 13.8 deren Konstante liefern.

Satz 13.9 (Taylorformel mit Integralrestglied). Sei I ein Intervall, $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}(I)$ und $a, x \in I$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Beweis. Induktion über n. Für $n = 0$ ist das Folgerung 13.5: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'$. Gelte die Formel für $n-1$, und sei $f \in C^{n+1}(I)$; dann ist $f \in C^n(I)$, und $f^{(n)} \in C^1(I)$. Im Restglied $\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$ integrieren wir partiell in der Variablen t (Satz 13.6), mit

$g(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$, also $g'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$:

$$\int_a^x f^{(n)}(t)g'(t)\,dt = \Big[-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\Big]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Das ist der Summand $k = n$ und das neue Restglied. Da Satz 13.6 für beliebige Lage der Grenzen gilt, ist der Fall $x < a$ eingeschlossen. □

Bemerkung (Vergleich mit Einheit 11). Aus dem Integralrestglied folgen die beiden Formen aus Folgerung 11.4 noch einmal, hier unter der stärkeren Voraussetzung $f \in C^{n+1}(I)$. Sei $x \neq a$. Die Funktion $t \mapsto (x-t)^n$ hat zwischen a und x festes Vorzeichen. Der gewichtete Mittelwertsatz (Satz 12.18 (3), auf dem Intervall mit den Endpunkten a und x, bei negativem Gewicht auf $-(x-t)^n$ angewandt) gibt ein ξ in diesem abgeschlossenen Intervall mit

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

die Lagrange-Form. Wendet man stattdessen Satz 12.18 (2) auf die stetige Funktion $t \mapsto (x-t)^n f^{(n+1)}(t)$ an, so erhält man ein η im abgeschlossenen Intervall zwischen a und x mit

$$\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}(x-\eta)^n(x-a),$$

die Cauchy-Form. Für $x < a$ benutzt man in beiden Fällen $\int_a^x = -\int_x^a$ (Definition 12.21); die Vorzeichen heben sich auf beiden Seiten weg. Folgerung 11.4 sagt in zwei Hinsichten mehr: Sie liefert die Zwischenstellen echt zwischen a und x, und sie braucht keine Stetigkeit von $f^{(n+1)}$. Der Vorzug des Integralrestglieds liegt woanders. Es enthält keine unbekannte Zwischenstelle; man kann den Integranden direkt abschätzen und muss nicht vorher eine Restgliedform wählen. Aufgabe B2 nutzt das: Dort zeigt erst die Integralform, wie das Restglied von x abhängt, während die Lagrange-Form allein nur einen Wert $f^{(n+1)}(\xi)$ ohne obere Schranke liefert und auch zusammen mit der Monotonie von $f^{(n+1)}$ die Konvergenz nur auf dem halben Intervall ergibt.

13.4 Substitution

Aus der Kettenregel wird die Substitutionsregel.

Satz 13.10 (Substitutionsregel). Seien I und J Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \in C^1(J)$ mit $\varphi(J) \subseteq I$. Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in J$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f auf I (Satz 13.4 (1)). Nach der Kettenregel (Satz 10.6) ist $F \circ \varphi$ auf J differenzierbar mit $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\,\varphi'$, und diese Funktion ist stetig. Nach Folgerung 13.5, auf J und auf I angewandt, sind beide Seiten gleich $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$. □

Die Funktion φ braucht weder monoton noch injektiv zu sein, und α darf größer als β sein; φ muss nur ihre Werte in I haben, wo f stetig ist. Gelesen wird die Regel in beiden Richtungen.

Von links nach rechts erkennt man im Integranden die Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Für $\varphi \in C^1(J)$ ohne Nullstelle und $\alpha, \beta \in J$ ist etwa

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{dx}{x} = \ln\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(\alpha)},$$

denn φ hat nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) festes Vorzeichen, $\varphi(J)$ liegt in einer der beiden Halbgeraden, auf ihr ist $\ln|x|$ Stammfunktion von $\frac{1}{x}$, und $\varphi(\beta)/\varphi(\alpha) > 0$. Mit $\varphi = \cos$ auf $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $I = (0, \infty)$ folgt $\int_0^x \tan t\,dt = -\ln\cos x$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Lineare Substitutionen $\varphi(t) = \lambda t + c$ geben $\int_\alpha^\beta f(\lambda t + c)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda\alpha+c}^{\lambda\beta+c} f(x)\,dx$ für $\lambda \neq 0$; für integrierbares f ist das Lemma 12.23, hier für stetiges f ohne Zerlegungen.

Von rechts nach links ersetzt man x durch $\varphi(t)$. Ist $\varphi \in C^1(J)$ eine Bijektion von J auf ein Intervall $\varphi(J) \subseteq I$, das a und b enthält, so ist φ nach Satz 7.25 streng monoton, und man wählt $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$. Ist φ fallend und $a < b$, so ist $\beta < \alpha$; die Regel gilt unverändert.

Beispiel (Kreisfläche). $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ ist die Fläche eines Viertels des Einheitskreises. Mit $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ist $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ (denn $\cos t \geq 0$ dort, Satz 9.29) und $\varphi'(t) = \cos t$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2 s\,ds = I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Im vorletzten Schritt wurde $t = \frac{\pi}{2} - s$ substituiert ($\cos(\frac{\pi}{2} - s) = \sin s$ nach Satz 9.28 (2), und die Vertauschung der Grenzen hebt das Vorzeichen von $\varphi' = -1$ auf), im letz-

ten Lemma 13.7 benutzt. Versteht man, wie in Einheit 12, die Fläche unter einem Graphen als Integral, so ist $\frac{\pi}{4}$ die Fläche des Viertelkreises. Die Substitution $x = -t$ gibt $\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$, die obere Hälfte des Einheitskreises hat also die Fläche $\frac{\pi}{2}$. Rechnet man die Fläche zwischen zwei Graphen als Integral der Differenz, so hat der ganze Einheitskreis die Fläche $\int_{-1}^{1}\big(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2})\big)\,dx = \pi$. Die Zahl π, in Einheit 9 über die Nullstellen des Kosinus erklärt, ist also die Kreiszahl der Geometrie.

Bemerkung (rationale Funktionen). Jede rationale Funktion $\frac{p}{q}$ mit reellen Polynomen p, q lässt sich als Summe eines Polynoms und von Termen der Form $\frac{c}{(x-a)^k}$ und $\frac{cx+d}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}$ mit $\beta^2 < 4\gamma$ schreiben (*Partialbruchzerlegung*). Das ist ein Satz der Algebra, der den Fundamentalsatz der Algebra benutzt; er wird hier ohne Beweis angegeben. Für jeden dieser Terme findet man mit linearer Substitution, ln, arctan und, für $k \geq 2$, einer Rekursion aus partieller Integration eine elementare Stammfunktion; auch das wird hier nicht ausgeführt. Im einfachsten Fall rechnet man die Zerlegung direkt nach, zum Beispiel

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big), \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\Big[\ln\frac{x-1}{x+1}\Big]_2^3 = \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

13.5 Uneigentliche Integrale

Das Riemann-Integral verlangt ein kompaktes Intervall und eine beschränkte Funktion. Beides lässt sich durch einen Grenzübergang abschwächen. Zwei Anlässe führen darauf: Funktionen wie $\frac{1}{\sqrt{x}}$, die bei einem Endpunkt unbeschränkt werden, und Integrale über eine Halbgerade, wie sie die Gammafunktion in Abschnitt 13.7 braucht, um $n!$ als Integral zu schreiben.

Definition 13.11. Sei I ein Intervall mit den Endpunkten $a < b$ in $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 7.29). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn sie auf jedem Intervall $[c,d] \subseteq I$ mit $c < d$ integrierbar ist (Definition 12.20); das gilt nach Satz 12.9 für jede stetige Funktion. Ein Endpunkt von I, der nicht zu I gehört, heißt *kritische Stelle*.

1. Sei $I = [a,b)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und f lokal integrierbar. Existiert der Grenzwert $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\,dx$ in $\mathbb{R}$ (für $b = \infty$ ist $\lim_{c\to\infty}$ gemeint; beides nach Definition 7.7), so heißt das *uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent*, und der Grenzwert wird so bezeichnet; andernfalls heißt es *divergent*. Entsprechend für $I = (a,b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, und $\lim_{c\to a+} \int_c^b f$ (für $a = -\infty$: $c \to -\infty$).
2. Sei $I = (a,b)$ und f lokal integrierbar. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ heißt

konvergent, wenn für ein $m \in (a,b)$ beide Integrale $\int_a^m f$ und $\int_m^b f$ im Sinn von (1) konvergieren; sein Wert ist dann ihre Summe.

3. Ist f auf einem Intervall bis auf endlich viele innere Punkte $p_1 < \cdots < p_r$ erklärt und auf den Intervallen dazwischen lokal integrierbar, so heißen auch $p_1, \dots, p_r$ kritische Stellen. Man zerlegt an ihnen; das Integral heißt konvergent, wenn jedes Teilintegral im Sinn von (1) oder (2) konvergiert, und sein Wert ist die Summe.
4. Das uneigentliche Integral heißt *absolut konvergent*, wenn $\int_a^b |f|$ konvergiert; $|f|$ ist nach Folgerung 12.13 (1) lokal integrierbar.

Die Wahl von m in (2) spielt keine Rolle: Nach Folgerung 13.22 (1) unten konvergieren für ein anderes m' die neuen Teilintegrale ebenfalls, sie ändern sich um $\pm \int_m^{m'} f$, und die Summe bleibt gleich. Ist f auf $[a,b]$ im gewöhnlichen Sinn integrierbar, so ist das uneigentliche Integral über $[a,b)$ konvergent mit demselben Wert, denn die Integralfunktion ist nach Satz 13.3 (1) stetig. Ist umgekehrt $b \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und *beschränkt*, so setzt man f in b beliebig fort; nach Lemma 12.14 ist f dann auf $[a,b]$ integrierbar, und das uneigentliche Integral konvergiert gegen $\int_a^b f$. Die beiden Begriffe widersprechen sich also nicht, und man benutzt dasselbe Zeichen. Auf einem beschränkten Intervall ist ein Integral nur dann echt uneigentlich, wenn f nahe der kritischen Stelle unbeschränkt ist.

Kritische Stellen im Inneren übersieht man leicht. Formal wäre $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2$, eine negative Zahl als Integral eines positiven Integranden. Tatsächlich ist 0 eine kritische Stelle, und schon $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ divergiert (Satz 13.12 (2)); Folgerung 13.5 ist nicht anwendbar, weil $\frac{1}{x^2}$ auf keinem Intervall um 0 erklärt ist.

Folgerung 13.22 (Rechenregeln). Sei $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, und seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar.

1. Für $a < a' < b$ konvergiert $\int_a^b f$ genau dann, wenn $\int_{a'}^b f$ konvergiert, und dann ist $\int_a^b f = \int_a^{a'} f + \int_{a'}^b f$.
2. Konvergieren $\int_a^b f$ und $\int_a^b g$, so konvergiert $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und hat den Wert $\lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
3. Konvergieren $\int_a^b f$ und $\int_a^b g$ und ist $f \le g$, so ist $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Entsprechendes gilt für Integrale über $(a,b]$ und (a,b).

Beweis. Vorweg zu den Grenzübergängen. Für $b \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{c \to b-}$ nach Definition 7.7 der Grenzwert der Einschränkung auf $[a,b)$, und dafür gelten Satz 7.6 und Lemma 7.28 unmittelbar; nach Lemma 7.28 (2) mit $r = b - a'$ hängt er nur von den Werten auf $[a',b)$

ab. Für $b = \infty$ gelten Satz 7.6 (1) bis (4) für $c \to \infty$ mit demselben Beweis: Es gibt Folgen in $[a, \infty)$ mit $c_n \to \infty$ (etwa $c_n = a + n$), nach dem Absatz nach Definition 7.7 gilt das Folgenkriterium auch für $c \to \infty$, und Satz 4.9 bis 4.11 liefern die Regeln wie im Beweis von Satz 7.6. Ferner betrifft die Bedingung für $c \to \infty$ in Definition 7.7 nur Punkte $c > R$ mit beliebig großem R; die Einschränkung auf $[a', \infty)$ ändert den Grenzwert also nicht. Diese Regeln für $c \to b-$ und $c \to \infty$ werden in dieser Einheit ohne weiteren Hinweis benutzt. (1) Für $a' \le c < b$ ist $\int_a^c f = \int_a^{a'} f + \int_{a'}^c f$ nach Satz 12.22 (1), und der erste Summand hängt nicht von c ab. Nach dem Vorweg existiert der Grenzwert der linken Seite für $c \to b-$ genau dann, wenn der des zweiten Summanden existiert, und es gilt die Gleichung. (2) und (3) Für jedes $c \in [a, b)$ gelten Gleichung und Ungleichung für die Integrale über $[a, c]$ nach Satz 12.10; der Grenzübergang erhält Summen, Vielfache und $\le$ (Satz 7.6 (1), (3) mit dem Vorweg). Über $(a, b]$ geht man ebenso vor, über (a, b) wendet man das auf beide Teilintegrale an. □

Das Hauptbeispiel sind die Potenzen; an ihnen misst man alle anderen.

Satz 13.12. Sei $s \in \mathbb{R}$.

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ konvergiert genau für $s > 1$, und dann ist der Wert $\frac{1}{s-1}$.
2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konvergiert genau für $s < 1$, und dann ist der Wert $\frac{1}{1-s}$.

Beweis. Für $s \neq 1$ ist $\frac{x^{1-s}}{1-s}$ eine Stammfunktion von x^{-s} auf $(0, \infty)$, für $s = 1$ ist es $\ln x$. Für $\gamma > 0$ ist $c \mapsto c^\gamma$ auf $(0, \infty)$ streng wachsend und $c \mapsto c^{-\gamma}$ streng fallend (Satz 9.17 (3)). Zu $K > 0$ ist daher $c^{-\gamma} > K$ für $0 < c < K^{-1/\gamma}$ und $c^\gamma > K$ für $c > K^{1/\gamma}$, und zu $\varepsilon > 0$ ist $c^{-\gamma} < \varepsilon$ für $c > \varepsilon^{-1/\gamma}$. Also gilt $c^{-\gamma} \to \infty$ für $c \to 0+$ sowie $c^\gamma \to \infty$ und $c^{-\gamma} \to 0$ für $c \to \infty$ (Definition 7.7); ferner gilt $c^\gamma \to 0$ für $c \to 0+$ (Absatz nach Satz 9.17). (1) Für $c > 1$ ist $\int_1^c x^{-s}\,dx = \frac{c^{1-s}-1}{1-s}$ beziehungsweise $\ln c$. Für $c \to \infty$ strebt c^{1-s} gegen 0, wenn $1 - s < 0$, und gegen ∞, wenn $1 - s > 0$; ferner $\ln c \to \infty$ (Folgerung 9.14). (2) Für $0 < c < 1$ ist $\int_c^1 x^{-s}\,dx = \frac{1-c^{1-s}}{1-s}$ beziehungsweise $-\ln c$. Für $c \to 0+$ strebt c^{1-s} gegen 0, wenn $1 - s > 0$, und gegen ∞, wenn $1 - s < 0$; ferner $-\ln c \to \infty$ (Folgerung 9.14). □

Insbesondere divergiert $\int_0^\infty x^{-s}\,dx$ für jedes s: Eines der beiden Teilintegrale divergiert immer. Die Funktion $\frac{1}{x}$ auf $(0, 1]$ aus Einheit 12, (G2), wird auch durch den Grenzübergang nicht integrierbar, denn $\int_c^1 \frac{dx}{x} = -\ln c \to \infty$. Dagegen hat $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ebenso unbeschränkt, das endliche Integral 2. Der neue Begriff erfasst unbeschränkte Funktionen mit endlicher Fläche, nicht alle.

Für Konvergenzbeweise ohne Stammfunktion braucht man ein Gegenstück zum Monotonieprinzip für Folgen (Satz 4.16); der Beweis ist derselbe, mit c an Stelle des Index.

Lemma 13.13 (monotone Funktionen an einer kritischen Stelle). Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und $G\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ wachsend. Grenzwerte $c \to b-$ sind für $b = \infty$ als $c \to \infty$ zu lesen.

1. Ist G nach oben beschränkt, so existiert $\lim_{c\to b-} G(c)$ und ist gleich $\sup\{G(c) : a \le c < b\}$.
2. Ist G nicht nach oben beschränkt, so gilt $G(c) \to \infty$ für $c \to b-$.
3. Existiert $L = \lim_{c\to b-} G(c)$ in $\mathbb{R}$, so ist G beschränkt und $G(c) \le L$ für alle $c \in [a,b)$.

Entsprechend gilt für eine fallende Funktion $G\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, und $c \to a+$ (für $a = -\infty$: $c \to -\infty$): Ist G nach oben beschränkt, so ist der Grenzwert $\sup G$; sonst strebt $G(c)$ gegen ∞; existiert der Grenzwert L in $\mathbb{R}$, so ist $G \le L$.

Beweis. (1) Sei L das Supremum (Satz 2.34) und $\varepsilon > 0$. Es gibt $c_0 \in [a,b)$ mit $G(c_0) > L - \varepsilon$, und für $c_0 \le c < b$ ist $L - \varepsilon < G(c_0) \le G(c) \le L$. Das ist die Grenzwertbedingung aus Definition 7.7, für $b \in \mathbb{R}$ mit $\delta = b - c_0$, für $b = \infty$ mit $R = c_0$. (2) Zu $K \in \mathbb{R}$ gibt es c_0 mit $G(c_0) > K$, und $G(c) \ge G(c_0) > K$ für $c_0 \le c < b$. (3) Wäre G unbeschränkt, so strebte G nach (2) gegen ∞; ein Grenzwert in $\mathbb{R}$ und der Wert ∞ schließen sich aus (Absatz nach Definition 7.7). Also ist G beschränkt, und nach (1) ist $L = \sup G \ge G(c)$. Den zweiten Teil führt man mit $H(c) = G(-c)$ auf $[-b,-a)$ auf den ersten zurück: H ist wachsend, und $c \to (-a)-$ entspricht $-c \to a+$. □

Für Punkte des Definitionsintervalls ist (1) Satz 7.22; neu ist der Endpunkt, der nicht zum Intervall gehört, einschließlich ∞.

Satz 13.14 (Majorantenkriterium). Seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, $|f| \le g$, und sei $\int_a^b g$ konvergent. Dann sind $\int_a^b f$ und $\int_a^b |f|$ konvergent, und

$$\Big|\int_a^b f\Big| \le \int_a^b |f| \le \int_a^b g.$$

Insbesondere ist jedes absolut konvergente uneigentliche Integral konvergent. Dasselbe gilt für Integrale über $(a,b]$ und (a,b).

Beweis. Die Funktionen $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$ und $|f| = f^+ + f^-$ sind lokal integrierbar (Folgerung 12.13), nichtnegativ und höchstens g. Die Funktion $c \mapsto \int_a^c g$ ist wachsend, weil $g \ge 0$, und hat den Grenzwert $\int_a^b g$; nach Lemma 13.13 (3) ist $\int_a^c g \le \int_a^b g$ für alle c. Daher sind $c \mapsto \int_a^c f^\pm$ wachsend und durch $\int_a^b g$ beschränkt (Satz 12.10) und konvergieren nach Lemma 13.13 (1). Nach Folgerung 13.22 (2) konvergieren dann auch $\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$ und $\int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-$. Für jedes c ist $-\int_a^c |f| \le$

$\int_a^c f \le \int_a^c |f| \le \int_a^c g$ (Folgerung 12.13 (1), Satz 12.10); der Grenzübergang erhält diese Ungleichungen (Satz 7.6 (3)), und das ist die Behauptung. Über $(a,b]$ benutzt man den zweiten Teil von Lemma 13.13, über (a,b) zerlegt man. □

In Kontraposition: Ist $0 \le g \le f$ und divergiert $\int_a^b g$, so divergiert auch $\int_a^b f$ (eine *Minorante*).

Uneigentliche Integrale werden ebenso substituiert wie eigentliche, wenn die Substitution die kritische Stelle in die kritische Stelle überführt.

Satz 13.23 (Substitution im uneigentlichen Integral). Seien $\alpha < \beta \le \infty$ und $a < b \le \infty$, sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi \in C^1([\alpha,\beta))$ streng wachsend mit $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) < b$ für alle t und $\lim_{t\to\beta-} \varphi(t) = b$ (für $\beta = \infty$: $t \to \infty$; für $b = \infty$ im Sinn von Definition 7.7). Dann konvergiert $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ genau dann, wenn $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert, und dann sind beide gleich.

Entsprechendes gilt, mit demselben Beweis, für Integrale über $(\alpha,\beta]$ und $(a,b]$ und für streng fallendes φ, wobei sich die Grenzen wie in Satz 13.10 vertauschen. Ist etwa $\varphi \in C^1([\alpha,\beta))$ streng fallend mit $\varphi(\alpha) = b \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) > a$ und $\varphi(t) \to a$ für $t \to \beta-$, und $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b f(x)\,dx$, sobald eine Seite konvergiert.

Beweis. Sei $G(c) = \int_a^c f$ für $a \le c < b$ und $H(s) = \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ für $\alpha \le s < \beta$. Nach Satz 13.10, mit $J = [\alpha,\beta)$ und $I = [a,b)$, ist $H(s) = G(\varphi(s))$. Ferner ist φ eine Bijektion von $[\alpha,\beta)$ auf $[a,b)$: injektiv, weil streng monoton, und zu $c \in [a,b)$ gibt es wegen $\varphi(t) \to b$ ein t mit $\varphi(t) > c$, und nach dem Zwischenwertsatz (Folgerung 7.16) auf $[\alpha,t]$ wird c angenommen. Die Umkehrfunktion ψ ist streng wachsend, und $G(c) = H(\psi(c))$.

Gelte $G(c) \to L$ für $c \to b-$, und sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $c_0 \in [a,b)$ mit $|G(c) - L| < \varepsilon$ für $c_0 < c < b$, und es gibt $s_0 \in [\alpha,\beta)$ mit $\varphi(s_0) > c_0$, wegen der Monotonie also $\varphi(s) > c_0$ für $s_0 \le s < \beta$. Für diese s ist $|H(s) - L| = |G(\varphi(s)) - L| < \varepsilon$; also $H(s) \to L$. Gelte umgekehrt $H(s) \to L$ für $s \to \beta-$, und sei $s_0 \in [\alpha,\beta)$ mit $|H(s) - L| < \varepsilon$ für $s_0 < s < \beta$. Für $\varphi(s_0) < c < b$ ist $\psi(c) > s_0$, also $|G(c) - L| = |H(\psi(c)) - L| < \varepsilon$; da $\varphi(s_0) < b$ ist, heißt das $G(c) \to L$. Im fallenden Fall ist $H(s) = -\int_{\varphi(s)}^b f$, und man schließt ebenso. □

Oft genügt es, den Integranden in der Nähe der kritischen Stelle mit einer Vergleichsfunktion zu vergleichen.

Folgerung 13.24 (Vergleich über den Quotienten). Seien $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, $g > 0$, und es existiere $L = \lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ (für $b = \infty$: $x \to \infty$).

1. Konvergiert $\int_a^b g$, so konvergiert $\int_a^b f$ absolut.
2. Ist $L > 0$, so konvergiert $\int_a^b f$ genau dann, wenn $\int_a^b g$ konvergiert.

Entsprechend für Integrale über $(a, b]$ mit $x \to a+$.

Beweis. (1) Es gibt $a' \in [a, b)$ mit $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < 1$, also $|f(x)| \le (|L|+1)\, g(x)$, für $a' \le x < b$. Nach Folgerung 13.22 (1), (2) konvergiert $\int_{a'}^b (|L|+1)g$, nach Satz 13.14 dann $\int_{a'}^b |f|$ und nach Folgerung 13.22 (1) auch $\int_a^b |f|$. (2) Die eine Richtung ist (1). Konvergiert $\int_a^b f$, so wähle $a' \in [a, b)$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L}{2}$ für $a' \le x < b$. Dort ist $0 < g \le \frac{2}{L} f$; nach Folgerung 13.22 konvergiert $\int_{a'}^b \frac{2}{L} f$, nach Satz 13.14 dann $\int_{a'}^b g$ und nach Folgerung 13.22 (1) auch $\int_a^b g$. □

Beispiele. (a) $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ konvergiert: Auf $[0, 1]$ ist der Integrand stetig, und für $x \ge 1$ ist $x^2 \ge x$, also $e^{-x^2} \le e^{-x}$, und $\int_1^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{c\to\infty}(e^{-1} - e^{-c}) = e^{-1}$. Satz 13.14 und Folgerung 13.22 (1) schließen ab. Der Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ist Aufgabe V1.

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ konvergiert: Mit $g(x) = x^{-3/2}$ ist $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{-3}}} \to 1$ für $x \to \infty$, und $\int_1^\infty x^{-3/2}\, dx$ konvergiert nach Satz 13.12 (1); Folgerung 13.24 (1).

Absolute Konvergenz ist echt stärker als Konvergenz. Das Standardbeispiel:

Satz 13.15. Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x > 0$ und $f(0) = 1$. Das Integral $\int_0^\infty f$ konvergiert, aber nicht absolut.

Beweisidee. Die Bögen des Sinus heben sich mit abnehmender Höhe gegenseitig fast auf; partielle Integration macht daraus den Faktor $\frac{1}{x^2}$. Ihre Beträge dagegen summieren sich wie die harmonische Reihe.

Beweis. f ist stetig auf $[0, \infty)$, denn $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0$ (Folgerung 9.25 (3)). Die einzige kritische Stelle ist ∞, und nach Folgerung 13.22 (1) genügt es, $\int_1^\infty f$ zu betrachten. Für $c > 1$ partiell integriert:

$$\int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 - \frac{\cos c}{c} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Für $c \to \infty$ strebt $\frac{\cos c}{c}$ gegen 0, und $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ konvergiert nach Satz 13.14 mit der Majorante $\frac{1}{x^2}$ und Satz 13.12 (1). Also konvergiert $\int_1^\infty f$.

Nicht absolut: Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{(k+1)\pi}$, und mit der Substitution $x = k\pi + t$ und $|\sin(k\pi + t)| = \sin t$ für $t \in [0, \pi]$ (Satz 9.28 (2), Satz 9.29 (1)) ist $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^\pi \sin t\, dt = 2$. Also

$$\int_0^{(n+1)\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\, dx \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k},$$

und die harmonische Reihe divergiert (Satz 6.6). Die wachsende Funktion $c \mapsto \int_0^c |f|$ ist also unbeschränkt und strebt nach Lemma 13.13 (2) gegen ∞. □

Der Wert ist $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$; er wird hier nicht bewiesen. Die üblichen Beweise benutzen Parameterintegrale, Fourier-Reihen oder den Residuensatz.

13.6 Das Integralkriterium

Summen und Integrale monotoner Funktionen lassen sich gegeneinander abschätzen. Das liefert ein Konvergenzkriterium für Reihen und, genauer, eine Aussage über die Differenz.

Satz 13.16 (Integralkriterium). Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ fallend und

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx.$$

Dann ist (d_n) fallend mit $f(n) \le d_n \le f(1)$ und daher konvergent. Insbesondere konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^\infty f$ konvergiert.

Beweisidee. Auf $[k, k+1]$ liegt f zwischen $f(k+1)$ und $f(k)$; die Summe ist eine Ober- beziehungsweise Untersumme des Integrals.

Beweis. f ist monoton, also auf jedem $[1, c]$ integrierbar (Satz 12.8). Für $k \in \mathbb{N}$ ist $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ auf $[k, k+1]$, also nach Satz 12.18 (1)

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f \le f(k).$$

Daraus folgt $d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} f - f(n+1) \ge 0$, und

$$d_n = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(f(k) - \int_k^{k+1} f \Big) \ge f(n) \ge 0.$$

Mit $d_1 = f(1)$ und der Monotonie folgt $d_n \le f(1)$; als fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert (d_n) (Satz 4.16).

Für die Äquivalenz: Es ist $\sum_{k=1}^n f(k) = d_n + \int_1^n f$ mit $0 \le d_n \le f(1)$. Konvergiert $\int_1^\infty f$, so ist $\int_1^n f \le \int_1^\infty f$ (Lemma 13.13 (3)), die Partialsummen sind beschränkt und, weil $f \ge 0$, wachsend; die Reihe konvergiert (Satz 4.16). Konvergiert die Reihe, so ist $\int_1^n f \le \sum_{k=1}^n f(k) \le \sum_{k=1}^\infty f(k)$, und wegen $f \ge 0$ ist $\int_1^c f \le \int_1^n f$ für jedes $n \ge c$; die wachsende Funktion $c \mapsto \int_1^c f$ ist beschränkt und hat nach Lemma 13.13 (1) einen Grenzwert. □

Startet die Reihe bei einem anderen Index k_0, so gilt dasselbe mit $[k_0, \infty)$ statt $[1, \infty)$.

Folgerung 13.17.

1. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau für $s > 1$.
2. Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergiert, die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ konvergiert.
3. Der Grenzwert $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ existiert und liegt in $[0, 1]$.

Beweis. (1) Für $s > 0$ ist x^{-s} fallend und positiv (Satz 9.17 (3)); Satz 13.16 und Satz 13.12 (1). Für $s \le 0$ ist $n^{-s} \ge 1$, die Glieder bilden keine Nullfolge, und die Reihe divergiert (Folgerung 6.5).

(2) $x \ln x$ und $x(\ln x)^2$ sind auf $[2, \infty)$ positiv und wachsend, ihre Kehrwerte also positiv und fallend. Stammfunktionen sind $\ln\ln x$ und $-\frac{1}{\ln x}$ (Kettenregel, Satz 10.6). Es ist $\int_2^c \frac{dx}{x \ln x} = \ln\ln c - \ln\ln 2 \to \infty$ und $\int_2^c \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln c} \to \frac{1}{\ln 2}$ (Folgerung 9.14).

(3) Satz 13.16 mit $f(x) = \frac{1}{x}$: $d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ ist fallend mit $\frac{1}{n} \le d_n \le 1$; der Grenzwert liegt in $[0, 1]$ (Satz 4.10). □

Die Zahl $\gamma = 0{,}5772\ldots$ heißt *Euler-Mascheronische Konstante* (der Zahlenwert ist eine numerische Angabe, nicht hier bewiesen). Ob sie rational ist, ist nicht bekannt. Teil (2) zeigt, wie fein das Kriterium unterscheidet: Der Faktor $\ln n$ wächst langsamer als jede Potenz n^ε (Satz 9.19), und doch entscheidet seine Potenz über die Konvergenz. Der Verdichtungssatz (Satz 6.11) liefert dieselben Konvergenzaussagen; Folgerung 6.12 spricht (1) nur für natürliche s aus, der Absatz danach überträgt die Rechnung auf reelle s. Das Integralkriterium gibt zusätzlich die Abschätzung $f(n) \le d_n \le f(1)$.

13.7 Die Gammafunktion

Die Fakultät ist nur auf $\mathbb{N}_0$ erklärt. Ein uneigentliches Integral setzt sie auf positive reelle Zahlen fort.

Satz 13.18 (Gammafunktion). Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

genau dann, wenn $x > 0$. Für $x > 0$ ist $\Gamma(x) > 0$ und $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, ferner $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Der Integrand $t^{x-1}e^{-t}$ ist auf $(0, \infty)$ stetig und positiv; kritische Stellen sind 0 und ∞, und wir teilen bei $m = 1$.

Bei 0: Für $0 < t \le 1$ ist $e^{-1}t^{x-1} \le t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$. Nach Satz 13.12 (2) mit $s = 1 - x$ konvergiert $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ genau für $x > 0$. Nach Satz 13.14, seiner Kontraposition und Folgerung 13.22 (2) (für den Faktor e^{-1}) konvergiert $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ genau für $x > 0$.

Bei ∞: Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge x + 1$. Für $t \ge 1$ ist $e^t \ge \frac{t^m}{m!}$ (Satz 9.11) und $t^{x-1-m} \le t^{-2}$, also $t^{x-1}e^{-t} \le m!\,t^{x-1-m} \le \frac{m!}{t^2}$. Nach Satz 13.12 (1), Folgerung 13.22 (2) und Satz 13.14 konvergiert $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ für jedes x.

Positivität: Sei $x > 0$. Da der Integrand positiv ist, ist $c \mapsto \int_c^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ auf $(0, 1]$ fallend und $c \mapsto \int_1^c t^{x-1}e^{-t}\,dt$ auf $[1, \infty)$ wachsend. Nach Lemma 13.13 (3) und seinem zweiten Teil ist $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \ge 0$ und $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \ge \int_1^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt > 0$ (Folgerung 12.19). Also ist $\Gamma(x) > 0$.

Funktionalgleichung: Sei $x > 0$ und $0 < \varepsilon < 1 < R$. Partiell mit $f(t) = t^x$, $g(t) = -e^{-t}$:

$$\int_\varepsilon^R t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^R + x\int_\varepsilon^R t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Für $\varepsilon \to 0+$ strebt $\varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ gegen 0, weil $x > 0$ (Absatz nach Satz 9.17). Für $R \to \infty$ strebt $R^x e^{-R} \le m!\,R^{x-m}$ mit einem $m > x$ gegen 0. Teilt man beide Integrale bei 1 und lässt erst $\varepsilon \to 0+$ bei festem R, dann $R \to \infty$ gehen, so streben sie nach Definition 13.11 und Folgerung 13.22 gegen $\Gamma(x + 1)$ und $\Gamma(x)$, und es folgt $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

$\Gamma(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t}\,dt = \lim_{R\to\infty}(1 - e^{-R}) = 1$. Durch Induktion folgt $\Gamma(n + 1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)! = n!$. □

Bemerkung (was die Gammafunktion auszeichnet). Die Funktionalgleichung und $\Gamma(1) = 1$ legen Γ nicht fest; man kann etwa $\Gamma(x)\big(1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi x)\big)$ nehmen, das wegen $\sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$ dieselbe Funktionalgleichung erfüllt, bei $x = 1$ den Wert 1 hat und positiv ist. Nach dem Satz von Bohr und Mollerup ist Γ die einzige Funktion $(0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, für die $\ln\Gamma$ konvex ist. Dieser Satz wird hier ohne Beweis angegeben. Bewiesen werden in den Aufgaben $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (V1) und die Beta-Formel für ganzzahlige Argumente (B3).

Bemerkung (ein Blick auf Stirling, heuristisch). Die Formel $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$ deutet an, wie groß $n!$ ist. Der Integrand wächst bis $t = n$ und fällt danach; sein größter Wert ist $(n/e)^n$. Schreibt man ihn als $\exp(n\ln t - t)$, so hat der Exponent bei $t = n$ die zweite Ableitung $-\frac{1}{n}$; nahe bei n verhält sich der Integrand also ungefähr wie $(n/e)^n \exp\big(-\frac{(t-n)^2}{2n}\big)$, und dessen Integral über $\mathbb{R}$ ist nach Aufgabe V1 gleich $\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$. Das ist eine Heuristik, kein Beweis: Der Fehler der Näherung wird nicht abgeschätzt. Abschnitt 13.8 beweist die Formel auf einem anderen, elementaren Weg.

13.8 Die Stirlingsche Formel

Wie schnell wächst $n!$? Ein erster Zugriff vergleicht $\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k$ mit einem Integral, wie im Beweis von Satz 13.16, nur für die wachsende Funktion ln und daher mit umgekehrten Ungleichungen. Nach Satz 12.18 (1) ist $\int_{k-1}^{k} \ln x\,dx \le \ln k$ für $k \ge 2$ und $\ln k \le \int_{k}^{k+1} \ln x\,dx$ für $k \ge 1$. Summation und Abschnitt 13.3, Beispiel (b), geben

$$n \ln n - n + 1 \le \ln n! \le (n+1)\ln(n+1) - n.$$

Wegen $(n+1)^{n+1} = (n+1)\,n^n\big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ und $\big(1+\frac{1}{n}\big)^n \le \big(e^{1/n}\big)^n = e$ (Satz 9.7 (2)) folgt

$$e \le \frac{n!}{(n/e)^n} \le e\,(n+1).$$

Der Hauptfaktor $(n/e)^n$ steht damit fest; offen ist ein Korrekturfaktor zwischen einer Konstanten und einem linearen Faktor. Das legt $n! \approx C\,n^{\alpha}\big(\frac{n}{e}\big)^n$ mit $0 \le \alpha \le 1$ nahe. Die untere Schranke rechnet auf jedem Teilintervall mit dem kleinsten, die obere mit dem größten Wert von ln. Die Trapezregel nimmt den Mittelwert der beiden und bestimmt so den Exponenten $\alpha = \frac{1}{2}$; die Wallis-Integrale liefern die Konstante $C = \sqrt{2\pi}$.

Lemma 13.19 (Trapez und Tangente für den Logarithmus). Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} < \int_{k}^{k+1} \ln x\,dx \le \ln\Big(k+\frac{1}{2}\Big).$$

Beweisidee. Der Logarithmus ist konkav: Die Sehne liegt unter dem Graphen, die Tangente im Mittelpunkt darüber. Die Fläche unter der Sehne ist das Trapez, die Fläche unter der Tangente ist der Wert in der Mitte.

Beweis. Rechte Ungleichung. Für $y > 0$ ist $\ln y \le y - 1$ (Satz 9.13 (2)). Mit $y = \frac{x}{\mu}$ und $\mu = k + \frac{1}{2}$ folgt $\ln x \le \ln \mu + \frac{x-\mu}{\mu}$ für alle $x > 0$. Integration über $[k, k+1]$ ergibt wegen $\int_{k}^{k+1}(x-\mu)\,dx = \frac{(k+1-\mu)^2-(k-\mu)^2}{2} = 0$ die Behauptung.

Linke Ungleichung. Sei $g(x) = \ln x - \ln k - (x-k)\big(\ln(k+1) - \ln k\big)$ auf $[k, k+1]$, die Differenz zwischen Graph und Sehne. Wegen $(-\ln)''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ ist $-\ln$ nach Folgerung 11.16 streng konvex; für $x = (1-t)k + t(k+1)$ mit $t \in (0,1)$ ist also $\ln x > (1-t)\ln k + t\ln(k+1)$, das heißt $g(x) > 0$. Die stetige Funktion g ist nichtnegativ und nicht identisch null; nach Folgerung 12.19 ist $\int_{k}^{k+1} g > 0$, und $\int_{k}^{k+1} g$ ist die Differenz zwischen $\int_{k}^{k+1} \ln x\,dx$ und der Trapezfläche $\frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}$. □

Satz 13.20 (Stirling, Existenz der Konstanten). Die Folge

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ist streng fallend und konvergiert gegen eine Zahl c mit $e^{7/8} \le c < e$. Für jedes n gilt

$$c < a_n \le c\, e^{1/(8n)}.$$

Beweisidee. $\ln a_n$ ist bis auf die Konstante 1 die Summe der Trapezfehler e_k des Logarithmus auf $[1, n]$. Diese Fehler sind positiv, und Lemma 13.19 schätzt sie durch eine Teleskopsumme ab.

Beweis. Sei $e_k = \int_k^{k+1} \ln x\, dx - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2}$. Nach Lemma 13.19 ist $e_k > 0$ und

$$e_k \le \ln\Big(k + \frac{1}{2}\Big) - \frac{\ln k + \ln(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \ln\Big(1 + \frac{1}{4k(k+1)}\Big) \le \frac{1}{8k(k+1)},$$

zuletzt wegen $\ln(1+u) \le u$ (Satz 9.13 (2)). Wir summieren über $k = 1, \dots, n-1$. Es ist $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = \ln n! - \ln n$ und $\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \ln n!$, also ist die Summe der Trapezflächen $\ln n! - \frac{1}{2} \ln n$. Mit $\int_1^n \ln x\, dx = n \ln n - n + 1$ (Abschnitt 13.3, Beispiel (b)) folgt

$$\sum_{k=1}^{n-1} e_k = n \ln n - n + 1 - \ln n! + \frac{1}{2} \ln n = 1 - \ln a_n.$$

Also ist $\ln a_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} e_k$. Weil alle $e_k > 0$ sind, ist $(\ln a_n)$ streng fallend, und wegen

$$\sum_{k=1}^{n-1} e_k \le \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{8}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{8}$$

ist $\ln a_n > \frac{7}{8}$. Als fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert $\ln a_n$ gegen ein $\lambda \ge \frac{7}{8}$ (Satz 4.16, Satz 4.10), und $\lambda < \ln a_1 = 1$, weil die Folge streng fällt. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion konvergiert a_n gegen $c = e^\lambda$. Für die Fehlerschranke ist

$$\ln a_n - \lambda = \sum_{k=n}^{\infty} e_k \le \frac{1}{8} \sum_{k=n}^{\infty} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \frac{1}{8n},$$

und $\ln a_n - \lambda > 0$, weil $(\ln a_n)$ streng fällt. □

Satz 13.21 (Stirlingsche Formel). Es ist $c = \sqrt{2\pi}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \le \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(8n)},$$

insbesondere $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1$.

Beweisidee. Der Quotient $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ strebt einerseits gegen $\frac{c^2}{c} = c$, andererseits ist er bis auf den Faktor $\sqrt{2}$ genau der Ausdruck aus der zweiten Form des Wallis-Produkts.

Beweis. Einsetzen der Definition:

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)^{2n+1/2}}{(2n)!\,e^{2n}} = \frac{(n!)^2\, 2^{2n}\sqrt{2}\, n^{2n+1/2}}{(2n)!\, n^{2n+1}} = \sqrt{2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\,\sqrt{n}}.$$

Nach Satz 13.8 strebt die rechte Seite gegen $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}$. Nach Satz 13.20 und den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 4.9; $c > 0$) strebt die linke Seite gegen $\frac{c^2}{c} = c$. Also ist $c = \sqrt{2\pi}$. Wegen $n! = a_n\sqrt{n}\,(n/e)^n$ ist die Ungleichungskette die Abschätzung $c < a_n \le c\,e^{1/(8n)}$ aus Satz 13.20. □

Für Folgen (x_n), (y_n) mit $y_n \neq 0$ schreibt man $x_n \sim y_n$ (*asymptotisch gleich*), wenn $\frac{x_n}{y_n} \to 1$; entsprechend für Funktionen bei $x \to \infty$. Die Stirlingsche Formel lautet damit $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$. Sie ist nach James Stirling benannt; auch der Name Abraham de Moivre wird mit ihr verbunden.

Was hier bewiesen ist und was nicht. Vollständig bewiesen sind: die Existenz des Grenzwerts von a_n, sein Wert $\sqrt{2\pi}$ und die Schranken $1 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} \le e^{1/(8n)}$. *Ohne Beweis* zitiert werden die folgenden schärferen Aussagen:

- die Schranken $e^{1/(12n+1)} < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n} < e^{1/(12n)}$ (nach H. Robbins);
- die asymptotische Entwicklung $\ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \dots$, deren Reihe divergiert, deren Abschnitte aber den Fehler mit wachsender Genauigkeit beschreiben, solange man rechtzeitig abbricht;
- die Stirlingsche Formel für die Gammafunktion, $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\,(x/e)^x$ für reelles $x \to \infty$.

Die Konstante $\frac{1}{8}$ statt $\frac{1}{12}$ kommt von der groben Abschätzung des Trapezfehlers durch die Tangente in Lemma 13.19; eine genauere Behandlung des Fehlers mit Taylorentwicklung führt auf $\frac{1}{12}$.

Bilanz. Beide Fragen der Leitfrage sind beantwortet. Ein Grenzwert von Rechtecksummen lässt sich durch eine Stammfunktion ausrechnen, weil der Mittelwertsatz jeden Zuwachs $F(x_k) - F(x_{k-1})$ einer Stammfunktion in ein Rechteck $f(\xi_k)\Delta x_k$ verwandelt; die Summe der Zuwächse ist $F(b) - F(a)$, unabhängig von der Zerlegung, und liegt zwischen jeder Unter- und Obersumme (Satz 13.4 (2)). Ableitungsregeln werden dadurch zu Integrationsregeln (Abschnitte 13.3 und 13.4). Und $n!$ ist bis auf einen Faktor zwischen 1 und $e^{1/(8n)}$ gleich $\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$ (Satz 13.21). Der Hauptfaktor $(n/e)^n$ kommt aus $\int \ln x\,dx$, der Faktor $\sqrt{n}$ aus der Trapezregel, die Konstante $\sqrt{2\pi}$ aus den Wallis-Integralen, die auch die Kreisfläche liefern.

13.9 Gegenbeispiele

(G1) Eine Ableitung, die nicht integrierbar ist. Sei $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$ und $F(0) = 0$; diese Funktion ist aus Einheit 10, Aufgabe V1, bekannt. F ist überall differenzierbar: In 0 ist $|\frac{F(h)}{h}| \leq |h|$, also $F'(0) = 0$; für $x \neq 0$ ist

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

An den Stellen $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}}$ ist $F'(x_k) = -2\sqrt{2k\pi}$. Also ist F' auf $[0,1]$ unbeschränkt und nicht Riemann-integrierbar. Satz 13.4 (2) ist nicht anwendbar, obwohl F' überall existiert. Als uneigentliches Integral über $(0,1]$, also für die Einschränkung von F' auf $(0,1]$, auf der F' stetig ist, konvergiert $\int_0^1 F' = \lim_{c\to 0+}\big(F(1) - F(c)\big) = \sin 1$ (Folgerung 13.5 auf $[c,1]$). Es gibt sogar differenzierbare Funktionen mit *beschränkter*, nicht integrierbarer Ableitung (Volterra; ohne Beweis).

(G2) Integrierbar ohne Stammfunktion. Die Vorzeichenfunktion, $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 0$, ist auf $[-1,1]$ integrierbar (Satz 12.15), und ihre Integralfunktion $\int_0^x \operatorname{sgn} = |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar. Eine andere Stammfunktion gibt es auch nicht: Wie in Einheit 10, (G9), hat keine differenzierbare Funktion auf $[-1,1]$ die Ableitung sgn, weil Ableitungen die Zwischenwerteigenschaft haben (Satz 10.17). Satz 13.4 (1) braucht also die Stetigkeit von f, nicht nur die Integrierbarkeit.

(G3) Differenzierbare Integralfunktion an einer Unstetigkeitsstelle. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 1$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann ist $F(x) = \int_0^x f = 0$ für alle x (Folgerung 12.16). F ist überall differenzierbar, aber $F'(0) = 0 \neq f(0)$. Satz 13.3 (2) gibt $F'(x_0) = f(x_0)$ nur an Stetigkeitsstellen; an anderen kann F differenzierbar sein, aber mit falscher Ableitung, oder nicht differenzierbar wie in (G2).

(G4) Substitution über eine Polstelle hinweg. Es ist $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}$. Substituiert man formal $x = \frac{1}{t}$, also $dx = -\frac{dt}{t^2}$, mit den Grenzen $t = -1$ und $t = 1$, so

ergibt sich

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^{-2}} \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\, dt = -\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Der Fehler: $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ ist auf keinem Intervall erklärt, das -1 und 1 enthält, geschweige denn stetig differenzierbar. Satz 13.10 verlangt $\varphi \in C^1(J)$ auf einem Intervall J, das beide Grenzen enthält. Das Ergebnis hat sogar das falsche Vorzeichen für das Integral eines positiven Integranden.

(G5) Konvergentes uneigentliches Integral, Integrand ohne Grenzwert. Für $n \geq 2$ sei h_n die „Zeltfunktion“ mit $h_n(n) = 1$, die auf $[n - 2^{-n}, n]$ und $[n, n + 2^{-n}]$ linear ist und außerhalb von $[n - 2^{-n}, n + 2^{-n}]$ verschwindet. Diese Intervalle sind paarweise disjunkt; sei $f = \sum_{n\geq 2} h_n$ auf $[0, \infty)$, eine stetige Funktion, die auf jedem beschränkten Intervall nur endlich viele von null verschiedene Summanden hat. Es ist $\int h_n = 2^{-n}$, also $\int_0^c f \leq \sum_{n\geq 2} 2^{-n} = \frac{1}{2}$, und nach Lemma 13.13 (1) konvergiert $\int_0^\infty f$. Trotzdem ist $f(n) = 1$ für alle $n \geq 2$; $f(x)$ strebt nicht gegen 0. Anders als bei Reihen (Glieder bilden eine Nullfolge) folgt aus der Konvergenz eines uneigentlichen Integrals nicht, dass der Integrand gegen 0 strebt.

(G6) Integralkriterium ohne Monotonie. Für das f aus (G5) konvergiert $\int_1^\infty f$, aber $\sum f(n) = \sum 1$ divergiert. Umgekehrt ist für $g(x) = \sin^2(\pi x)$ jedes $g(n) = 0$, die Reihe konvergiert also, aber $\int_1^\infty g$ divergiert: Es ist $\int_0^N g = \frac{N}{2}$ (Substitution $t = \pi x$, Zerlegung von $[0, N\pi]$ in die Intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, Verschiebung um $k\pi$ mit $\sin^2(s + k\pi) = \sin^2 s$ nach Satz 9.28 (2) und Abschnitt 13.3, Beispiel (c)), die wachsende Funktion $c \mapsto \int_0^c g$ ist also unbeschränkt (Lemma 13.13 (2), Folgerung 13.22 (1)). In Satz 13.16 kann auf die Monotonie nicht verzichtet werden.

(G7) Symmetrische Grenzwerte genügen nicht. Für $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$ ist $\int_{-c}^c x\, dx = 0$ für jedes c, also $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c f = 0$. Trotzdem ist $\int_{-\infty}^\infty x\, dx$ divergent, weil schon $\int_0^\infty x\, dx$ divergiert. Definition 13.11 verlangt getrennte Grenzübergänge an beiden Enden; der symmetrische Grenzwert heißt *Cauchyscher Hauptwert* und ist ein anderer Begriff.

(G8) Uneigentlich integrierbar, das Quadrat nicht. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0, 1]$ hat das konvergente Integral $\int_0^1 f = 2$ (Satz 13.12 (2)), aber $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergiert. Folgerung 12.13 (2) überträgt sich nicht auf uneigentliche Integrale. Ebenso wenig Folgerung 12.13 (1): $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ konvergiert, $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}|\, dx$ nicht (Satz 13.15).

13.10 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (zweimal partiell). Für $J = \int_0^\pi e^x \sin x\,dx$:

$$J = \big[e^x \sin x\big]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x\,dx = -\Big(\big[e^x \cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x\,dx\Big) = -\big(-e^\pi - 1 + J\big).$$

Also $2J = e^\pi + 1$ und $J = \frac{e^\pi+1}{2} \approx 12{,}07$.

Beispiel 2 (uneigentlich bei 0). ln ist auf $(0,1]$ unbeschränkt. Mit der Stammfunktion $x \ln x - x$ ist

$$\int_c^1 \ln x\,dx = -1 - c\ln c + c \to -1 \qquad (c \to 0+),$$

denn $c \ln c \to 0$ (Satz 9.19 mit $\alpha = 1$). Also $\int_0^1 \ln x\,dx = -1$.

Beispiel 3 (Momente der Exponentialverteilung). Nach Satz 13.18 ist $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$. Mit der Substitution $x = \lambda t$ ($\lambda > 0$; Satz 13.23 mit $\varphi(t) = \lambda t$ auf $[0,\infty)$) und Folgerung 13.22 (2) folgt $\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}\,dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Beispiel 4 (Stirling in Zahlen). Für $n = 10$ ist $10! = 3\,628\,800$ und $\sqrt{20\pi}\,(10/e)^{10} = 3\,598\,695{,}6\ldots$ Der Quotient ist 1,00836 …; Satz 13.21 garantiert einen Wert zwischen 1 und $e^{1/80} = 1{,}01258\ldots$ (die Zahlenwerte sind numerisch berechnet). Für $n = 100$ liefert die Formel $9{,}3248\ldots \cdot 10^{157}$, der wahre Wert ist $9{,}3326\ldots \cdot 10^{157}$; der relative Fehler ist etwa 0,08 %, innerhalb der Schranke $e^{1/800} - 1 \approx 0{,}125\,\%$. Damit hat 100! genau 158 Stellen: Die Schranken aus Satz 13.21 zeigen $10^{157} < 100! < 10^{158}$, wenn man die beiden Zahlenwerte als gegeben nimmt.

Beispiel 5 (Grenzwerte mit Stirling). (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, denn $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}\,a_n^{1/n}\,n^{1/(2n)}$. Wegen $c < a_n \le a_1 = e$ (Satz 13.20) ist $c^{1/n} \le a_n^{1/n} \le e^{1/n}$; beide Schranken streben nach Satz 4.12 (2) gegen 1, nach Satz 4.11 also auch $a_n^{1/n}$. Ferner ist $n^{1/(2n)} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \to 1$ nach Satz 4.12 (3) und (1).

(b) $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$; das ist die zweite Form von Satz 13.8. Für $n = 10$: $\binom{20}{10} = 184\,756$ und $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} = 187\,078{,}9\ldots$

(c) $\binom{3n}{n} \sim \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}\left(\frac{27}{4}\right)^n$. Nach Satz 13.21 ist $m! = s_m\theta_m$ mit $s_m = \sqrt{2\pi m}\,(m/e)^m$ und $1 < \theta_m \le e^{1/(8m)}$. Für $m \in \{n, 2n, 3n\}$ ist also $1 < \theta_m \le e^{1/n} = \sqrt[n]{e}$, und nach Satz 4.12 (2) und Satz 4.11 streben θ_n, θ_{2n} und θ_{3n} gegen 1. Ferner ist

$$\frac{s_{3n}}{s_n\,s_{2n}} = \frac{\sqrt{6\pi n}\,(3n)^{3n}e^{-3n}}{\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}\cdot\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}} = \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}\cdot\frac{27^n}{4^n},$$

also $\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!\,(2n)!} = \frac{s_{3n}}{s_n\, s_{2n}} \cdot \frac{\theta_{3n}}{\theta_n \theta_{2n}}$, und der zweite Faktor strebt nach Satz 4.9 gegen 1. Für $n = 10$ ist $\binom{30}{10} = 30\,045\,015$ und $\sqrt{\frac{3}{40\pi}}\, 6{,}75^{10} = 30\,338\,452{,}4\ldots$; der Quotient ist 0,9903 … (die Zahlenwerte sind numerisch berechnet).

Beispiel 6 (Integralkriterium als Abschätzung). Für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ gibt Satz 13.16 mit $\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{n} - 2$:

$$2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{n} - 1.$$

Für $n = 100$: $18{,}1 \le \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} \le 19$; der Wert ist 18,589 …

Beispiel 7 (Leibniz-Reihe für π). Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gibt die geometrische Summe (Satz 1.13 mit $q = -t^2$)

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Integration über $[0,1]$ mit Folgerung 13.5 und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Abschnitt 9.9, Beispiel 5) ergibt

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt, \qquad \frac{1}{2(2n+3)} \le \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \le \frac{1}{2n+3},$$

die Schranken wegen $1 \le 1 + t^2 \le 2$ auf $[0,1]$. Der Rest strebt gegen 0, also ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Die Konvergenz der Reihe folgt schon aus dem Leibniz-Kriterium (Satz 6.16); ihr *Wert* folgt erst aus dem Hauptsatz. Für einen Fehler unter 10^{-6} braucht man nach der unteren Schranke rund eine Viertelmillion Glieder. Zum Rechnen taugt die Reihe nicht, als Beweisfigur ist sie typisch: Man schreibt den Integranden als endliche Summe plus Rest und schätzt das Integral des Restes ab. Dasselbe Verfahren mit $\frac{1}{1+t}$ statt $\frac{1}{1+t^2}$ liefert $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$; das ist bereits in Satz 11.10 (4) bewiesen, dort mit den Restgliedern aus Folgerung 11.4.

13.11 Ausblick

- **Gleichmäßige Konvergenz** (Einheit 14): Integral und Grenzwert vertauschen bei gleichmäßiger Konvergenz (Satz 14.6). Potenzreihen darf man gliedweise integrieren (Satz 14.21); bewiesen wird das über die gliedweise Differentiation (Satz 14.19) und den Hauptsatz (Folgerung 13.5). Damit erhält man etwa $\arctan x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ für $|x| < 1$ aus der geometrischen Reihe (Abschnitt 14.11, Beispiel 3).
- **Parameterintegrale** wie $\int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$ führen auf den Wert $\frac{\pi}{2}$ aus Satz 13.15; sie verlangen Vertauschungssätze, die in Analysis 2 bereitgestellt werden.
- **Die Gammafunktion** setzt sich ins Komplexe fort; ihre Pole, die Spiegelungsformel $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ und die Stirlingsche Formel für komplexe Argumente gehören in die Funktionentheorie.
- **Die Riemannsche Zetafunktion** $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$, nach Folgerung 13.17 für $s > 1$ erklärt, und die Euler-Mascheronische Konstante führen in die analytische Zahlentheorie.
- **Roter Faden Vollständigkeit.** Der Hauptsatz benutzt sie zweimal: über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz von Rolle, also Satz vom Maximum) in Satz 13.4 (2) und über die Integrierbarkeit stetiger Funktionen (gleichmäßige Stetigkeit) in Satz 13.4 (1). Uneigentliche Integrale und das Integralkriterium beruhen auf Lemma 13.13, also auf der Supremumseigenschaft; die Stirlingsche Konstante existiert, weil monotone beschränkte Folgen konvergieren. Über $\mathbb{Q}$ wäre schon $\int_0^1 e^x\, dx = e - 1$ keine Zahl des Bereichs (Satz 4.21).
- **Der Hauptsatz in mehreren Veränderlichen** wird zu den Integralsätzen von Gauß und Stokes (Analysis 2 und 3).

Zum Vergleich.[1] Hauptsatz, partielle Integration, Substitution, uneigentliche Integrale, Integralvergleichskriterium, Gammafunktion und Stirlingsche Formel stehen in Otto Forster, Analysis 1 (12. Auflage 2016), in § 19 und § 20, die Taylorformel mit Integralrestglied in § 22, Satz 1, dort mit demselben Induktionsbeweis über partielle Integration. Den Hauptsatz beweist Forster für stetige Integranden über die Integralfunktion (§ 19, Satz 1 bis 3); Satz 13.4 (2) wird hier für integrierbare Integranden mit dem Mittelwertsatz auf den Teilintervallen einer Zerlegung bewiesen. Forsters Beispiele zur Substitutionsregel enthalten in derselben Abfolge wie hier die Formel für $\int \frac{\varphi'}{\varphi}$, das Integral des Tangens, die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{1-x^2}$ und die Kreisfläche über $x = \sin t$ ((19.12) bis (19.15)); die Kreisfläche wird hier über die Wallis-Integrale ausgewertet. Die Rekursion der Wallis-Integrale und das Wallis-Produkt stehen dort als (19.23) und (19.24), dort

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

wie hier mit Einschließung zwischen benachbarten Wallis-Integralen. Das Integralvergleichskriterium ist dort § 20, Satz 1; die Existenz der Euler-Mascheronischen Konstanten mit den Schranken $\frac{1}{N} \le \sum_{n\le N} \frac{1}{n} - \ln N \le 1$ und der Monotonie dieser Folge ist Beispiel (20.8), und Satz 13.16 fasst dieses Argument für beliebige fallende Funktionen; die Reihen $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ sind dort Aufgabe 20.1. Die Funktionalgleichung der Gammafunktion ist dort Satz 2, die Kennzeichnung nach Bohr und Mollerup Satz 4, die Beta-Formel für reelle Argumente Aufgabe 20.10; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ gewinnt Forster aus der Gaußschen Limesdarstellung und daraus das Gaußsche Integral ((20.10), (20.11)), Aufgabe V1 geht den umgekehrten Weg. Der Beweis der Stirlingschen Formel in Abschnitt 13.8 folgt im Gerüst Forsters Beweis von § 20, Satz 6: dieselbe Folge $\frac{n!\,e^n}{n^{n+1/2}}$, dieselbe Darstellung ihres Logarithmus als 1 minus die Summe der Trapezfehler des Logarithmus und dieselbe Bestimmung der Konstanten über den Quotienten a_n^2/a_{2n} und das Wallis-Produkt. Forster schätzt die Trapezfehler mit dem Restglied der Trapezregel (§ 19, Satz 7) ab und beweist im Zusatz zu Satz 6 die Schranke $e^{1/(12n)}$; hier werden sie mit Sehne und Mittelpunktstangente des Logarithmus abgeschätzt (vergleichbar der Tangentenregel in Forsters Aufgabe 19.13), was die gröbere Schranke $e^{1/(8n)}$ ergibt. Forster nennt für $n = 10$ und $n = 100$ ebenfalls die Größe des relativen Fehlers und den Wert von 100!. Die Asymptotik $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ ist dort Aufgabe 20.7 (hier zweite Form von Satz 13.8 und Beispiel 5 (b)). Die Konvergenzfrage für $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ ist dort Aufgabe 20.6; Aufgabe B4 behandelt den Teil über $[1,\infty)$ zusammen mit der absoluten Konvergenz. Das Übungsbuch zur Analysis 1 von Forster und Wessoly (5. Auflage 2011) enthält in § 20 die Aufgaben zu $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ (20 A), zur Asymptotik von $\binom{2n}{n}$ (20 D, mit Lösung über die Stirlingsche Formel) und zur Beta-Funktion (20 G), ferner eine Reihendarstellung der Euler-Mascheronischen Konstanten (20 C), die Aufgabe V3 auf anderem Weg ergänzt.

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 13

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Berechnen Sie mit partieller Integration:

(a) $\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx$,

(b) $\int_1^e x\ln x\,dx$,

(c) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$ (führen Sie es auf ein Wallis-Integral zurück).

R2. Berechnen Sie mit der Substitutionsregel:

(a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$,

(b) $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^3 x\,dx$,

(c) $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$,

(d) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

R3. Entscheiden Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$,

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$ (Partialbruchzerlegung wie am Ende von Abschnitt 13.4). Vergleichen Sie den Wert mit $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = 1$ (Einheit 6, Abschnitt 6.1, Beispiel Teleskopreihe) und mit der Schranke $0 \le \lim d_n \le f(1)$ aus Satz 13.16.

(c) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$,

(d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ (Substitution $x = \sin^2 t$).

R4. (Reste konvergenter Reihen) Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ und $f\colon [k_0,\infty) \to [0,\infty)$ fallend mit konvergentem Integral $\int_{k_0}^\infty f$.

(a) Zeigen Sie für $n \ge k_0$: $\int_{n+1}^\infty f \le \sum_{k=n+1}^\infty f(k) \le \int_n^\infty f$.

(b) Sei $s > 1$ und $r_n = \sum_{k=n+1}^\infty k^{-s}$. Zeigen Sie $\frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} \le r_n \le \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$ (für $s = 2$ vergleichen Sie mit Einheit 6, Aufgabe R3 (b)). Zeigen Sie für $s = 3$: Mit $n = 708$ Gliedern ist $r_n < 10^{-6}$, mit $n \le 706$ Gliedern nicht.

(c) Wie viele Glieder der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ (Folgerung 13.17 (2)) muss man summieren, damit der Rest kleiner als $\frac{1}{100}$ ist? Eine Größenordnung genügt.

R5. Leiten Sie aus Satz 13.21 die Abschätzung

$$\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\, e^{-1/(4n)} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\, e^{1/(16n)}$$

her und prüfen Sie sie für $n = 10$, wo $\binom{20}{10} = 184\,756$ ist.

Stufe B – Beweisen

B1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode $p > 0$, das heißt $f(x + p) = f(x)$ für alle x, und sei $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Zeigen Sie mit dem Hauptsatz: $\int_a^{a+p} f(t)\,dt$ hängt nicht von a ab.

(b) Zeigen Sie: F ist genau dann periodisch mit Periode p, wenn $\int_0^p f = 0$.

(c) Sei $m = \frac{1}{p}\int_0^p f$. Zeigen Sie, dass $F(x) - mx$ periodisch mit Periode p und beschränkt ist, und folgern Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = m$.

(d) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \sin^2 t\,dt$.

B2. Sei $r > 0$ und $f : [0, r) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar mit $f^{(k)}(x) \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in [0, r)$. Sei $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

(a) Zeigen Sie mit Satz 13.9 und einer linearen Substitution: $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1 - s)^n f^{(n+1)}(xs)\,ds$ für $0 \leq x < r$.

(b) Zeigen Sie für $0 \leq x < y < r$: $0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

(c) Folgern Sie: Für jedes $x \in [0, r)$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ gegen $f(x)$.

(d) Zeigen Sie durch Induktion, dass es Polynome P_k mit nichtnegativen Koeffizienten gibt mit $\tan^{(k)} = P_k \circ \tan$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folgern Sie, dass die Taylorreihe von tan in 0 für $|x| < \frac{\pi}{2}$ gegen $\tan x$ konvergiert, und bestimmen Sie ihre ersten drei von null verschiedenen Glieder.

B3. (Beta-Integrale) Zeigen Sie für $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_0^1 x^m (1 - x)^n\,dx = \frac{m!\,n!}{(m + n + 1)!}.$$

B4. Sei $s > 0$. Zeigen Sie: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}\,dx$ konvergiert; es konvergiert genau dann absolut, wenn $s > 1$.

B5. Sei I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g, h : J \to I$ differenzierbar auf einem Intervall J. Sei $\Phi(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$ für $x \in J$. Zeigen Sie

$$\Phi'(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x),$$

und berechnen Sie damit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ und $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt$.

Stufe V – Vertiefen

V1. (Gaußsches Integral) Zeigen Sie $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und folgern Sie $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Gehen Sie so vor:

(a) $(1-x^2)^n \le e^{-nx^2}$ für $x \in [0,1]$ und $e^{-nx^2} \le (1+x^2)^{-n}$ für alle x.

(b) Mit $G = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ gilt $\sqrt{n}\,I_{2n+1} \le G \le \sqrt{n}\,I_{2n-2}$ für $n \ge 1$, mit den Wallis-Integralen I_k aus Lemma 13.7.

(c) $nI_{2n+1}^2 \to \frac{\pi}{4}$ und $nI_{2n-2}^2 \to \frac{\pi}{4}$.

V2. (a) Zeigen Sie, dass $\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx$ konvergiert, aber nicht absolut, obwohl $\sin(e^x)$ für $x \to \infty$ keinen Grenzwert hat. (b) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die $\int_0^\infty e^{(1-s)x}\sin(e^x)\,dx$ konvergiert, und alle, für die es absolut konvergiert.

V3. Sei $d_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ und $\gamma = \lim d_n$ (Folgerung 13.17). Zeigen Sie

$$\frac{1}{2(n+1)} \le d_n - \gamma \le \frac{1}{2n}$$

und bestimmen Sie daraus γ auf zwei Nachkommastellen; benutzen Sie $d_{10} = 0{,}62638\ldots$

V4. Zeigen Sie, dass $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ konvergiert, und berechnen Sie es: Der Wert ist $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Lösungen

Lösung R1. (a) Mit $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$; nach der Kettenregel (Satz 10.6) ist $g'(x) = \cos(2x)$:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = \Big[\frac{x}{2}\sin(2x)\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,dx = 0 - \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}.$$

Der Randterm verschwindet wegen $\sin\pi = \sin 0 = 0$, und $\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Dass der Wert negativ ist, obwohl $x \geq 0$ ist, sieht man auch ohne Rechnung: Die Spiegelung $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ führt $\cos(2x)$ in $-\cos(2x)$ über und vertauscht die Hälfte $[0, \frac{\pi}{4}]$, auf der $\cos(2x) \geq 0$ ist, mit der Hälfte $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, auf der $\cos(2x) \leq 0$ ist; auf der zweiten Hälfte ist der Faktor x größer.

(b) Mit $f = \ln$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$:

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \Big[\frac{x^2}{2}\ln x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

(c) Die Substitution $x = \frac{\pi}{2} - s$ (Satz 13.10) führt $\cos^5 x$ wegen $\cos(\frac{\pi}{2} - s) = \sin s$ (Satz 9.28 (2)) in $\sin^5 s$ über und vertauscht die Grenzen; also ist $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx = I_5$. Nach Lemma 13.7 ist $I_5 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{8}{15}$.

Lösung R2. (a) $\varphi(x) = 1 + x^2$, $\varphi'(x) = 2x$: $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln 2$.

(b) $\varphi = \cos$, $\varphi' = -\sin$: $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^3 x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\varphi'(x)\,dx = -\int_1^0 u^3\,du = \frac{1}{4}$.

(c) $\varphi(x) = x^2$: $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{e}\big)$.

(d) $\varphi(x) = 1 + x$, also $x = u - 1$: $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int_1^4 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \Big[\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\Big]_1^4 = \Big(\frac{16}{3} - 4\Big) - \Big(\frac{2}{3} - 2\Big) = \frac{8}{3}$.

Lösung R3. (a) Konvergent, $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = \Gamma(3) = 2! = 2$ (Satz 13.18).

(b) Konvergent mit Wert $\ln 2$. Es ist $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, also für $c > 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x(x+1)} = \big[\ln x - \ln(x+1)\big]_1^c = \ln\frac{c}{c+1} + \ln 2 \to \ln 2 \qquad (c \to \infty),$$

weil $\frac{c}{c+1} \to 1$ und $\ln$ in 1 stetig ist. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ ist auf $[1,\infty)$ positiv und fallend; nach Satz 13.16 strebt $d_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f$ gegen $1 - \ln 2 \approx 0{,}31$, und das liegt wie verlangt in $[0, f(1)] = [0, \frac{1}{2}]$. Summe und Integral haben verschiedene Werte; das Integralkriterium vergleicht nur ihr Konvergenzverhalten.

(c) Konvergent: $\int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \arctan c \to \frac{\pi}{2}$. Denn arctan ist wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ab (Satz 9.31), also $[0,\infty)$ auf $[0, \frac{\pi}{2})$; nach Lemma 13.13 (1) ist der Grenzwert das Supremum $\frac{\pi}{2}$ dieser Menge.

(d) Kritisch sind beide Endpunkte. Wir teilen bei $\frac{1}{2}$ (Definition 13.11 (2)). Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ sei $\tau = \arcsin\sqrt{\varepsilon}$; die Funktion $\varphi(t) = \sin^2 t$ bildet $[\tau, \frac{\pi}{4}]$ stetig differenzierbar auf $[\varepsilon, \frac{1}{2}]$ ab, mit $\varphi'(t) = 2\sin t\cos t$ und $\sqrt{\varphi(t)(1-\varphi(t))} = \sin t\cos t$ (beide Faktoren positiv). Nach Satz 13.10:

$$\int_\varepsilon^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_\tau^{\pi/4} \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\,dt = 2\Big(\frac{\pi}{4} - \tau\Big) \to \frac{\pi}{2} \qquad (\varepsilon \to 0),$$

denn $\tau \to 0$ wegen der Stetigkeit von arcsin in 0. Ebenso, oder mit der Symmetrie $x \mapsto 1-x$, ist $\int_{1/2}^1 = \frac{\pi}{2}$. Das Integral konvergiert und hat den Wert π.

Lösung R4. (a) Wie im Beweis von Satz 13.16 ist $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f \le f(k)$ für $k \ge k_0$, und die Reihe konvergiert nach Satz 13.16 (mit Start bei k_0). Für $N > n$ folgt durch Summation und Satz 12.11

$$\int_{n+1}^{N+1} f = \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f \le \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \le \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} f = \int_n^N f \le \int_n^\infty f,$$

die letzte Ungleichung nach Lemma 13.13 (3), weil $c \mapsto \int_n^c f$ wegen $f \ge 0$ wachsend ist und $\int_n^\infty f$ nach Folgerung 13.22 (1) konvergiert. Für $N \to \infty$ strebt die linke Seite gegen $\int_{n+1}^\infty f$, die Summe gegen $\sum_{k=n+1}^\infty f(k)$, und die Ungleichungen bleiben erhalten (Satz 4.10).

(b) $f(x) = x^{-s}$ ist auf $[1,\infty)$ positiv und fallend, und wie im Beweis von Satz 13.12 (1) ist $\int_c^\infty x^{-s}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{c^{1-s}-R^{1-s}}{s-1} = \frac{c^{1-s}}{s-1}$ für $c \ge 1$. Einsetzen von $c = n+1$ und $c = n$ in (a) ergibt die Behauptung. Für $s = 2$ lautet sie $\frac{1}{n+1} \le r_n \le \frac{1}{n}$; das sind die Schranken aus Einheit 6, Aufgabe R3 (b), die dort mit Teleskopsummen und sogar mit strikten Ungleichungen gewonnen wurden. Das Integral ersetzt die Teleskopsumme und liefert die Schranken für jedes $s > 1$ zugleich. Für $s = 3$ ist $\frac{1}{2(n+1)^2} \le r_n \le \frac{1}{2n^2}$. Für $n = 708$ ist $2\cdot 708^2 = 1\,002\,528 > 10^6$, also $r_{708} < 10^{-6}$. Für $n \le 706$ ist, weil r_n in n fällt, $r_n \ge r_{706} \ge \frac{1}{2\cdot 707^2} = \frac{1}{999\,698} > 10^{-6}$. Für $n = 707$ entscheiden die Schranken nicht, denn $\frac{1}{2\cdot 708^2} < 10^{-6} < \frac{1}{2\cdot 707^2}$; numerisch ist $r_{707} \approx 9{,}989\cdot 10^{-7}$, es genügen also schon 707 Glieder.

(c) $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ ist auf $[2,\infty)$ positiv und fallend, $-\frac{1}{\ln x}$ ist eine Stammfunktion (Folgerung 13.17 (2)), also $\int_c^\infty f = \frac{1}{\ln c}$ für $c \ge 2$. Nach (a) mit $k_0 = 2$ liegt der Rest nach dem Glied mit dem Index n (das sind $n-1$ Glieder) zwischen $\frac{1}{\ln(n+1)}$ und $\frac{1}{\ln n}$. Er ist kleiner als $\frac{1}{100}$, sobald $\ln n > 100$, also $n > e^{100}$; er ist mindestens $\frac{1}{100}$, solange $\ln(n+1) \le 100$, also $n \le e^{100} - 1$. Man braucht also etwa $e^{100} \approx 2{,}7\cdot 10^{43}$ Glieder. Die Reihe konvergiert,

aber zum Ausrechnen ihres Wertes (etwa 2,11, numerisch) taugen ihre Partialsummen nicht.

Lösung R5. Nach Satz 13.21 ist $n! = s_n\vartheta_n$ mit $s_n = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ und $1 < \vartheta_n \le e^{1/(8n)}$. Es ist

$$\frac{s_{2n}}{s_n^2} = \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{2\pi n\, n^{2n}e^{-2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}, \qquad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\vartheta_{2n}}{\vartheta_n^2}.$$

Wegen $1 < \vartheta_{2n} \le e^{1/(16n)}$ und $1 < \vartheta_n^2 \le e^{1/(4n)}$ ist $e^{-1/(4n)} \le \frac{\vartheta_{2n}}{\vartheta_n^2} < e^{1/(16n)}$, und links gilt sogar $<$ statt $\le$ wegen $\vartheta_{2n} > 1$. Für $n = 10$: $\frac{4^{10}}{\sqrt{10\pi}} = 187\,078{,}9\ldots$, die Schranken sind 182 460 und 188 252 (gerundet), und 184 756 liegt dazwischen.

Lösung B1. (a) Nach Satz 13.4 (1) ist F eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}$, und nach Folgerung 13.5 ist $G(a) = \int_a^{a+p} f = F(a+p) - F(a)$. Nach der Kettenregel (Satz 10.6) ist G differenzierbar mit $G'(a) = f(a+p) - f(a) = 0$. Nach Folgerung 10.15 (1) ist G konstant.

(b) Nach (a) ist $F(x+p)-F(x) = G(x) = G(0) = \int_0^p f$ für alle x. Also gilt $F(x+p) = F(x)$ für alle x genau dann, wenn $\int_0^p f = 0$.

(c) Für $H(x) = F(x) - mx$ ist nach (b) $H(x+p) - H(x) = \int_0^p f - mp = 0$. H ist stetig, nach dem Satz vom Maximum (Satz 8.16) also auf $[0, p]$ beschränkt, etwa $|H| \le K$ dort. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es $j \in \mathbb{Z}$ mit $jp \le x < (j+1)p$ (nach Lemma 2.30 mit $j = \lfloor x/p \rfloor$), und durch Induktion über $|j|$ folgt $H(x) = H(x - jp)$ mit $x - jp \in [0, p)$; also ist $|H| \le K$ auf ganz $\mathbb{R}$. Für $x > 0$ ist

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = m + \frac{H(x)}{x}, \qquad \Big|\frac{H(x)}{x}\Big| \le \frac{K}{x} \to 0.$$

(d) $\sin^2$ ist stetig mit Periode π, denn $\sin(t+\pi) = -\sin t$ (Satz 9.28 (2)), und $\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$ (Abschnitt 13.3, Beispiel (c)). Also $m = \frac{1}{2}$, und der Grenzwert ist $\frac{1}{2}$.

Deutung. Das Integral einer periodischen Funktion wächst im Mittel linear mit der Steigung m; periodisch ist es nur, wenn der Mittelwert über eine Periode verschwindet. Vergleichen Sie mit (G6): Dort ist $\int_0^N \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{N}{2}$ genau dieses lineare Wachstum.

Lösung B2. (a) f ist $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, denn jede Ableitung ist differenzierbar, also stetig (Folgerung 10.3); Satz 13.9 mit $a = 0$ gibt $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$. Satz 13.10 mit $\varphi(s) = xs$ auf $J = [0,1]$, $\varphi'(s) = x$, ergibt

$$\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 (x-xs)^n f^{(n+1)}(xs)\,x\,ds = x^{n+1}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(xs)\,ds.$$

(b) Der Integrand in (a) ist nichtnegativ, also $R_n(x) \geq 0$ (Satz 12.10). Wegen $f^{(n+2)} \geq 0$ ist $f^{(n+1)}$ wachsend (Folgerung 10.15 (2)). Für $0 < x < y$ und $s \in [0,1]$ ist $xs \leq ys$, also $(1-s)^n f^{(n+1)}(xs) \leq (1-s)^n f^{(n+1)}(ys)$, und nach (a) und Satz 12.10

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(xs)\,ds \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(ys)\,ds = \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}.$$

Da alle Summanden $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}y^k$ nichtnegativ sind, ist $R_n(y) \leq f(y)$. Zusammen: $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$. Für $x = 0$ ist $R_n(0) = 0$.

(c) Zu $x \in [0,r)$ wähle y mit $x < y < r$. Dann ist $0 \leq \frac{x}{y} < 1$, also $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y) \to 0$ (Satz 4.4 (2)), und nach (b) und Satz 4.11 gilt $R_n(x) \to 0$. Das heißt, die Partialsummen streben gegen $f(x)$.

(d) $P_0(u) = u$. Ist $\tan^{(k)} = P_k \circ \tan$, so gibt die Kettenregel mit $\tan' = 1 + \tan^2$ (Folgerung 10.19 (2))

$$\tan^{(k+1)} = (P_k' \circ \tan)\cdot(1+\tan^2) = P_{k+1} \circ \tan, \qquad P_{k+1}(u) = P_k'(u)\,(1+u^2),$$

und mit P_k hat auch P_{k+1} nichtnegative Koeffizienten. Auf $[0, \frac{\pi}{2})$ ist $\tan \geq 0$, also $\tan^{(k)} \geq 0$ dort für alle k. Nach (c) mit $r = \frac{\pi}{2}$ konvergiert die Taylorreihe für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ gegen $\tan x$. Für $-\frac{\pi}{2} < x < 0$: tan ist ungerade, die Ableitung einer ungeraden Funktion ist gerade und umgekehrt (aus $g(-x) = \pm g(x)$ folgt mit der Kettenregel $-g'(-x) = \pm g'(x)$); daher sind die Ableitungen gerader Ordnung ungerade Funktionen und verschwinden in 0. Die Reihe enthält nur ungerade Potenzen, nimmt in x also den Wert $-\sum_k \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}|x|^k = -\tan|x| = \tan x$ an. Aus $P_1 = 1+u^2$, $P_2 = 2u+2u^3$, $P_3 = 2+8u^2+6u^4$, $P_4 = 16u+40u^3+24u^5$ und $P_5(0) = P_4'(0) = 16$ folgt $\tan'(0) = 1$, $\tan'''(0) = 2$, $\tan^{(5)}(0) = 16$, also

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Bemerkung. Die Lagrange-Form $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ allein liefert keine obere Schranke für $f^{(n+1)}(\xi)$. Mit der Monotonie von $f^{(n+1)}$ und der Taylorformel im Punkt x erhält man zwar $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y-x}\right)^{n+1} f(y)$, aber das ergibt die Konvergenz nur für $0 \leq x < \frac{r}{2}$, beim Tangens nur für $|x| < \frac{\pi}{4}$. Erst die Integralform zeigt, dass $R_n(x)/x^{n+1}$ in x wächst, und gibt die Konvergenz auf ganz $[0,r)$. Die Koeffizienten der Tangensreihe braucht man dafür nicht zu kennen.

Lösung B3. Sei $B(m,n) = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$. Für $n=0$ ist $B(m,0) = \frac{1}{m+1} = \frac{m!\,0!}{(m+1)!}$. Für $n \geq 1$ partiell mit $f(x) = (1-x)^n$, $g(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$:

$$B(m,n) = \Big[\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\Big]_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{n}{m+1}B(m+1,n-1),$$

denn der Randterm verschwindet an beiden Grenzen. Induktion über n (für alle m zugleich): Gilt die Formel für $n-1$, so ist

$$B(m,n) = \frac{n}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!\,(n-1)!}{(m+n+1)!} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

Zum Beispiel $\int_0^1 x^3(1-x)^2\,dx = \frac{6\cdot 2}{720} = \frac{1}{60}$. *Ausblick:* Allgemein gilt $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ für $p,q>0$; das wird hier nicht bewiesen.

Lösung B4. *Konvergenz.* Für $c>1$ partiell mit $f(x)=x^{-s}$, $g=-\cos$:

$$\int_1^c \frac{\sin x}{x^s}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos c}{c^s} - s\int_1^c \frac{\cos x}{x^{s+1}}\,dx.$$

Wegen $s>0$ strebt $\frac{\cos c}{c^s}$ gegen 0, und $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{s+1}}\,dx$ konvergiert absolut nach Satz 13.14 mit der Majorante x^{-s-1} und Satz 13.12 ($s+1>1$).

Absolut für $s>1$: Majorante x^{-s}.

Nicht absolut für $0<s\leq 1$: Es ist $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Also

$$\int_1^c \frac{|\sin x|}{x^s}\,dx \geq \frac{1}{2}\int_1^c \frac{dx}{x^s} - \frac{1}{2}\int_1^c \frac{\cos 2x}{x^s}\,dx.$$

Das zweite Integral hat für $c\to\infty$ einen Grenzwert (dieselbe partielle Integration wie oben, mit $\frac{1}{2}\sin 2x$ als Stammfunktion von $\cos 2x$), das erste strebt nach Satz 13.12 gegen ∞. Also divergiert $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^s}\,dx$.

Lösung B5. Sei F eine Stammfunktion von f auf I (Satz 13.4 (1)). Dann ist $\Phi(x) = F(h(x)) - F(g(x))$ (Folgerung 13.5), und die Kettenregel ergibt die Behauptung.

Erster Grenzwert. Zähler $Z(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$ und Nenner x^3 streben gegen 0; $Z'(x) = \sin(x^2)$. Nach de l'Hospital (Satz 10.20, auf beiden Seiten von 0 angewandt, mit Lemma 7.8) ist der Grenzwert gleich $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$, weil $\frac{\sin u}{u}\to 1$ (Folgerung 9.25 (3)).

Zweiter Grenzwert. Zähler $\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt \to 0$, Ableitung nach der Formel $2e^{4x^2} - e^{x^2} \to 1$; Nenner x mit Ableitung 1. Der Grenzwert ist 1. Ohne de l'Hospital: Nach Satz 12.18 (2) ist das Integral gleich $x\,e^{\xi^2}$ mit ξ zwischen x und $2x$, und $e^{\xi^2}\to 1$.

Lösung V1. (a) Mit $e^u \geq 1+u$ (Satz 9.7 (2)) und $u = -x^2$ ist $e^{-x^2} \geq 1-x^2$; für $x \in [0,1]$ ist $1-x^2 \geq 0$, und Potenzieren mit n erhält die Ungleichung. Mit $u = x^2$ ist $e^{x^2} \geq 1+x^2$, also $e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, und wieder potenzieren.

(b) G konvergiert (Abschnitt 13.5, Beispiel (a) nach Folgerung 13.24). Die Substitution $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$ (Satz 13.23 mit $\varphi(y) = \frac{y}{\sqrt{n}}$) und Folgerung 13.22 (2) geben $\int_0^\infty e^{-nx^2}\,dx = \frac{G}{\sqrt{n}}$. Aus (a), Lemma 13.13 (3) für das Teilstück $[0,1]$ und Folgerung 13.22 (3) (alle Integranden positiv):

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx \leq \frac{G}{\sqrt{n}} \leq \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Das rechte Integral konvergiert für $n \geq 1$ mit der Majorante $\frac{1}{1+x^2}$ (R3 (c)).

Linkes Integral. Mit $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ist $(1-\sin^2 t)^n \cos t = \cos^{2n+1} t$, also $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt = I_{2n+1}$ (wie in R1 (c)).

Rechtes Integral. Für $R > 0$ mit $x = \tan t$, $t \in [0, \arctan R]$, $\tan' = 1 + \tan^2$ (Folgerung 10.19 (2)) und $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$:

$$\int_0^R \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\arctan R} \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^n}\,dt = \int_0^{\arctan R} \cos^{2n-2} t\,dt.$$

Für $R \to \infty$ strebt $\arctan R$ gegen $\frac{\pi}{2}$, und wegen der Stetigkeit der Integralfunktion (Satz 13.3) strebt das Integral gegen $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\,dt = I_{2n-2}$. Multiplikation mit $\sqrt{n}$ ergibt (b).

(c) Nach Lemma 13.7 (3) und (4): $I_{2n+2}I_{2n+1} \leq I_{2n+1}^2 \leq I_{2n+1}I_{2n}$, also

$$\frac{\pi}{2(2n+2)} \leq I_{2n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2(2n+1)},$$

und $nI_{2n+1}^2 \to \frac{\pi}{4}$. Ebenso für $n \geq 2$: $I_{2n-1}I_{2n-2} \leq I_{2n-2}^2 \leq I_{2n-2}I_{2n-3}$, also $\frac{\pi}{2(2n-1)} \leq I_{2n-2}^2 \leq \frac{\pi}{2(2n-2)}$ und $nI_{2n-2}^2 \to \frac{\pi}{4}$.

Schluss. Nach (b) ist $nI_{2n+1}^2 \leq G^2 \leq nI_{2n-2}^2$ für jedes n; beide Seiten streben gegen $\frac{\pi}{4}$. Also $G^2 = \frac{\pi}{4}$ und, da $G > 0$, $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Gammafunktion. Für $0 < \varepsilon < R$ gibt $t = x^2$, $x \in [\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{R}]$ (Satz 13.10; der Grenzübergang ist Satz 13.23 an beiden kritischen Stellen):

$$\int_\varepsilon^R t^{-1/2} e^{-t}\,dt = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{R}} \frac{1}{x} e^{-x^2}\,2x\,dx = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{R}} e^{-x^2}\,dx \to 2G = \sqrt{\pi}.$$

Also $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, und mit der Funktionalgleichung $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

Lösung V2. (a) Der Integrand ist auf $[0, \infty)$ stetig; die einzige kritische Stelle ist ∞. Die Funktion $\varphi = \exp$ ist auf $[0, \infty)$ stetig differenzierbar und streng wachsend mit $\varphi(0) = 1$, $\varphi' = \varphi$ und $\varphi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ (Satz 9.8, Satz 10.9). Für die auf $[1, \infty)$ stetige Funktion $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ ist $f(\varphi(x))\,\varphi'(x) = \frac{\sin(e^x)}{e^x}\,e^x = \sin(e^x)$. Nach Satz 13.23 (mit $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, $a = 1$, $b = \infty$) konvergiert $\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx$ genau dann, wenn $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ konvergiert, und das gilt nach B4 mit $s = 1$. Ebenso, mit der stetigen Funktion $|f|$ statt f, konvergiert $\int_0^\infty |\sin(e^x)|\,dx$ genau dann, wenn $\int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ konvergiert, und das ist nach B4 nicht der Fall. Schließlich ist $\sin(e^{x_k}) = 1$ für $x_k = \ln(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ und $\sin(e^{y_k}) = 0$ für $y_k = \ln(k\pi)$, $k \in \mathbb{N}$; beide Folgen streben gegen ∞ (Folgerung 9.14 mit dem Folgenkriterium, Absatz nach Definition 7.7). Hätte $\sin(e^x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert, so strebten nach demselben Folgenkriterium $\sin(e^{x_k}) = 1$ und $\sin(e^{y_k}) = 0$ gegen ihn; also hat $\sin(e^x)$ für $x \to \infty$ keinen Grenzwert. Anders als in (G5) verschwindet der Integrand nicht auf langen Stücken. Er schwankt immer schneller zwischen -1 und 1: Benachbarte Nullstellen $\ln(k\pi)$ und $\ln((k+1)\pi)$ haben den Abstand $\ln(1 + \frac{1}{k}) \le \frac{1}{k}$ (Satz 9.13 (2)), und die Beiträge benachbarter Bögen heben sich zunehmend auf.

(b) Für $x \ge 0$ ist $e^{(1-s)x} = \frac{e^x}{(e^x)^s}$, denn $(e^x)^s = \exp(s \ln e^x) = e^{sx}$ (Definition 9.15). Also ist $e^{(1-s)x}\sin(e^x) = f_s(e^x)\,e^x$ mit der auf $[1, \infty)$ stetigen Funktion $f_s(t) = \frac{\sin t}{t^s}$. Nach Satz 13.23, angewandt auf f_s und auf $|f_s|$, konvergiert das Integral genau dann (absolut), wenn $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^s}\,dt$ (absolut) konvergiert. Für $s > 0$ entscheidet B4: Konvergenz für alle $s > 0$, absolute Konvergenz genau für $s > 1$.

Für $s \le 0$ divergiert das Integral. Sei $G(c) = \int_1^c \frac{\sin t}{t^s}\,dt$ für $c \ge 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ und $t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ ist $\sin t \ge 0$ und $t^{-s} \ge 1$ (Satz 9.17 (3), weil $t \ge 1$ und $-s \ge 0$), also nach Satz 12.10

$$G((2k+1)\pi) - G(2k\pi) = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin t}{t^s}\,dt \ge \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin t\,dt = 2.$$

Hätte G für $c \to \infty$ einen Grenzwert L, so strebten $G((2k+1)\pi)$ und $G(2k\pi)$ für $k \to \infty$ beide gegen L (Folgenkriterium, Absatz nach Definition 7.7), ihre Differenz also gegen 0 (Satz 4.9), im Widerspruch zur Ungleichung. Also divergiert das Integral für $s \le 0$, und nach Satz 13.14 konvergiert es dann auch nicht absolut.

Ergebnis: Das Integral konvergiert genau für $s > 0$ und absolut genau für $s > 1$; der Fall $s = 1$ ist (a). Numerisch ist $\int_0^\infty \sin(e^x)\,dx = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = 0{,}6247\ldots$

Lösung V3. Es ist $d_n - d_{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1}$, und $d_n - \gamma = \sum_{k=n}^\infty (d_k - d_{k+1})$.

Obere Schranke. Auf $[n, n+1]$ liegt $\frac{1}{x}$ unter der Sehne: Die Sehne ist $s(x) = \frac{2n+1-x}{n(n+1)}$, und

$$s(x) - \frac{1}{x} = \frac{(x-n)(n+1-x)}{x\,n(n+1)} \geq 0.$$

Integration ergibt $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\big)$, also $d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{2}\big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\big)$. Summation über $k \geq n$ (Teleskop) gibt $d_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$.

Untere Schranke. Mit $\mu = n + \frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{x} - \frac{1}{\mu} + \frac{x-\mu}{\mu^2} = \frac{(x-\mu)^2}{x\mu^2} \geq 0$; die Tangente in μ liegt unter dem Graphen. Wegen $\int_n^{n+1}(x-\mu)\,dx = 0$ folgt $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{\mu}$ und

$$d_n - d_{n+1} \geq \frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+\frac{1}{2})(n+1)} \geq \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big).$$

Summation gibt $d_n - \gamma \geq \frac{1}{2(n+1)}$.

Zahlenwert. Mit $d_{10} = 0{,}62638\ldots$ folgt $0{,}62638 - 0{,}05 \leq \gamma \leq 0{,}62638 - 0{,}04545$, also $0{,}5763 \leq \gamma \leq 0{,}5810$. Auf zwei Nachkommastellen: $\gamma = 0{,}58$ (gerundet; der Wert d_{10} ist numerisch berechnet).

Lösung V4. *Konvergenz.* Auf $(0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq 1$ (Folgerung 11.25 (4)), also $\ln\frac{2x}{\pi} \leq \ln\sin x \leq 0$ und $|\ln\sin x| \leq -\ln\frac{2x}{\pi}$. Mit $x = \frac{\pi}{2}u$ (Satz 13.23 auf $(0,1]$) und Abschnitt 13.10, Beispiel 2, ist $\int_0^{\pi/2} \ln\frac{2x}{\pi}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \ln u\,du = -\frac{\pi}{2}$; nach Satz 13.14 und Folgerung 13.22 (2) konvergiert $I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ absolut.

Wert. Wir rechnen nur mit eigentlichen Integralen und gehen am Schluss einmal zur Grenze. Sei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ und $J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \ln\sin x\,dx$. Mit $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ (Satz 13.10, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$) ist auch $\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \ln\cos x\,dx = J(\varepsilon)$. Wegen $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ (Satz 9.22), also $\ln\sin x + \ln\cos x = \ln\sin 2x - \ln 2$, und Satz 12.10 ist

$$2J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \ln\sin 2x\,dx - \Big(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\Big)\ln 2.$$

Mit $t = 2x$ und danach $t \mapsto \pi - t$ auf $[\frac{\pi}{2}, \pi - 2\varepsilon]$ (wegen $\sin(\pi - t) = -\sin(-t) = \sin t$, Satz 9.28 (2)):

$$\int_\varepsilon^{\pi/2-\varepsilon} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_{2\varepsilon}^{\pi-2\varepsilon} \ln\sin t\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int_{2\varepsilon}^{\pi/2} \ln\sin t\,dt + \int_{2\varepsilon}^{\pi/2} \ln\sin t\,dt\Big) = \int_{2\varepsilon}^{\pi/2} \ln\sin t\,dt.$$

Für $\varepsilon \to 0+$ streben $J(\varepsilon)$ und $\int_{2\varepsilon}^{\pi/2} \ln \sin t \, dt$ gegen I: das zweite nach Definition 13.11, das erste, weil zusätzlich $\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx \to 0$ (der Integrand ist auf $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ stetig, Satz 13.3 (1)). Also $2I = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$ und $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \approx -1{,}0888$.

Teil V

Funktionenfolgen

EINHEIT 14

Gleichmäßige Konvergenz und Potenzreihen

Leitfrage

Für $|x| < 1$ gilt nach der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Integriert man beide Seiten von 0 bis x, die rechte Seite Summand für Summand, so erhält man

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Setzt man $x = 1$ ein, so steht rechts die alternierende harmonische Reihe, und die Rechnung behauptet $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$. Das Ergebnis ist richtig: Einheit 11 hat es mit einer Abschätzung des Taylor-Restglieds bewiesen (Satz 11.10 (4)). Am Ende von Beispiel 7 (Abschnitt 13.10) nennt Einheit 13 einen zweiten Weg, ohne ihn auszuführen: Man schreibt $\frac{1}{1+t}$ als endliche geometrische Summe plus Rest, integriert und schätzt das Integral des Restes ab. Beide Wege schätzen einen Rest ab, den man für diese eine Funktion eigens ausrechnen muss. Die kurze Rechnung oben braucht keinen Rest; sie benutzt nur die geometrische Reihe. Ist sie ein Beweis?

Die Rechnung enthält zwei unbegründete Schritte. Erstens wird ein Integral mit einer unendlichen Summe vertauscht, also mit einem Grenzwert. Zweitens wird eine Formel, die nur für $|x| < 1$ hergeleitet ist, bei $x = 1$ benutzt; das heißt, der Grenzwert $x \to 1-$ wird mit der Summation vertauscht. Solche Vertauschungen sind nicht selbstverständlich. Die Funktionen $f_n(x) = x^n$ sind auf $[0, 1]$ stetig, ihr punktweiser Grenzwert ist es nicht: Er ist 0 für $x < 1$ und 1 für $x = 1$. Hier ist

$$\lim_{x \to 1-} \lim_{n \to \infty} x^n = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 1-} x^n.$$

Unter welchen Bedingungen darf man einen Grenzwert von Funktionen mit Stetigkeit, Integral und Ableitung vertauschen, und was folgt daraus für Potenzreihen? Die Antwort ist ein einziger Begriff, die gleichmäßige Konvergenz. Mit ihm macht Abschnitt 14.11 (Beispiel 2) aus der kurzen Rechnung einen Beweis, mit einer Begründung, die nicht vom Logarithmus abhängt, sondern für jede Potenzreihe gilt.

Voraussetzungen. Benutzt werden:

1. aus den Einheiten 1 bis 5: Regel 1.3 (Verneinung), die Vereinbarung $x^0 = 1$ (Abschnitt 1.6), geometrische Summe (Satz 1.13), Fakultät und Binomialkoeffizient (Definition 1.17), Binomialsatz (Satz 1.20), Dreiecksungleichung (Satz 1.23, Satz 3.10), Bernoullische Ungleichung (Satz 1.24), Satz 1.25; Regeln für Supremum und Infimum (Lemma 2.36), die erweiterte Zahlengerade (Definition 2.37), Wurzeln (Satz 2.39), Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ (Satz 2.45); die Kreisscheiben $B_r(a)$ und $\overline{B}_r(a)$ (Abschnitt 3.3); die Grundfolgen (Satz 4.4, Satz 4.32), Beschränktheit konvergenter Folgen (Satz 4.7), Rechenregeln und Erhaltung von Ungleichungen (Satz 4.9, Satz 4.10), Wurzelgrenzwerte (Satz 4.12), bestimmte Divergenz (Satz 4.14), das Monotonieprinzip (Satz 4.16), das Cauchy-Kriterium in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (Satz 4.31) und der Limes superior in $\overline{\mathbb{R}}$ (Definition 4.25, Satz 4.35);
2. aus Einheit 6: geometrische Reihe (Satz 6.2), Rechenregeln (Satz 6.3), Cauchy-Kriterium (Satz 6.4), Folgerung 6.5, Majorantenkriterium (Satz 6.10), Folgerung 6.12, Wurzelkriterium (Satz 6.14), Leibniz-Kriterium (Satz 6.16), die Teleskopreihe (Beispiel nach Satz 6.2), Abelsche partielle Summation (Lemma 6.25), Dirichlet-Kriterium (Satz 6.26) und Cauchy-Produkt (Satz 6.23);
3. aus den Einheiten 7 und 8: Grenzwerte und Stetigkeit mit ihren Regeln (Definition 7.7, Definition 7.9, Satz 7.5, Satz 7.6, Satz 7.10, Satz 7.11, Folgerung 7.12, Lemma 7.28), Stetigkeit der Wurzel (Folgerung 7.27), Endpunkte von Intervallen (Definition 7.29); Stetigkeit durch Urbilder (Satz 8.7, Lemma 8.27), Kompaktheit (Definition 8.9, Lemma 8.11, Satz 8.13), Satz vom Maximum (Satz 8.16), gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit (Definition 8.19) und der Satz von Heine (Satz 8.21);
4. aus Einheit 9: Exponentialfunktion (Definition 9.1, Satz 9.2), ihre Stetigkeit (Satz 9.6) und ihr Wachstum (Satz 9.11), $|\sin| \leq 1$ (Satz 9.21 (1)), Symmetrie von sin und cos (Satz 9.21 (2)), Logarithmus (Definition 9.12, Satz 9.8, Satz 9.19), Arcustangens (Satz 9.31) und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Abschnitt 9.9, Beispiel 5);
5. aus den Einheiten 10 und 11: Ableitung (Definition 10.1, Satz 10.2, Folgerung 10.3, Satz 10.5, Satz 10.6) mit der Bemerkung über Lokalität nach Folgerung 10.3, die Ableitungen von exp, ln, sin, cos und arctan (Satz 10.9, Satz 10.10, Folgerung 10.19), Mittelwertsatz (Satz 10.14) und Folgerung 10.15, Funktionen mit komplexen Werten (Bemerkung vor Lemma 10.22, Lemma 10.22, Folgerung 10.24); Taylorreihe (Definition 11.9), Satz 11.10 (4) und Satz 11.11;
6. aus den Einheiten 12 und 13: Ober- und Untersummen (Definition 12.2), das

Riemannsche Integrabilitätskriterium (Satz 12.6), Linearität und Monotonie (Satz 12.10), Folgerung 12.16, Integrale mit beliebigen Grenzen (Definition 12.21, Satz 12.22); Integralfunktion (Satz 13.3), Hauptsatz (Satz 13.4, Folgerung 13.5), Substitutionsregel (Satz 13.10) und uneigentliche Integrale (Definition 13.11).

Für Funktionen $f : D \to \mathbb{K}$ mit $D \subseteq \mathbb{K}$ sind Häufungspunkt, Grenzwert und Stetigkeit im Sinn der Bemerkung „Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$“ nach Folgerung 7.12 gemeint; dort ist gezeigt, dass Satz 7.5, Satz 7.6 (1) und (2), Satz 7.10, Satz 7.11, Folgerung 7.12 (Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$) und Lemma 7.28 auch für solche Funktionen gelten. Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ werden wie in der Bemerkung vor Lemma 10.22 differenziert. Der Identitätssatz für Potenzreihen ist Satz 14.28 und steht in Abschnitt 14.6.

Schreibweisen. $\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Ist $D \neq \varnothing$ eine Menge und $f : D \to \mathbb{K}$, so ist

$$\|f\|_D = \sup\{|f(x)| : x \in D\} \in [0, \infty]$$

die *Supremumsnorm* von f auf D; dabei ist $\|f\|_D = \infty$, wenn f unbeschränkt ist. Ist D aus dem Zusammenhang klar, schreiben wir $\|f\|$. Der Index bezeichnet hier die Menge, nicht wie bei $\|\boldsymbol{x}\|_r$ in Einheit 11 einen Exponenten. Für das Rechnen in $[0, \infty]$ vereinbaren wir $s + \infty = \infty + s = \infty$ für $s \in [0, \infty]$, $c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty$ für $c > 0$ und $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, ferner $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$; die Anordnung ist die aus Definition 2.37. Kreisscheiben bezeichnen wir wie in Abschnitt 3.3 mit $B_r(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z - a| < r\}$ und $\overline{B}_r(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z - a| \leq r\}$; zusätzlich sei $B_\infty(a) = \mathbb{K}$. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sind das die Intervalle $(a - r, a + r)$ und $[a - r, a + r]$.

14.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 14.1. Sei $D \neq \varnothing$ eine Menge, und seien $f_n : D \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ und $f : D \to \mathbb{K}$ Funktionen. Die Folge (f_n) *konvergiert punktweise* gegen f, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in D$ gilt, also

$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sie *konvergiert gleichmäßig* auf D gegen f, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Der Unterschied ist die Stellung des Quantors $\forall x$. Bei punktweiser Konvergenz darf N von x abhängen, bei gleichmäßiger Konvergenz muss ein N für alle x zugleich taugen. Das ist die vertauschte Quantorenreihenfolge, die Abschnitt 1.12 angekündigt hat (vergleiche (G4) der Einheit 1). Derselbe Wechsel trennt Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit (Definition 8.19): Dort muss ein δ für alle Stellen taugen, hier ein N. Aus

gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz gegen dieselbe Funktion; die Grenzfunktion ist durch die punktweisen Grenzwerte eindeutig bestimmt.

Geometrisch für reelle Funktionen: Zu $\varepsilon > 0$ lege man um den Graphen von f ein Band, das über jeder Stelle x aus den Höhen y mit $|y - f(x)| < \varepsilon$ besteht. Gleichmäßige Konvergenz verlangt, dass von einem Index N an keine der Funktionen f_n das Band an irgendeiner Stelle verlässt. Punktweise Konvergenz verlangt nur, dass über jeder einzelnen Stelle x die Werte $f_n(x)$ schließlich im Band liegen, von einem Index an, der von x abhängen darf.

Lemma 14.2. Für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{K}$ und $c \in \mathbb{K}$ gilt $\|f+g\|_D \le \|f\|_D + \|g\|_D$ und $\|cf\|_D = |c|\,\|f\|_D$. Eine Folge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen f, wenn $\|f_n - f\|_D < \infty$ für fast alle n gilt und $\|f_n - f\|_D \to 0$.

Beweis. Ist $\|f\| = \infty$ oder $\|g\| = \infty$, so ist die rechte Seite der ersten Ungleichung ∞, und nichts ist zu zeigen. Sonst ist für jedes $x \in D$ nach der Dreiecksungleichung (Satz 1.23 für $\mathbb{R}$, Satz 3.10 für $\mathbb{C}$) $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|$; also ist $\|f\| + \|g\|$ eine obere Schranke, und das Supremum ist nicht größer. Für die zweite Regel sei zuerst $c = 0$; dann sind beide Seiten 0 (Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$). Für $c \neq 0$ ist $\{|cf(x)| : x \in D\} = \{|c|\,|f(x)| : x \in D\}$. Ist f beschränkt, so gibt Lemma 2.36 (3) mit $\lambda = |c| > 0$ die Behauptung; ist f unbeschränkt, so auch cf, und beide Seiten sind ∞.

Gilt gleichmäßige Konvergenz und ist $\varepsilon > 0$, so gibt es N mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und alle x; also $\|f_n - f\| \le \varepsilon$ für $n \ge N$. Ist umgekehrt $\|f_n - f\| \to 0$ und $\varepsilon > 0$, so gibt es N mit $\|f_n - f\| < \varepsilon$ für $n \ge N$, und dann ist $|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\| < \varepsilon$ für alle x. □

Beispiel (die Potenzen). Sei $f_n(x) = x^n$ auf $D = [0,1]$. Für $0 \le x < 1$ ist $x^n \to 0$ (Satz 4.4 (2)), für $x = 1$ ist $x^n = 1$. Die punktweise Grenzfunktion ist also $f = 0$ auf $[0,1)$ und $f(1) = 1$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig: Für jedes n ist $\sup_{0 \le x < 1} x^n = 1$, denn zu $\eta \in (0,1)$ gibt es wegen der Stetigkeit von $x \mapsto x^n$ bei 1 ein $x < 1$ mit $x^n > 1 - \eta$. Also ist $\|f_n - f\|_{[0,1]} = 1$ für alle n. Auf jedem Intervall $[0,q]$ mit $0 < q < 1$ dagegen ist $\|f_n - f\|_{[0,q]} = q^n \to 0$: Dort ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beispiel (unbeschränkter Bereich). $f_n(x) = x/n$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen 0, aber $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \infty$ für alle n. Auf jeder beschränkten Menge $D \subseteq [-C, C]$ ist $\|f_n\|_D \le C/n \to 0$.

Beide Beispiele zeigen ein häufiges Muster: Die Konvergenz ist nicht auf dem ganzen Bereich gleichmäßig, wohl aber auf jedem Teilbereich, der von der schlechten Stelle Abstand hält.

Satz 14.3 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz). Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen eine Funktion

$f : D \to \mathbb{K}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N \ \forall x \in D : \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Beweisidee. Die Bedingung macht jede Zahlenfolge $(f_n(x))$ zu einer Cauchy-Folge; die Vollständigkeit liefert den Grenzwert $f(x)$. Die gleichmäßige Abschätzung überlebt den Grenzübergang $m \to \infty$, weil sie für jedes x mit demselben N gilt.

Beweis. „⇒“: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es N mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$ und alle x. Für $m, n \geq N$ folgt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

„⇐“: Für festes $x \in D$ ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$, konvergiert also nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 4.31); ihr Grenzwert sei $f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ und N wie in der Bedingung. Für $n \geq N$, $x \in D$ und jedes $m \geq N$ ist $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Lässt man bei festem n und x den Index m gegen ∞ gehen, so gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \to |f_n(x) - f(x)|$ nach Satz 4.9 (1) und (3), also $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ nach Satz 4.10. Das gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$ mit demselben N; da ε beliebig war, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f. □

Hier steht die Vollständigkeit, wie fast überall im Kurs: Ohne sie gäbe es zu einer gleichmäßigen Cauchy-Folge von Funktionen keinen Kandidaten für die Grenzfunktion.

14.2 Stetigkeit der Grenzfunktion

Satz 14.4 (Stetigkeit der Grenzfunktion). Sei $D \subseteq \mathbb{K}$, und konvergiere (f_n) gleichmäßig auf D gegen f. Ist jedes f_n an der Stelle $c \in D$ stetig, so ist f an der Stelle c stetig. Sind alle f_n auf D stetig, so ist f auf D stetig.

Beweisidee. Man vergleicht $f(x)$ mit $f(c)$ über den Umweg $f_N(x)$ und $f_N(c)$. Zwei der drei Schritte sind klein, weil f_N gleichmäßig nahe bei f liegt, der dritte, weil f_N stetig ist. Entscheidend ist, dass ein *einziges* N für x und c zugleich taugt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N mit $\|f_N - f\|_D < \varepsilon/3$. Da f_N in c stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(c)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|x - c| < \delta$. Für diese x gilt

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Die zweite Aussage folgt, indem man die erste auf jedes $c \in D$ anwendet. □

In der Sprache der Leitfrage: Ist $c \in D$ ein Häufungspunkt von D, sind die f_n stetig und konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, so gilt nach Satz 7.10

$$\lim_{x \to c} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(c) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to c} f_n(x).$$

Das Beispiel x^n auf $[0, 1]$ zeigt rückwärts gelesen, dass dort keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen kann: Die Grenzfunktion ist bei 1 unstetig. Satz 14.4 ist damit auch ein Werkzeug, gleichmäßige Konvergenz zu *widerlegen*.

Die Umkehrung gilt nicht: Ist die Grenzfunktion stetiger Funktionen stetig, so muss die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (G2). Unter zwei zusätzlichen Voraussetzungen gilt sie doch.

Satz 14.5 (Dini). Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und kompakt, etwa $K = [a, b]$. Seien $f_n : K \to \mathbb{R}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, gelte $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ für alle n und x, und konvergiere (f_n) punktweise gegen f. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig. Dasselbe gilt für monoton wachsende Folgen.

Beweisidee. Zu $\varepsilon > 0$ liegt jeder Punkt in einer der offenen Mengen, auf denen f_n weniger als ε über f liegt. Wegen der Monotonie wachsen diese Mengen mit n. Endlich viele von ihnen genügen, also genügt die letzte.

Beweis. Setze $g_n = f_n - f$. Dann sind die g_n stetig, es gilt $g_n \geq g_{n+1}$, und $g_n(x) \to 0$ für jedes $x \in K$. Daraus folgt $g_n \geq 0$: Für feste x und n ist $g_m(x) \leq g_n(x)$ für alle $m \geq n$, und der Grenzübergang $m \to \infty$ gibt $0 \leq g_n(x)$ (Satz 4.10). Sei $\varepsilon > 0$ und $U_n = \{x \in K : g_n(x) < \varepsilon\}$. Nach Satz 8.7 ist $U_n = g_n^{-1}\big((-\infty, \varepsilon)\big)$ offen in K, nach Lemma 8.27 (1) also $U_n = W_n \cap K$ mit einer offenen Menge $W_n \subseteq \mathbb{R}$. Wegen $g_{n+1} \leq g_n$ ist $U_n \subseteq U_{n+1}$. Zu jedem $x \in K$ gibt es wegen $g_n(x) \to 0$ ein n mit $x \in U_n$; die Mengen W_n überdecken also K. Da K kompakt ist (Definition 8.9), genügen endlich viele, $W_{n_1}, \dots, W_{n_r}$ mit $r \geq 1$. Mit $N = \max\{n_1, \dots, n_r\}$ folgt $K = U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_r} \subseteq U_N$. Für $n \geq N$ und $x \in K$ ist daher $0 \leq g_n(x) \leq g_N(x) < \varepsilon$, also $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Für wachsende Folgen wende man das Ergebnis auf $-f_n$ und $-f$ an. □

Für $K = [a, b]$ ist die Kompaktheit Lemma 8.11. Alle Voraussetzungen werden gebraucht: (G3) zeigt, was ohne Kompaktheit des Definitionsbereichs und ohne Monotonie geschieht.

14.3 Grenzwert und Integral

Satz 14.6 (Integral und gleichmäßiger Grenzwert). Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und konvergiere (f_n) gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f. Dann ist f Riemann-integrierbar, und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweisidee. Liegt f in einem Streifen der Breite 2ε um f_n, so unterscheiden sich Ober- und Untersummen von f und f_n um höchstens $\varepsilon(b - a)$. Was f_n an Integrierbarkeit hat, überträgt sich daher auf f.

Beweis. Für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ bezeichnen $O(g, Z)$ und $U(g, Z)$ die Ober- und Untersumme einer beschränkten Funktion g (Definition 12.2). Sei $\varepsilon > 0$ und n so ge-

wählt, dass $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Dann gilt für alle x

$$f_n(x) - \varepsilon \le f(x) \le f_n(x) + \varepsilon.$$

Insbesondere ist f beschränkt, weil f_n es ist. Auf jedem Teilintervall I_k von Z folgt $\sup_{I_k} f \le \sup_{I_k} f_n + \varepsilon$ und $\inf_{I_k} f \ge \inf_{I_k} f_n - \varepsilon$. Multipliziert mit den Längen der Teilintervalle und summiert:

$$O(f, Z) - U(f, Z) \le O(f_n, Z) - U(f_n, Z) + 2\varepsilon(b - a).$$

Nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium (Satz 12.6) gibt es eine Zerlegung Z mit $O(f_n, Z) - U(f_n, Z) < \varepsilon$. Für diese ist $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon(1 + 2(b-a))$. Da ε beliebig war, ist f nach Satz 12.6 integrierbar.

Für jedes n mit $\|f - f_n\| < \infty$ gilt $|f(x) - f_n(x)| \le \|f - f_n\|$ für alle x. Aus Linearität (Satz 12.10) und der Betragsabschätzung (Satz 12.22 (3)) folgt

$$\Big|\int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n\,dx\Big| = \Big|\int_a^b (f - f_n)\,dx\Big| \le (b-a)\,\|f - f_n\| \to 0. \qquad \square$$

Folgerung 14.7. Unter den Voraussetzungen von Satz 14.6 konvergieren die Funktionen $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Beweis. Für $x \in [a, b]$ und n mit $\|f_n - f\| < \infty$ ist nach Satz 12.22 (3), angewandt mit den Grenzen a und x, die Differenz $|F_n(x) - F(x)| \le (x - a)\|f_n - f\| \le (b - a)\|f_n - f\|$, und die rechte Seite hängt nicht von x ab. $\square$

Ohne gleichmäßige Konvergenz versagt Satz 14.6 in beiden Teilen: Die Grenzfunktion kann integrierbar sein und trotzdem das falsche Integral haben (G4), und sie muss nicht einmal integrierbar sein (G5). Der Satz ist auf beschränkte Intervalle beschränkt; für uneigentliche Integrale über $[0, \infty)$ genügt gleichmäßige Konvergenz nicht (G6).

14.4 Grenzwert und Ableitung

Bei der Ableitung liegt der Fall anders. Gleichmäßige Konvergenz von (f_n) gegen f sagt nichts über die Ableitungen: Die Funktionen $\sqrt{x^2 + 1/n}$ sind differenzierbar und konvergieren gleichmäßig gegen $|x|$, das bei 0 nicht differenzierbar ist (G7). Die Ableitung misst die lokale Steigung, und eine kleine gleichmäßige Abweichung kann die Steigung stark ändern. Die passende Voraussetzung betrifft deshalb die Folge der Ableitungen.

Satz 14.8 (Ableitung und gleichmäßiger Grenzwert). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall mit mehr als einem Punkt, und seien $f_n : I \to \mathbb{K}$ differenzierbar. Es gebe ein $x_0 \in I$, für das $(f_n(x_0))$ konvergiert, und die Folge (f_n') konvergiere gleichmäßig

auf I gegen eine Funktion g. Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig auf I gegen eine differenzierbare Funktion f, und es gilt $f' = g$, also

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweisidee. Der Schrankensatz verwandelt eine gleichmäßige Schranke für die Ableitung einer Differenz in eine gleichmäßige Schranke für die Differenz selbst und für ihre Differenzenquotienten. Dann ist die Ableitung von f an einer Stelle c der Wert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Differenzenquotienten, und Satz 14.4 vertauscht die beiden Grenzwerte.

Beweis. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $h = f_n - f_m$ und $d_{n,m} = \|f_n' - f_m'\|_I$. Nach Satz 14.3, angewandt mit $\varepsilon/2$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $d_{n,m} < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$. Für solche n, m ist h auf I differenzierbar (Satz 10.5), also stetig (Folgerung 10.3; für Werte in $\mathbb{C}$ nach der Bemerkung vor Lemma 10.22), und $|h'| \leq d_{n,m}$ auf I. Nach Folgerung 10.15 (3) für reellwertiges, Folgerung 10.24 für komplexwertiges h gilt für alle $x, y \in I$

$$|h(x) - h(y)| \leq d_{n,m}\,|x - y|.$$

Schritt 1: gleichmäßige Konvergenz von (f_n). Sei ℓ die Länge von I. Mit $y = x_0$ folgt für alle $x \in I$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + d_{n,m}\,\ell.$$

Beide Summanden werden für große n, m unabhängig von x klein, denn $(f_n(x_0))$ ist eine Cauchy-Folge (Satz 4.31). Nach Satz 14.3 konvergiert (f_n) gleichmäßig auf I gegen eine Funktion f. Hier geht die Beschränktheit von I ein.

Schritt 2: Ableitung. Sei $c \in I$ fest. Definiere $\varphi_n : I \to \mathbb{K}$ durch

$$\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \ (x \neq c), \qquad \varphi_n(c) = f_n'(c).$$

Weil f_n in c differenzierbar ist, ist φ_n nach Satz 10.2 (2) in c stetig. Für $x \neq c$ ist $\varphi_n(x) - \varphi_m(x) = \frac{h(x)-h(c)}{x-c}$, also nach der obigen Abschätzung $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq d_{n,m}$; für $x = c$ ist $|\varphi_n(c) - \varphi_m(c)| = |h'(c)| \leq d_{n,m}$. Nach Satz 14.3 konvergiert (φ_n) gleichmäßig auf I. Die Grenzfunktion ist durch die punktweisen Grenzwerte bestimmt, nämlich

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ (x \neq c), \qquad \varphi(c) = g(c).$$

Nach Satz 14.4 ist φ in c stetig. Da c Häufungspunkt von I ist, heißt das nach Satz 7.10 $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = g(c)$. Also ist f in c differenzierbar mit $f'(c) = g(c)$. □

Bemerkung (Beweis mit dem Hauptsatz). Sind die f_n reellwertig und zusätzlich die f_n' stetig, so gibt es einen kürzeren Beweis: Nach dem Hauptsatz (Folgerung 13.5) ist $f_n(x) =$

$f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$, nach Folgerung 14.7 (auf $[x_0, x]$ beziehungsweise $[x, x_0]$) konvergiert das gegen $f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$, und nach Satz 14.4 ist g stetig, also liefert Satz 13.4 (1) $f' = g$. Der Beweis oben braucht die Stetigkeit der Ableitungen nicht, nur den Schrankensatz.

Bemerkung (Endpunkte). Gehört ein Endpunkt zu I, so ist die Differenzierbarkeit dort einseitig gemeint (Definition 10.1 und der Absatz danach). Der Beweis unterscheidet die Fälle nicht, weil er nur mit Punkten aus I arbeitet.

Zwischenbilanz. Für Stetigkeit und Integral genügt gleichmäßige Konvergenz der Folge selbst (Satz 14.4, Satz 14.6), beim Integral nur auf beschränkten Intervallen ((G6)). Für die Ableitung genügt sie nicht ((G7)); dort braucht man gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen und Konvergenz in einem Punkt (Satz 14.8). Die Ableitung ist empfindlich, weil sie lokale Steigungen misst; das Integral ist gutmütig, weil es mittelt. Für Potenzreihen werden die Voraussetzungen aller drei Sätze auf jeder kleineren abgeschlossenen Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt von selbst erfüllt sein, nicht aber auf dem ganzen Konvergenzkreis ((G9); Abschnitte 14.6 und 14.7).

14.5 Funktionenreihen und das Weierstraß-Kriterium

Definition 14.9. Seien $f_k : D \to \mathbb{K}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Die *Funktionenreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist die Folge ihrer Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Sie *konvergiert punktweise* beziehungsweise *gleichmäßig* auf D, wenn die Folge (s_n) es tut; ihre *Summe* ist dann die Grenzfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

Für Reihen lautet das Cauchy-Kriterium 14.3: $\sum f_k$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N gibt mit $\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$ für alle $m > n \geq N$ und alle $x \in D$.

Satz 14.10 (Weierstraß-Kriterium). Seien $f_k : D \to \mathbb{K}$, und gebe es Zahlen $M_k \geq 0$ mit $|f_k(x)| \leq M_k$ für alle $x \in D$ und alle k, sodass $\sum_k M_k$ konvergiert. Dann konvergieren $\sum_k f_k$ und $\sum_k |f_k|$ gleichmäßig auf D; insbesondere konvergiert $\sum_k f_k(x)$ für jedes x absolut.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 6.4) gibt es N mit $\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$ für $m > n \geq N$. Für diese m, n und alle $x \in D$ ist

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium 14.3, angewandt auf die Partialsummen von $\sum f_k$ und von $\sum |f_k|$, folgt die Behauptung. □

Das Kriterium verlangt eine konvergente Majorante, die von x nicht abhängt; die naheliegende Wahl ist $M_k = \|f_k\|_D$. Es ist hinreichend, nicht notwendig (G8).

Folgerung 14.11 (Vertauschungssätze für Reihen). Sei $\sum_k f_k$ eine Funktionenreihe.

1. Sind alle f_k auf $D \subseteq \mathbb{K}$ stetig und konvergiert die Reihe gleichmäßig, so ist ihre Summe stetig.
2. Sind alle $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[a,b]$, so ist ihre Summe integrierbar, und $\int_a^b \sum_k f_k\,dx = \sum_k \int_a^b f_k\,dx$ (gliedweise Integration).
3. Sind alle $f_k : I \to \mathbb{K}$ auf dem beschränkten Intervall I differenzierbar, konvergiert $\sum_k f_k(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, und konvergiert $\sum_k f_k'$ gleichmäßig auf I, so konvergiert $\sum_k f_k$ gleichmäßig auf I, die Summe ist differenzierbar, und $\left(\sum_k f_k\right)' = \sum_k f_k'$ (gliedweise Differentiation).

Beweis. Man wende die Sätze 14.4, 14.6 und 14.8 auf die Partialsummen s_n an. Diese sind als endliche Summen stetig (Satz 7.11), integrierbar (Satz 12.10) beziehungsweise differenzierbar (Satz 10.5, für Werte in $\mathbb{C}$ nach der Bemerkung vor Lemma 10.22), und wegen der Linearität von Integral und Ableitung ist $\int_a^b s_n\,dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k\,dx$ und $s_n' = \sum_{k=0}^n f_k'$. □

Beispiel. Sei $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\cos(2^k x)}{3^k}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wegen $|\frac{\cos(2^k x)}{3^k}| \le \left(\frac{1}{3}\right)^k$ und Satz 6.2 konvergiert die Reihe nach Satz 14.10 gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, und f ist nach Folgerung 14.11 (1) stetig. Die Glieder sind nach Satz 10.10, der Kettenregel (Satz 10.6) und Satz 10.5 differenzierbar. Die gliedweise abgeleitete Reihe $-\sum_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \sin(2^k x)$ hat wegen $|\sin| \le 1$ (Satz 9.21 (1)) die Majorante $\sum_k \left(\frac{2}{3}\right)^k$ und konvergiert daher ebenfalls gleichmäßig. Auf jedem Intervall $[-r,r]$ ist Folgerung 14.11 (3) anwendbar (mit $x_0 = 0$); da jedes x innerer Punkt eines solchen Intervalls ist, ist f nach der Bemerkung über Lokalität in Abschnitt 10.1 auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit der stetigen Ableitung $f'(x) = -\sum_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \sin(2^k x)$. Für die nochmals abgeleitete Reihe $-\sum_k \left(\frac{4}{3}\right)^k \cos(2^k x)$ liefert das Weierstraß-Kriterium nichts mehr; ihre Glieder bilden bei $x = 0$ nicht einmal eine Nullfolge. Die Funktion W im Ausblick ist nach demselben Muster gebaut, mit Frequenzen, die schneller wachsen, als die Amplituden fallen.

14.6 Potenzreihen und Konvergenzradius

Definition 14.12. Seien $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt *Potenzreihe* mit *Koeffizienten* a_n und *Entwicklungspunkt* z_0. Dabei ist $(z - z_0)^0 = 1$ auch für $z = z_0$ (Vereinbarung aus Abschnitt 1.6).

Wir fassen die Reihe als Funktionenreihe auf $D = \mathbb{C}$ auf. Ist z_0 reell, so betrachten wir sie auch auf $D = \mathbb{R}$ (mit komplexen oder reellen Koeffizienten); die Aussagen dieses Abschnitts gelten dann für die Einschränkung, und an die Stelle der Kreisscheiben treten die Intervalle $B_r(z_0) \cap \mathbb{R}$. Beginnt eine Reihe erst bei $n = 1$ oder einem späteren Index, so sind die fehlenden Koeffizienten null.

Jede Potenzreihe konvergiert im Entwicklungspunkt. Die geometrische Reihe $\sum z^n$ konvergiert genau für $|z| < 1$ (Satz 6.2 und Folgerung 6.5), die Exponentialreihe $\sum z^n/n!$ für alle z (Satz 9.2), und $\sum n!\, z^n$ nur für $z = 0$, weil für $z \neq 0$ die Glieder nicht gegen 0 gehen. In allen drei Fällen ist der Konvergenzbereich, bis auf den Rand, eine Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt. Das ist kein Zufall.

Definition 14.13. Zur Potenzreihe $\sum a_n (z - z_0)^n$ sei

$$S = \{r \geq 0 \,:\, \text{die Folge } (|a_n|\, r^n) \text{ ist beschränkt}\}.$$

Die Größe $R = \sup S \in [0, \infty]$ heißt *Konvergenzradius* der Reihe; dabei ist $R = \infty$, wenn S nicht nach oben beschränkt ist. Wegen $0 \in S$ ist $S \neq \emptyset$.

Mit $r \in S$ liegt jedes $r' \in [0, r]$ in S, denn $|a_n| r'^n \leq |a_n| r^n$. Also ist S ein Intervall, das bei 0 beginnt, und jedes r mit $0 \leq r < R$ liegt in S: Nach Definition des Supremums gibt es ein $r'' \in S$ mit $r'' > r$.

Satz 14.14 (Konvergenzverhalten von Potenzreihen). Sei R der Konvergenzradius von $\sum a_n (z - z_0)^n$.

1. Für $|z - z_0| < R$ konvergiert die Reihe absolut.
2. Für $|z - z_0| > R$ divergiert sie.
3. Für jedes ρ mit $0 \leq \rho < R$ konvergieren die Reihe und die Reihe der Beträge $\sum |a_n (z - z_0)^n|$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B}_\rho(z_0) \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßig.

Über Punkte mit $|z - z_0| = R$ sagt der Satz nichts; dort ist jedes Verhalten möglich (G10).

Beweisidee. Ist $(|a_n| r^n)$ beschränkt, so wird die Reihe für $|z - z_0| \leq \rho < r$ von einer

geometrischen Reihe mit Quotient $\rho/r < 1$ majorisiert.

Beweis. (3) Sei $0 \le \rho < R$. Wähle r mit $\rho < r < R$. Dann ist $r \in S$, also $|a_n|r^n \le M$ für ein M und alle n. Für $z \in \overline{B}_\rho(z_0)$ folgt

$$|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n|\rho^n = |a_n|r^n\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n \le M\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n.$$

Die geometrische Reihe $\sum M(\rho/r)^n$ konvergiert wegen $0 \le \rho/r < 1$ (Satz 6.2). Nach Satz 14.10 konvergieren die Potenzreihe und die Reihe ihrer Beträge auf $\overline{B}_\rho(z_0)$ gleichmäßig.

(1) Ist $|z - z_0| < R$, so liegt z in $\overline{B}_\rho(z_0)$ mit $\rho = |z - z_0|$, und (3) gibt die absolute Konvergenz.

(2) Ist $|z-z_0| > R$, so ist $r = |z-z_0| \notin S$, also ist $(|a_n(z-z_0)^n|) = (|a_n|r^n)$ unbeschränkt und insbesondere keine Nullfolge (Satz 4.7). Nach Folgerung 6.5 divergiert die Reihe. □

Satz 14.14 erklärt den Namen: Die Reihe konvergiert im Innern des Kreises vom Radius R um z_0 und divergiert außerhalb. Er zeigt auch, dass R das Supremum aller $|z - z_0|$ ist, für die die Reihe konvergiert: Konvergiert sie in z, so sind ihre Glieder nach Folgerung 6.5 und Satz 4.7 beschränkt, also $|z - z_0| \in S$; und jedes $r < R$ kommt nach (1) vor.

Für die Berechnung von R braucht man eine Formel. Sie benutzt den Limes superior (Definition 4.25) der Folge $\big(\sqrt[n]{|a_n|}\big)$ nichtnegativer Zahlen (Satz 2.39), und zwar in der Form von Satz 4.35 mit der Bemerkung danach: Er liegt in $[0, \infty]$ und ist genau dann ∞, wenn die Folge unbeschränkt ist; für reelles λ über ihm liegen fast alle Glieder unter λ, für reelles λ unter ihm liegen unendlich viele Glieder über λ. Die Formel hängt am Limes superior, der Radius selbst nicht: Definition 14.13 kommt ohne ihn aus.

Satz 14.15 (Cauchy-Hadamard). Für den Konvergenzradius von $\sum a_n(z - z_0)^n$ gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

mit den Vereinbarungen $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$.

Beweisidee. $|a_n|r^n = \big(\sqrt[n]{|a_n|}\, r\big)^n$. Liegt die Basis schließlich unter einer Zahl kleiner als 1, ist die Folge beschränkt; liegt sie unendlich oft über einer Zahl größer als 1, ist sie unbeschränkt.

Beweis. Sei $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, \infty]$ und $r > 0$.

Fall $L < \frac{1}{r}$. Dann ist L reell, und $q = \frac{1}{2}\big(L + \frac{1}{r}\big)$ erfüllt $L < q < \frac{1}{r}$. Nach Satz 4.35 (2) ist $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ für fast alle n, also $|a_n|r^n < (rq)^n < 1$. Die Folge $(|a_n|r^n)$ ist daher beschränkt, denn nur endlich viele Glieder können die Schranke 1 überschreiten. Also ist $r \in S$ und $r \le R$.

Fall $L > \frac{1}{r}$. Dann gibt es ein r' mit $0 < r' < r$ und $\frac{1}{r'} < L$: für $L = \infty$ etwa $r' = \frac{r}{2}$, sonst r' mit $\frac{1}{r'} = \frac{1}{2}\big(L + \frac{1}{r}\big)$. Nach Satz 4.35 (3) ist $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r'}$ für unendlich viele n, also $|a_n| r^n > (r/r')^n$. Wegen $r/r' > 1$ ist $(r/r')^n$ unbeschränkt (Bernoullische Ungleichung, Satz 1.24), und da die Ungleichung für unendlich viele n gilt, ist $(|a_n| r^n)$ unbeschränkt. Also ist $r \notin S$; da S ein bei 0 beginnendes Intervall ist, folgt $R \le r$.

Ist $L = 0$, so liegt jedes $r > 0$ im ersten Fall, also $R = \infty$. Ist $L = \infty$, so liegt jedes $r > 0$ im zweiten Fall, also $R = 0$. Ist $0 < L < \infty$, so gilt $r \le R$ für jedes $r < \frac{1}{L}$ und $R \le r$ für jedes $r > \frac{1}{L}$; also $R = \frac{1}{L}$. □

Wer das Wurzelkriterium kennt, sieht die Formel sofort: Für $z \neq z_0$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = |z - z_0|\, L,$$

und Satz 6.14 gibt absolute Konvergenz für $|z - z_0|\, L < 1$ und Divergenz für $|z - z_0|\, L > 1$. Der Weg über Definition 14.13 liefert zusätzlich die gleichmäßige Konvergenz auf $\overline{B}_\rho(z_0)$, und auf sie kommt es in den folgenden Abschnitten an.

Die Formel gilt immer, ist aber oft unbequem. Wenn die Quotienten aufeinanderfolgender Koeffizienten einen Grenzwert haben, geht es einfacher.

Satz 14.16 (Quotientenformel). Seien fast alle $a_n \neq 0$, und es gelte $\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big| \to L \in [0, \infty]$, wobei $L = \infty$ bestimmte Divergenz bedeutet. Dann ist $R = L$.

Beweis. Sei $r > 0$ und $b_n = |a_n| r^n$; für fast alle n ist $b_n > 0$ und

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{r}{|a_n / a_{n+1}|}.$$

Für $0 < L < \infty$ strebt das nach Satz 4.9 (4) gegen $\frac{r}{L}$; für $L = \infty$ strebt es nach Satz 4.14 (1) gegen $0 = \frac{r}{\infty}$; für $L = 0$ divergiert es nach Satz 4.14 (1) bestimmt gegen ∞, denn die Kehrwerte $\frac{1}{r}\big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\big|$ sind positiv und streben gegen 0. Ist $r < L$, so ist $L > 0$ und der Grenzwert $\frac{r}{L}$ kleiner als 1; ab einem Index ist $b_{n+1} \le b_n$, die Folge ist also schließlich fallend und damit beschränkt, und $r \le R$. Ist $r > L$, so ist der Grenzwert größer als 1 oder die Quotienten divergieren bestimmt gegen ∞; in beiden Fällen gibt es $q > 1$ und N mit $b_{n+1} \ge q\, b_n$ für $n \ge N$, also $b_n \ge q^{n-N} b_N$ mit $b_N > 0$, und (b_n) ist unbeschränkt; also $R \le r$. Wie im vorigen Beweis folgt $R = L$, auch in den Fällen $L = 0$ und $L = \infty$. □

Beispiele. (a) $\sum \frac{z^n}{n!}$: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = n + 1 \to \infty$, also $R = \infty$. (b) $\sum n!\, z^n$: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \to 0$, also $R = 0$. (c) $\sum_{n\ge1} \frac{z^n}{n^p}$ für festes $p \in \mathbb{N}_0$ (Koeffizient $a_0 = 0$): $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \big(\frac{n+1}{n}\big)^p \to 1$, also $R = 1$. Mit Cauchy-Hadamard geht es ebenso: $\sqrt[n]{1/n^p} = \big(\sqrt[n]{n}\big)^{-p} \to 1$ nach Satz 4.12

(3) und Satz 4.9, und der Limes superior einer konvergenten Folge ist ihr Grenzwert (Satz 4.35 (5)). (d) $\sum 2^n z^{2n}$: Hier ist jeder zweite Koeffizient null, die Quotientenformel ist nicht anwendbar. Nach Cauchy-Hadamard ist $\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt{2}$ und $a_{2n+1} = 0$, also $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt{2}$ und $R = 1/\sqrt{2}$. Das sieht man auch direkt: Die Reihe ist die geometrische Reihe in $w = 2z^2$.

Satz 14.17 (Stetigkeit von Potenzreihen). Hat $\sum a_n(z - z_0)^n$ den Konvergenzradius $R > 0$, so ist die Summe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf $B_R(z_0)$ stetig (für $R = \infty$ auf ganz $\mathbb{C}$). Die Kreisscheibe $B_R(z_0)$ heißt *Konvergenzkreis*.

Beweis. Sei $z_1 \in B_R(z_0)$ und ρ mit $|z_1 - z_0| < \rho < R$. Auf $\overline{B}_\rho(z_0)$ konvergiert die Reihe nach Satz 14.14 (3) gleichmäßig; ihre Partialsummen sind Polynome, also stetig (Folgerung 7.12 mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$). Nach Satz 14.4 ist die Einschränkung von f auf $\overline{B}_\rho(z_0)$ stetig. Mit $r = \rho - |z_1 - z_0| > 0$ ist $B_r(z_1) \subseteq \overline{B}_\rho(z_0)$ nach der Dreiecksungleichung; nach Lemma 7.28 (2) ist deshalb auch f in z_1 stetig. □

Für die Exponentialreihe hat Einheit 9 die Stetigkeit mit einer ausdrücklichen Abschätzung bewiesen (Satz 9.6). Satz 14.17 liefert sie für alle Potenzreihen zugleich, dafür ohne Konstante. Auf dem ganzen Konvergenzkreis muss die Konvergenz nicht gleichmäßig sein (G9). Für den Beweis genügt, dass sie auf jeder kleineren abgeschlossenen Kreisscheibe gleichmäßig ist, und das ist der Normalfall bei Potenzreihen.

Eine Potenzreihe ist durch ihre Werte nahe beim Entwicklungspunkt schon festgelegt; es genügen sogar die Werte auf einer Folge, die gegen z_0 strebt.

Satz 14.28 (Identitätssatz für Potenzreihen). Habe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ den Konvergenzradius $R > 0$, und gebe es eine Folge (z_k) in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit $z_k \to z_0$ und $f(z_k) = 0$ für alle k. Dann ist $a_n = 0$ für alle n, also $f = 0$ auf $B_R(z_0)$. Insbesondere gilt: Haben zwei Potenzreihen mit Entwicklungspunkt z_0 die Konvergenzradien $R_1, R_2 > 0$ und stimmen ihre Summen in allen Punkten einer Folge in $B_{\rho_0}(z_0)\setminus\{z_0\}$ mit $\rho_0 = \min\{R_1, R_2\}$ überein, die gegen z_0 strebt, so haben sie dieselben Koeffizienten.

Beweisidee. Ist a_m der erste von null verschiedene Koeffizient, so ist $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ mit einer Potenzreihe g, die in z_0 den Wert a_m hat und dort stetig ist. Dann kann g nicht auf einer Folge verschwinden, die gegen z_0 strebt.

Beweis. Angenommen, nicht alle a_n sind null; sei m der kleinste Index mit $a_m \neq 0$. Für $r > 0$ unterscheiden sich die Folgen $(|a_n| r^{n-m})_{n\geq m}$ und $(|a_n| r^n)_{n\geq m}$ um den festen Faktor r^m; also hat $g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-m}$ ebenfalls den Radius R. Für $z \in B_R(z_0)$ und $M \geq m$ ist $\sum_{n=0}^{M} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^m \sum_{n=m}^{M} a_n(z-z_0)^{n-m}$, und für $M \to \infty$ folgt nach Satz 4.9 (1) $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$. Nach Satz 14.17 ist g in z_0 stetig, und $g(z_0) = a_m$. Wegen $z_k \neq z_0$ ist $(z_k - z_0)^m \neq 0$, und aus $f(z_k) = 0$ folgt $g(z_k) = 0$. Nach dem Folgenkriterium (Satz 7.10) ist $a_m = g(z_0) = \lim_k g(z_k) = 0$, ein Widerspruch.

Für den Zusatz seien $\sum a_n(z-z_0)^n$ und $\sum b_n(z-z_0)^n$ die beiden Reihen. Für $0 \le r < \rho_0$ ist $|a_n-b_n|r^n \le |a_n|r^n+|b_n|r^n$ beschränkt; die Reihe $\sum(a_n-b_n)(z-z_0)^n$ hat also einen Radius von mindestens ρ_0, und ihre Summe ist nach Satz 6.3 die Differenz der beiden Summen. Sie verschwindet in den Punkten der Folge, und der erste Teil gibt $a_n-b_n=0$ für alle n. □

Für reelles $z_0=x_0$ folgt insbesondere: Stimmen zwei Potenzreihen auf einem Intervall $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ mit $\eta>0$ überein, so haben sie dieselben Koeffizienten; man nehme die Punkte $x_0+\frac{\eta'}{k+1}$ mit $\eta'=\frac{1}{2}\min\{\eta,\rho_0\}$ (für $\rho_0=\infty$ ist $\eta'=\frac{\eta}{2}$). Die Nullstellen müssen sich im Entwicklungspunkt häufen. Dass dasselbe für eine Häufung an einer beliebigen Stelle des Konvergenzkreises gilt, ist richtig, braucht aber die Entwicklung einer Potenzreihe um einen anderen Punkt und wird hier nicht bewiesen.

14.7 Differenzieren und Integrieren von Potenzreihen

In diesem Abschnitt sind Entwicklungspunkt und Veränderliche reell, weil die Ableitung in Einheit 10 für Funktionen einer reellen Veränderlichen erklärt ist; die Koeffizienten a_n dürfen komplex sein, die Summe ist dann eine Funktion mit Werten in $\mathbb{C}$ wie in der Bemerkung vor Lemma 10.22. Wir schreiben x statt z und x_0 statt z_0. Für $R>0$ heißt $B_R(x_0)\cap\mathbb{R}=(x_0-R,x_0+R)$ das *Konvergenzintervall* (gleich $\mathbb{R}$ für $R=\infty$). Nach Satz 14.17 und Lemma 7.28 (1) ist die Summe dort stetig.

Lemma 14.18. Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

haben denselben Konvergenzradius. Dasselbe gilt mit z, z_0 an Stelle von x, x_0, denn der Beweis benutzt nur die Beträge $|a_n|$.

Beweisidee. Die Faktoren n und $\frac{1}{n+1}$ wachsen oder fallen langsamer als jede geometrische Folge; ein geometrischer Spielraum zwischen r und R verschluckt sie.

Beweis. Für $0 \le q < 1$ ist die Folge $((n+1)q^n)$ beschränkt, denn nach Satz 4.32 (mit $k=1$) und Satz 4.4 (2) ist $(n+1)q^n = nq^n+q^n$ eine Nullfolge (Satz 4.9 (1); für $q=0$ ist das klar), also beschränkt (Satz 4.7).

Seien R, R', R'' die Konvergenzradien der drei Reihen in der angegebenen Reihenfolge. Die zweite Reihe hat für $r>0$ die Glieder vom Betrag $n|a_n|r^{n-1}$, die dritte $\frac{|a_n|}{n+1}r^{n+1}$.

$R' \ge R$: Sei $0<r<R$; wähle ρ mit $r<\rho<R$ und M mit $|a_n|\rho^n \le M$. Dann ist $n|a_n|r^{n-1} = \frac{1}{r}|a_n|\rho^n\cdot n\big(\frac{r}{\rho}\big)^n \le \frac{M}{r}\,n\big(\frac{r}{\rho}\big)^n$, und das ist beschränkt. Also $r \le R'$ für jedes $r<R$.

$R \geq R'$: Ist $(n|a_n|r^{n-1})$ beschränkt, so auch $|a_n|r^n = \frac{r}{n}\, n|a_n|r^{n-1}$ für $n \geq 1$.

$R'' \geq R$: Ist $(|a_n|r^n)$ beschränkt, so auch $\frac{|a_n|}{n+1} r^{n+1} \leq r\,|a_n|r^n$.

$R \geq R''$: Sei $0 < r < R''$; wähle ρ mit $r < \rho < R''$ und M mit $\frac{|a_n|}{n+1}\rho^{n+1} \leq M$. Dann ist $|a_n|r^n = \frac{|a_n|}{n+1}\rho^{n+1} \cdot \frac{n+1}{\rho}\big(\frac{r}{\rho}\big)^n \leq \frac{M}{\rho}(n+1)\big(\frac{r}{\rho}\big)^n$, und das ist beschränkt. □

Satz 14.19 (gliedweise Differentiation). Sei $\sum a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ auf dem Konvergenzintervall differenzierbar, und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Beweis. Sei x_1 im Konvergenzintervall und ρ mit $|x_1 - x_0| < \rho < R$. Auf $J = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ betrachte $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$; diese Funktionen sind differenzierbar mit $f_n'(x) = n a_n (x-x_0)^{n-1}$ (Satz 10.5). Die Reihe $\sum f_n(x_0)$ konvergiert. Die Reihe $\sum f_n'$ ist die zweite Reihe aus Lemma 14.18, hat also den Konvergenzradius R und konvergiert nach Satz 14.14 (3) gleichmäßig auf $J = \overline{B}_\rho(x_0) \cap \mathbb{R}$. Nach Folgerung 14.11 (3) ist f auf J differenzierbar mit der behaupteten Ableitung. Da x_1 innerer Punkt von J ist, ist das nach der Bemerkung über Lokalität in Abschnitt 10.1 die Ableitung von f in x_1. □

Die abgeleitete Reihe ist wieder eine Potenzreihe mit demselben Radius. Man darf den Satz deshalb beliebig oft anwenden.

Folgerung 14.20 (Koeffizienten und Eindeutigkeit). Unter den Voraussetzungen von Satz 14.19 ist f auf dem Konvergenzintervall beliebig oft differenzierbar, und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k}, \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Stimmen zwei Potenzreihen mit Entwicklungspunkt x_0 und positivem Konvergenzradius auf einem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ überein, so haben sie dieselben Koeffizienten.

Beweis. Die Formel für $f^{(k)}$ folgt durch Induktion über k aus Satz 14.19, denn $(n-k)\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k-1)!}$. Setzt man $x = x_0$, bleibt nur der Summand $n = k$, und das ist $k!\, a_k$. Die Ableitungen in x_0 hängen nach der Bemerkung über Lokalität in Abschnitt 10.1 nur von den Werten auf einem Intervall um x_0 ab; stimmen also zwei Reihen dort überein, so stimmen alle $f^{(k)}(x_0)$ und damit alle Koeffizienten überein. □

Die Eindeutigkeit folgt auch ohne Ableitungen aus Satz 14.28, dort sogar für komple-

xe Veränderliche und für Übereinstimmung auf einer Folge. Bei reellen Koeffizienten ist die Potenzreihe nach Folgerung 14.20 die Taylorreihe ihrer Summe in x_0 (Definition 11.9). Umgekehrt ist nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion die Summe ihrer Taylorreihe: Die Funktion $\exp(-1/x^2)$ mit dem Wert 0 in 0 hat nach Satz 11.11 lauter verschwindende Ableitungen in 0; ihre Taylorreihe ist die Nullreihe mit Radius ∞, und deren Summe stimmt nur in 0 mit der Funktion überein.

Satz 14.21 (gliedweise Integration). Unter den Voraussetzungen von Satz 14.19 ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

auf dem Konvergenzintervall differenzierbar mit $F' = f$. Sind alle a_n reell, so gilt für alle x im Konvergenzintervall $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x)$, für $x < x_0$ im Sinn von Definition 12.21.

Beweis. Nach Lemma 14.18 hat die Reihe für F den Konvergenzradius R; nach Satz 14.19 ist $F'(x) = \sum_n \frac{a_n}{n+1}(n+1)(x - x_0)^n = f(x)$. Sind die a_n reell, so ist f reellwertig und auf dem Konvergenzintervall stetig (Satz 14.17), F ist eine Stammfunktion von f, und Folgerung 13.5 liefert für alle x im Konvergenzintervall, auch für $x < x_0$, $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) = F(x)$. □

Damit ist der erste Schritt der Leitfrage gerechtfertigt, aber nur für $|x| < 1$. Für den Endpunkt 1 des Konvergenzintervalls braucht man einen eigenen Satz.

14.8 Der Abelsche Grenzwertsatz

Konvergiert eine Potenzreihe in einem Endpunkt ihres Konvergenzintervalls, so ist zunächst unklar, ob ihr Wert dort der Grenzwert der Werte im Innern ist. Satz 14.17 hilft nicht, denn er gilt nur im Innern. Die Antwort ist stets ja; der Satz trägt den Namen von Niels Henrik Abel.

Satz 14.22 (Abelscher Grenzwertsatz). Seien $a_n \in \mathbb{C}$, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gleichmäßig auf $[0, 1]$, ihre Summe f ist auf $[0, 1]$ stetig, und insbesondere gilt

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

als Grenzwert der Einschränkung von f auf $[0, 1)$ im Punkt 1. Für reelle a_n ist das der linksseitige Grenzwert aus Definition 7.7. Für komplexe a_n ist er im Sinn der Bemerkung „Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$“ nach Folgerung 7.12 gemeint: De-

finition 7.7 selbst wird dort nicht übertragen, Grenzwerte von Einschränkungen schon. In diesem Sinn sind auch die einseitigen Grenzwerte in der Bemerkung über andere Endpunkte und in Folgerung 14.23 zu lesen.

Beweisidee. Man formt die Abschnitte der Reihe mit Abelscher partieller Summation (Lemma 6.25) um. Die Gewichte $x^k - x^{k+1}$, die dabei entstehen, sind für $x \in [0,1]$ nichtnegativ und summieren sich zu höchstens 1; die Teilsummen der a_k sind nach dem Cauchy-Kriterium klein. Die Schranke hängt nicht von x ab.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 6.4 gibt es N mit $|\sum_{j=n+1}^{k} a_j| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k > n \geq N$. Seien $m > n \geq N$ und $x \in [0,1]$. Wir wenden Lemma 6.25 auf die Zahlen a'_j und $b_j = x^j$ ($1 \leq j \leq m$) an, mit $a'_j = 0$ für $j \leq n$ und $a'_j = a_j$ für $j > n$. Ihre Teilsummen sind $A'_k = 0$ für $k \leq n$ und $A'_k = \sum_{j=n+1}^{k} a_j$ für $k > n$, also $|A'_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k > n$. Wegen $A'_n = 0$ ergibt das Lemma

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = A'_m x^m + \sum_{k=n+1}^{m-1} A'_k \bigl(x^k - x^{k+1}\bigr).$$

Für $x \in [0,1]$ ist $x^k - x^{k+1} = x^k(1-x) \geq 0$, und die Summe dieser Gewichte von $k = n+1$ bis $m-1$ ist die Teleskopsumme $x^{n+1} - x^m$. Also

$$\Bigl|\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k\Bigr| \leq \frac{\varepsilon}{2} x^m + \frac{\varepsilon}{2}\bigl(x^{n+1} - x^m\bigr) = \frac{\varepsilon}{2} x^{n+1} < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium 14.3 konvergiert $\sum a_n x^n$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Die Partialsummen sind Polynome und damit stetig; nach Satz 14.4 ist f auf $[0,1]$ stetig, insbesondere ist nach Lemma 7.28 (1) und Satz 7.10 der Grenzwert der Einschränkung auf $[0,1)$ in 1 gleich $f(1) = \sum a_n$. □

Der Beweis ist derselbe wie der des Dirichlet-Kriteriums (Satz 6.26): dieselbe Umformung, dieselbe Teleskopsumme der Gewichte. Dort sind die Teilsummen beschränkt und die Gewichte klein, hier sind die Teilsummen klein und die Gewichte zusammen höchstens 1, und zwar für jedes $x \in [0,1]$ mit derselben Schranke. Diese Gleichmäßigkeit ist der ganze Inhalt des Satzes.

Für $x \in [0,1)$ stimmt die Summe auf $[0,1]$ mit dem Wert der Potenzreihe aus Abschnitt 14.6 überein; dass der Konvergenzradius mindestens 1 ist, folgt auch direkt aus Definition 14.13, denn (a_n) ist nach Folgerung 6.5 eine Nullfolge und nach Satz 4.7 beschränkt.

Bemerkung (andere Endpunkte). Seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, und konvergiere $\sum a_n \rho^n$. Wendet man Satz 14.22 auf die Koeffizienten $a_n \rho^n$ und die Veränderliche $t = (x - x_0)/\rho \in [0,1]$ an, so folgt, dass $\sum a_n (x - x_0)^n$ auf $[x_0, x_0 + \rho]$ gleichmäßig konvergiert und $\lim_{x \to (x_0+\rho)-} \sum a_n (x - x_0)^n = \sum a_n \rho^n$ gilt. Konvergiert $\sum a_n (-\rho)^n$, so nimmt man

die Koeffizienten $a_n(-\rho)^n$ und $t = (x_0 - x)/\rho$ und erhält $\lim_{x\to(x_0-\rho)+} \sum a_n(x-x_0)^n = \sum a_n(-\rho)^n$. Meist ist ρ der Konvergenzradius R; nötig ist das nicht.

Die Umkehrung gilt nicht: Aus der Existenz von $\lim_{x\to 1-} \sum a_n x^n$ folgt nicht die Konvergenz von $\sum a_n$ (G11). Unter Zusatzvoraussetzungen über die a_n gilt sie doch; solche Aussagen heißen Taubersätze. Den einfachsten Fall, $a_n \geq 0$, behandelt Aufgabe V3.

Folgerung 14.23 (Abelscher Produktsatz). Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergente Reihen mit den Summen A und B, und sei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Konvergiert auch $\sum c_n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Beweis. Die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ sind nach Folgerung 6.5 Nullfolgen und nach Satz 4.7 beschränkt; die Potenzreihen $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, $\sum c_n x^n$ haben also einen Konvergenzradius von mindestens 1 und konvergieren für $0 \leq x < 1$ absolut (Satz 14.14). Das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen (Satz 6.23) ergibt

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (0 \leq x < 1).$$

Für $x \to 1-$ strebt nach Satz 14.22 und der Produktregel für Grenzwerte (Satz 7.6 (1), für Werte in $\mathbb{C}$ nach der Bemerkung nach Folgerung 7.12) die linke Seite gegen AB und die rechte gegen $\sum c_n$. □

Ohne die Voraussetzung, dass $\sum c_n$ konvergiert, ist nichts gewonnen: Das Cauchy-Produkt zweier nur bedingt konvergenter Reihen kann divergieren ((G6) der Einheit 6).

14.9 Der Weierstraßsche Approximationssatz

Potenzreihen sind gleichmäßige Grenzwerte von Polynomen, nämlich ihrer Partialsummen, und sie sind beliebig oft differenzierbar. Man könnte vermuten, dass nur besonders glatte Funktionen gleichmäßige Grenzwerte von Polynomen sind. Das Gegenteil ist richtig: Auf einem kompakten Intervall ist jede stetige Funktion ein solcher Grenzwert. Der Satz trägt den Namen von Karl Weierstraß. Der Beweis hier benutzt die nach Sergei Bernstein benannten Polynome, die die Näherung ausdrücklich angeben.

Definition 14.24. Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ sei

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ heißt

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) p_{n,k}(x)$$

das n-te *Bernstein-Polynom* von f.

$B_n f$ ist ein Polynom vom Grad höchstens n, und es hängt nur von den $n+1$ Werten $f(0), f(\frac{1}{n}), \dots, f(1)$ ab. Für $x \in [0,1]$ ist $p_{n,k}(x) \geq 0$. Man kann $p_{n,k}(x)$ als Gewicht deuten, das der Stelle k/n zukommt; die folgenden Formeln besagen, dass die Gewichte sich zu 1 addieren, ihren Schwerpunkt bei x haben und sich für große n um x zusammenziehen.

Lemma 14.25. Für $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\, p_{n,k}(x) = nx, \qquad \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 p_{n,k}(x) = nx(1-x).$$

Beweis. Die erste Gleichung ist der Binomialsatz (Satz 1.20) für $(x+(1-x))^n = 1$. Für $1 \leq k \leq n$ ist nach Definition 1.17

$$k\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1},$$

also, mit $j = k-1$ und nochmals dem Binomialsatz,

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_{n,k}(x) = nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx.$$

Ebenso ist $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ für $2 \leq k \leq n$, und daraus folgt $\sum_k k(k-1)p_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$; für $n = 1$ sind beide Seiten null. Mit $k^2 = k(k-1)+k$ erhält man $\sum_k k^2 p_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$ und

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 p_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx - 2nx \cdot nx + n^2x^2 = nx - nx^2 = nx(1-x). \qquad \square$$

Satz 14.26 (Bernstein). Ist $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, so konvergiert $(B_n f)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f.

Beweisidee. $B_n f(x)$ ist ein gewichtetes Mittel der Werte $f(k/n)$. Die Stellen nahe bei x liefern Werte nahe bei $f(x)$, weil f gleichmäßig stetig ist. Die Stellen fern von x haben nach der dritten Formel des Lemmas zusammen nur ein Gewicht der Größenordnung $1/n$.

Beweis. Nach dem Satz vom Maximum (Satz 8.16, mit Lemma 8.11) gibt es M mit $|f(t)| \leq M$ für alle $t \in [0,1]$. Sei $\varepsilon > 0$. Da f auf $[0,1]$ nach Satz 8.21 gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ für alle $s, t \in [0,1]$ mit $|s-t| < \delta$. Sei $x \in [0,1]$. Nach der

ersten Formel von Lemma 14.25 ist

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) p_{n,k}(x).$$

Wir teilen die Indizes in $J_1 = \{k : |k/n - x| < \delta\}$ und $J_2 = \{k : |k/n - x| \geq \delta\}$. Für $k \in J_1$ ist der Faktor vor $p_{n,k}(x)$ dem Betrag nach kleiner als ε; da die Gewichte nichtnegativ sind und sich zu 1 addieren, ist der Beitrag von J_1 höchstens ε. Für $k \in J_2$ ist $|k - nx| \geq n\delta$, also $1 \leq \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}$, und der Faktor ist höchstens $2M$. Mit der dritten Formel des Lemmas folgt

$$\sum_{k\in J_2} \Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| p_{n,k}(x) \leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 p_{n,k}(x) = \frac{2M\, x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{M}{2n\delta^2},$$

zuletzt wegen $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (Satz 1.25 mit $a = x$, $b = 1 - x$). Zusammen ist

$$\|f - B_n f\|_{[0,1]} \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2},$$

und das ist kleiner als 2ε für alle $n > \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$. □

Satz 14.27 (Weierstraßscher Approximationssatz). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < b$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Polynom P mit $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$. Gleichwertig: Es gibt eine Folge von Polynomen, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis. Die Funktion $g(t) = f(a + t(b - a))$ ist auf $[0, 1]$ stetig. Nach Satz 14.26 gibt es ein Polynom Q mit $\|g - Q\|_{[0,1]} < \varepsilon$, etwa $Q = B_n g$ für großes n. Dann ist $P(x) = Q\big(\frac{x-a}{b-a}\big)$ ein Polynom, und für $x \in [a, b]$ ist $t = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$ und $|f(x) - P(x)| = |g(t) - Q(t)| < \varepsilon$. Die Folge erhält man mit $\varepsilon = 1/n$. □

Für stetiges $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ wendet man den Satz auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ an, die nach der Bemerkung nach Folgerung 7.12 stetig sind; man erhält Polynome mit komplexen Koeffizienten, die gleichmäßig gegen f konvergieren.

Bemerkung (was der Satz nicht sagt). Die approximierenden Polynome lassen sich im Allgemeinen nicht als Partialsummen einer einzigen Potenzreihe wählen. Für $f(x) = |x|$ auf $[-1, 1]$ sieht man das so: Wären $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ die Partialsummen einer Reihe $\sum c_k x^k$, die auf $[-1, 1]$ gegen $|x|$ konvergiert, so konvergierte die Reihe insbesondere bei $x = 1$. Nach Satz 14.14 (2) wäre ihr Konvergenzradius mindestens 1, nach Satz 14.19 ihre Summe auf $(-1, 1)$ differenzierbar. Diese Summe ist $|x|$, und $|x|$ ist bei 0 nicht differenzierbar (Beispiel (c) in Abschnitt 10.1). Nach Satz 14.27 ist $|x|$ trotzdem gleichmäßiger Grenzwert von Polynomen; Aufgabe B5 gibt solche Polynome ausdrücklich an. Auf ganz $\mathbb{R}$ gilt der Satz nicht (Aufgabe V4).

14.10 Gegenbeispiele

(G1) Punktweise Grenzwerte stetiger Funktionen. $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$: alle f_n stetig, die Grenzfunktion unstetig bei 1. Satz 14.4 versagt ohne gleichmäßige Konvergenz.

(G2) Stetige Grenzfunktion ohne gleichmäßige Konvergenz. Sei $f_n(x) = nx\,e^{-nx}$ auf $[0,\infty)$. Für $x > 0$ ist $f_n(x) = te^{-t}$ mit $t = nx$, und nach Satz 9.11 (mit $m = 2$) ist $e^t \geq \frac{t^2}{2}$, also $0 < f_n(x) \leq \frac{2}{t} = \frac{2}{nx} \to 0$; ferner $f_n(0) = 0$. Die Grenzfunktion 0 ist stetig. Aber $f_n(1/n) = e^{-1}$, also $\|f_n\| \geq e^{-1}$ für alle n: Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig. Die Umkehrung von Satz 14.4 ist falsch.

(G3) Dini ohne Kompaktheit. Auf $[0,1)$ ist x^n monoton fallend in n, stetig, mit stetiger Grenzfunktion 0; die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn $\sup_{[0,1)} x^n = 1$. Der Definitionsbereich ist nicht kompakt: Im Beweis von Satz 14.5 sind für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ die Mengen $U_n = \{x \in [0,1) : x^n < \frac{1}{2}\} = [0, 2^{-1/n})$ wachsend und überdecken $[0,1)$, aber keine von ihnen ist ganz $[0,1)$. Ohne Monotonie versagt der Satz auch auf $[0,1]$: Die Funktionen aus (G2), eingeschränkt auf $[0,1]$, konvergieren punktweise gegen die stetige Funktion 0, nicht gleichmäßig und nicht monoton.

(G4) Falsches Integral. Sei $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ auf $[0,1]$. Für $0 < x < 1$ ist $0 < 1-x^2 < 1$, also $f_n(x) \to 0$ (Satz 4.32 mit $k = 1$ und $q = 1-x^2$); ferner ist $f_n(0) = f_n(1) = 0$. Die Grenzfunktion ist 0 mit Integral 0. Mit der Substitution $u = 1-x^2$ (Satz 13.10) ist aber

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \frac{n}{2}\int_0^1 u^n\,du = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}.$$

Die Funktionen bilden einen Buckel, der mit wachsendem n schmaler und höher wird und zur Stelle 0 wandert; seine Fläche verschwindet nicht.

(G5) Nicht integrierbare Grenzfunktion. Einheit 12, (G4), zeigt das mit Funktionen, die nur an endlich vielen Stellen von null verschieden und deshalb nach Folgerung 12.16 integrierbar sind; ihre Grenzfunktion ist die Dirichlet-Funktion. Nach Satz 14.6 kann die Konvergenz dort nicht gleichmäßig sein. Auch Stetigkeit der f_n hilft nicht. Sei $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$ auf $[0,1]$. Jedes f_n ist stetig und daher integrierbar. Es ist $f_n(0) = 0$, und für $x > 0$ ist $f_n(x) = \frac{x}{1/n+x^2} \to \frac{1}{x}$. Die Grenzfunktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ ist auf $[0,1]$ unbeschränkt, also nicht Riemann-integrierbar (Definition 12.2 verlangt Beschränktheit). Passend dazu wachsen die Integrale über alle Grenzen: Wegen $\left(\frac{1}{2}\ln(1+nx^2)\right)' = \frac{nx}{1+nx^2}$ ist nach Folgerung 13.5 $\int_0^1 f_n\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+n)$. Die Konvergenz ist nach Satz 14.4 nicht gleichmäßig, weil f bei 0 unstetig ist.

(G6) Unbeschränktes Intervall. $f_n(x) = \frac{1}{n}$ für $0 \leq x \leq n$ und $f_n(x) = 0$ für $x > n$. Es ist $\|f_n\|_{[0,\infty)} = \frac{1}{n} \to 0$, aber $\int_0^\infty f_n\,dx = 1$ für alle n (uneigentliches Integral, Definition 13.11). Der Faktor $b-a$ im Beweis von Satz 14.6 ist hier unendlich.

(G7) Gleichmäßiger Grenzwert ohne Ableitung. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und

$$0 \le f_n(x) - |x| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \le \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also $f_n \to |x|$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Auf jedem Intervall $[a, b]$ folgt das auch ohne Rechnung aus dem Satz von Dini (Satz 14.5), denn $\sqrt{x^2 + 1/n}$ fällt in n, und die Grenzfunktion $|x|$ ist stetig. Die Grenzfunktion ist bei 0 nicht differenzierbar. In Satz 14.8 fehlt die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen $f_n'(x) = x/\sqrt{x^2 + 1/n}$; sie konvergieren punktweise gegen die bei 0 unstetige Vorzeichenfunktion.

(G8) Gleichmäßige Konvergenz ohne Weierstraß-Majorante. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ konvergiert nach Satz 14.22 gleichmäßig auf $[0, 1]$, denn sie konvergiert bei $x = 1$. Aber $\|x^k/k\|_{[0,1]} = 1/k$, und $\sum 1/k$ divergiert. Es gibt also keine konvergente Majorante, die nicht von x abhängt: Wäre $|x^k/k| \le M_k$ für alle $x \in [0, 1]$, so wäre $M_k \ge 1/k$. Satz 14.10 ist hinreichend, nicht notwendig.

(G9) Keine gleichmäßige Konvergenz auf dem ganzen Konvergenzkreis. Die geometrische Reihe $\sum x^n$ hat Radius 1. Ihre Partialsummen s_n sind auf $(-1, 1)$ beschränkt durch $n + 1$, ihre Summe $1/(1 - x)$ ist dort unbeschränkt. Also ist $\|s_n - \frac{1}{1-x}\|_{(-1,1)} = \infty$ für jedes n. Satz 14.14 (3) verlangt zu Recht $\rho < R$.

(G10) Verhalten auf dem Rand. Alle drei Reihen haben Radius 1 (Satz 14.16); bei den letzten beiden ist $a_0 = 0$.

- $\sum z^n$ divergiert in jedem Punkt mit $|z| = 1$, weil $|z^n| = 1$ keine Nullfolge ist.
- $\sum_{n\ge1} z^n/n^2$ konvergiert in jedem Punkt mit $|z| = 1$ absolut, mit Majorante $\sum 1/n^2$.
- $\sum_{n\ge1} z^n/n$ divergiert bei $z = 1$ (harmonische Reihe) und konvergiert in jedem anderen Punkt mit $|z| = 1$, nicht absolut (Aufgabe V4 der Einheit 6).

Der Konvergenzradius entscheidet also nichts über den Rand.

(G11) Keine Umkehrung des Abelschen Satzes. Für $a_n = (-1)^n$ ist $\sum a_n x^n = \frac{1}{1+x}$ für $|x| < 1$, und das strebt für $x \to 1-$ gegen $\frac{1}{2}$. Die Reihe $\sum (-1)^n$ divergiert.

14.11 Durchgerechnete Beispiele

Beispiel 1 (Ableitung der Exponentialfunktion). Die Exponentialreihe $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat Radius ∞. Nach Satz 14.19 ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = E(x).$$

Das ist ein zweiter Beweis von $\exp' = \exp$ (Satz 10.9 (1)). Der erste brauchte eine eigene Abschätzung des Rests der Exponentialreihe; hier ist die Aussage ein Spezialfall des allgemeinen Satzes über Potenzreihen.

Beispiel 2 (die Leitfrage: $\ln 2$). Sei $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Diese Reihe ist die gliedweise integrierte Reihe der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, die Radius 1 hat (sie konvergiert für $|x| < 1$ nach Satz 6.2 und divergiert für $|x| > 1$ nach Folgerung 6.5). Nach Lemma 14.18 hat auch g den Radius 1, und nach Satz 14.21 ist für $|x| < 1$

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}.$$

Die Funktion $h(x) = g(x) - \ln(1+x)$ hat auf $(-1,1)$ nach Satz 10.9 (2) und der Kettenregel (Satz 10.6) die Ableitung 0 und erfüllt $h(0) = 0$; nach Folgerung 10.15 (1) ist sie dort konstant null. Also gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad (|x| < 1).$$

Das erklärt auch (G2) der Einheit 11. Die Reihe ist die Taylorreihe von $\ln(1+x)$ in 0 (Folgerung 14.20), und ihr Radius kann nicht größer als 1 sein: Sonst wäre ihre Summe g nach Satz 14.17 und Lemma 7.28 (1) in -1 stetig. Für $x_k = -1 + e^{-k} \in (-1, 0)$ gilt aber $x_k \to -1$ und $g(x_k) = \ln(e^{-k}) = -k$, im Widerspruch zum Folgenkriterium (Satz 7.10). Weil Satz 14.14 nur Kreisscheiben um den Entwicklungspunkt kennt, verhindert die Stelle -1 links auch die Konvergenz rechts: Für jedes $x > 1$ divergiert die Reihe nach Satz 14.14 (2), obwohl $\ln(1+x)$ dort beliebig oft differenzierbar ist.

Nun der Endpunkt 1. Die Reihe $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 6.16). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz 14.22 ist ihr Wert $\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1-} \ln(1+x)$, und wegen der Stetigkeit des Logarithmus in 2 (Definition 9.12) ist das $\ln 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

Damit ist die Leitfrage beantwortet: Die kurze Rechnung ist ein Beweis. Die gliedweise Integration im Innern rechtfertigt Satz 14.21, der auf der gleichmäßigen Konvergenz

auf kleineren Intervallen beruht; den Übergang zum Endpunkt rechtfertigt der Abelsche Satz, dessen Beweis wieder eine gleichmäßige Konvergenz liefert. An keiner Stelle wurde ein Restglied abgeschätzt; für eine andere Potenzreihe, die in einem Endpunkt konvergiert, ändert sich am Beweis nichts außer der Rechnung im Innern.

Bemerkung (drei Wege zu $\ln 2$*).* Der Kurs kennt jetzt drei Wege zu der Gleichung $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$. Einheit 11 schätzt das Restglied der Taylorformel ab (Satz 11.10 (4)). Einheit 13 nennt am Ende von Beispiel 7 (Abschnitt 13.10) einen zweiten Weg, ohne ihn auszuführen: endliche geometrische Summe für $\frac{1}{1+t}$, Integration mit dem Hauptsatz und Abschätzung des Restintegrals. Beide Wege brauchen eine Abschätzung, die eigens für den Logarithmus angestellt wird. Der Weg dieser Einheit braucht keine: Er setzt zwei allgemeine Sätze über Potenzreihen zusammen, Satz 14.21 im Innern und Satz 14.22 am Rand. Deshalb überträgt er sich ohne neue Abschätzung auf jede Potenzreihe, die in einem Endpunkt ihres Konvergenzintervalls konvergiert (für andere Endpunkte mit der Bemerkung nach Satz 14.22); neu zu bestimmen sind nur die Summe im Innern und ihr Grenzwert am Rand (Beispiel 3, Aufgabe R5).

Beispiel 3 (Leibniz-Reihe für π). Einheit 13 hat $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ mit einem Restintegral bewiesen (Abschnitt 13.10, Beispiel 7). Das Verfahren von Beispiel 2 gibt einen weiteren Beweis ohne Restabschätzung. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ ist die gliedweise integrierte Reihe von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ (geometrische Reihe in $-x^2$, Radius 1). Mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (Folgerung 10.19 (2)) und $\arctan 0 = 0$ folgt wie in Beispiel 2

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad (|x| < 1).$$

Die Reihe konvergiert auch bei $x = 1$ (Satz 6.16). Der Abelsche Satz, die Stetigkeit von arctan (Satz 9.31) und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (Abschnitt 9.9, Beispiel 5) geben

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Zum Rechnen taugt die Reihe nicht: Die Fehlerschranke des Leibniz-Kriteriums ist nach n Gliedern $\frac{1}{2n+1}$; sie sinkt erst nach etwa $5 \cdot 10^5$ Gliedern unter 10^{-6}.

Beispiel 4 (Bernstein-Polynome von x^2). Für $f(x) = x^2$ ist nach dem Beweis von Lemma 14.25

$$B_n f(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k^2 p_{n,k}(x) = \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.$$

Der Fehler ist $\frac{x(1-x)}{n}$, sein Maximum $\frac{1}{4n}$ bei $x = \frac{1}{2}$. Zwei Beobachtungen: Die Bernstein-Polynome reproduzieren nicht einmal das Polynom x^2 selbst, und sie konvergieren langsam, mit der Ordnung $1/n$. Ihre Stärke ist die Einfachheit des Konvergenzbeweises,

nicht die Güte der Näherung. Für $f(x) = x$ dagegen ist $B_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_k k\, p_{n,k}(x) = x$ nach Lemma 14.25.

Beispiel 5 (Weierstraß-Kriterium statt Abel). Sei $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. Auf $[0,1]$ hat die Reihe die Majorante $\sum_{n\ge 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k\ge 1} \frac{1}{k(k+1)}$, die nach dem Beispiel im Anschluss an Satz 6.2 (Teleskopreihe) den Wert 1 hat. Nach Satz 14.10 konvergiert sie gleichmäßig auf $[0,1]$, und S ist dort stetig. Durch zweimalige gliedweise Integration (Satz 14.21) der geometrischen Reihe erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) \quad (|x|<1), \qquad S(x) = \int_0^x -\ln(1-t)\,dt = (1-x)\ln(1-x) + x \quad (0 \le x < 1);$$

die letzte Stammfunktion prüft man durch Ableiten: $\big((1-t)\ln(1-t)+t\big)' = -\ln(1-t) - 1 + 1$. Wegen $(1-x)\ln(1-x) = y \ln y \to 0$ für $y = 1-x \to 0+$ (Satz 9.19 mit $\alpha = 1$) und der Stetigkeit von S auf $[0,1]$ ist $S(1) = 1$, in Übereinstimmung mit der Teleskopreihe. Hier liefert schon das Weierstraß-Kriterium die Stetigkeit am Endpunkt; der Abelsche Satz wird erst gebraucht, wenn wie in Beispiel 2 keine konvergente Majorante existiert (G8).

Beispiel 6 (ein Integral ohne elementare Stammfunktion). Die Funktion e^{-t^2} hat nach Satz 13.4 eine Stammfunktion, aber keine elementare (Bemerkung „Grenzen der Technik“ in Abschnitt 13.2, dort ohne Beweis). Ihr Integral lässt sich trotzdem berechnen. Setzt man $z = -t^2$ in die Exponentialreihe (Definition 9.1) ein, so ist

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^{2n} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Das ist eine Potenzreihe in t, deren Koeffizienten bei ungeraden Potenzen null sind; sie konvergiert nach Satz 9.2 für jedes t, nach der Bemerkung nach Satz 14.14 ist ihr Konvergenzradius also ∞. Satz 14.21 gibt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\, x^{2n+1}.$$

Für $x = 1$ ist das eine alternierende Reihe, deren Gliedbeträge $b_n = \frac{1}{n!\,(2n+1)}$ fallen und gegen 0 streben. Mit den Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n b_n$ gibt die Fehlerschranke des Leibniz-Kriteriums (Satz 6.16) $|I - s_4| \le b_5$ und $|I - s_5| \le b_6$ für den Wert I des Integrals. Wegen $s_5 = s_4 - b_5$ und $b_6 = \frac{1}{9360}$ folgt

$$0{,}7467 < s_5 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} \le \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \le s_5 + \frac{1}{9360} < 0{,}7469.$$

Kein Restglied musste abgeschätzt werden: Die Gültigkeit der Reihe kommt aus Satz 14.21, die Fehlerschranke aus dem Leibniz-Kriterium. Damit ist eingelöst, was die Bemerkung in Abschnitt 13.2 ankündigt.

14.12 Ausblick

- **Fourier-Reihen** (ohne Beweise). Statt nach Potenzen x^n entwickelt man eine 2π-periodische Funktion nach $\cos(nx)$ und $\sin(nx)$: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ mit $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ und $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$. Konvergiert eine trigonometrische Reihe gleichmäßig gegen f, so darf man nach Folgerung 14.11 (2) gliedweise integrieren; zusammen mit den Integralen $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx$ und ihren Verwandten folgt daraus, dass ihre Koeffizienten durch diese Formeln gegeben sind. Dieser Teil ist mit den Mitteln dieser Einheit beweisbar, wird hier aber nicht ausgeführt. Alles Weitere wird nur berichtet. Die Reihe $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}$ hat für $0 < x < 2\pi$ den Wert $\frac{\pi - x}{2}$, und ihre Partialsummen überschwingen an der Sprungstelle um einen festen Bruchteil der Sprunghöhe (Gibbs-Phänomen); die Konvergenz kann also nicht gleichmäßig sein, was zu Satz 14.4 passt. Mit Fourier-Reihen erhält man auch den Wert $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, den Einheit 6 nennt, aber nicht beweist. Es gibt stetige Funktionen, deren Fourier-Reihe in einem Punkt divergiert. Dagegen konvergieren die arithmetischen Mittel der Partialsummen für jede stetige periodische Funktion gleichmäßig (Satz von Fejér); daraus folgt eine trigonometrische Fassung des Weierstraßschen Approximationssatzes. Die natürliche Konvergenz für Fourier-Reihen ist die im quadratischen Mittel; sie gehört zur Theorie der Hilberträume.
- **Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion.** Nach Satz 14.10 und Folgerung 14.11 (1) ist die Funktion $W(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\cos(13^n \pi x)$ stetig auf $\mathbb{R}$. Dass sie an keiner Stelle differenzierbar ist, beweisen wir nicht; Funktionen dieser Bauart heißen nach Weierstraß. Satz 14.8 ist hier nicht anwendbar: Die gliedweise abgeleitete Reihe hat Glieder bis zur Größe $(13/2)^n\pi$.
- **Funktionentheorie.** In der Funktionentheorie erklärt man die Ableitung nach einer komplexen Veränderlichen und zeigt (hier ohne Beweis), dass Satz 14.19 dafür gilt und dass umgekehrt jede in einer Kreisscheibe $B_r(z_0)$ komplex differenzierbare Funktion dort Summe ihrer Taylorreihe um z_0 ist; deren Radius ist also mindestens r. Das erklärt, warum $\frac{1}{1+x^2}$, auf ganz $\mathbb{R}$ glatt, eine Taylorreihe um 0 mit Radius nur 1 hat: Bei $\pm i$ wird der Nenner null, und die Reihe $\sum(-1)^n x^{2n}$ hat nach Satz 14.15 genau den Radius 1. Satz 14.28 ist der Anfang des Identitätssatzes der Funktionentheorie.
- **Funktionenräume.** Lemma 14.2, Satz 14.3 und Aufgabe B2 (a) besagen, dass die beschränkten Funktionen $D \to \mathbb{K}$ mit der Supremumsnorm ein vollständiger normierter Raum sind; nach Satz 14.4 bilden die stetigen beschränkten Funktionen darin einen abgeschlossenen Teilraum. Der Weierstraßsche Approximationssatz sagt, dass die Polynome in diesem Raum für $D = [a, b]$ dicht liegen; seine Verallgemeinerung auf kompakte Räume ist der Satz von Stone-Weierstraß.
- **Roter Faden Vollständigkeit.** In dieser Einheit geht die Vollständigkeit an zwei

Stellen ein: im Cauchy-Kriterium 14.3, das auf Satz 4.31 ruht und das Weierstraß-Kriterium, den Satz über Ableitungen und den Abelschen Satz trägt; und in der Kompaktheit von $[a, b]$ (Lemma 8.11, bewiesen mit der Supremumseigenschaft), die im Satz von Dini und über den Satz vom Maximum und den Satz von Heine im Beweis des Bernsteinschen Satzes gebraucht wird. Damit schließt sich der Faden, den Einheit 2 mit der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus Cauchy-Folgen begonnen (Satz 2.33) und Einheit 5 in gleichwertige Gestalten zerlegt hat (Satz 5.14). Das Cauchy-Kriterium für Zahlenfolgen wird hier zum Cauchy-Kriterium für Funktionenfolgen, und die Supremumsnorm übernimmt für Funktionen die Rolle des Betrags. Über $\mathbb{Q}$ gäbe es schon die Grenzfunktion der Exponentialreihe nicht: Ihre Partialsummen bei 1 sind rational, ihr Grenzwert e ist es nicht ((G6) der Einheit 9).

- **Rückblick auf die Quantoren.** Einheit 1 hat in Abschnitt 1.12 angekündigt, dass sich gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz von ihren punktweisen Gegenstücken nur durch die Reihenfolge zweier Quantoren unterscheiden. Beide Unterschiede haben sich als folgenreich erwiesen: Der Beweis des Bernsteinschen Satzes beruht auf dem Satz von Heine (Satz 8.21), die Vertauschungssätze beruhen auf gleichmäßiger Konvergenz. (G1) bis (G5) zeigen, was die punktweise Fassung allein nicht leistet, (G6) bis (G11), wo auch die gleichmäßige Konvergenz an Grenzen stößt.
- **Wie es weitergeht.** Supremumsnorm und gleichmäßige Konvergenz kehren in der Analysis mehrerer Veränderlicher wieder, ebenso die Vertauschungssätze für Integrale, die von einem Parameter abhängen. Existenzsätze für Differentialgleichungen gewinnen Lösungen als gleichmäßige Grenzwerte und beruhen auf der Vollständigkeit, die Satz 14.3 ausspricht. Das Lebesgue-Integral ersetzt die gleichmäßige Konvergenz in Satz 14.6 durch schwächere Bedingungen (Ausblick der Einheit 12).

Zum Vergleich.[1] Der Stoff dieser Einheit gehört zum Abschluss einer ersten Analysis-Vorlesung und steht in den gängigen Lehrbüchern. In Otto Forster, Analysis 1 (12. Auflage 2016), steht er in § 21 und § 22, in anderer Reihenfolge und teils mit anderen Beweisen. Der Konvergenzradius ist dort das Supremum der Abstände vom Entwicklungspunkt, in denen die Reihe konvergiert (hier eine Folgerung aus Satz 14.14); die Formel von Cauchy-Hadamard und die Integrierbarkeit gleichmäßiger Grenzwerte Riemann-integrierbarer Funktionen sind dort Aufgaben (21.8 und 21.2). Den Satz über Ableitung und Grenzwert beweist Forster (§ 21, Satz 5) für stetig differenzierbare Funktionen mit dem Hauptsatz; diesem Weg folgt hier die Bemerkung nach Satz 14.8, während der Beweis von Satz 14.8 den Schrankensatz benutzt. Wie hier gewinnt Forster die Reihen für $\ln(1 + x)$ und $\arctan x$ aus der geometrischen Reihe und setzt sie mit dem Abelschen Grenzwertsatz bis zum Randpunkt 1 fort (§ 22, Sätze 4 bis 6); den Abelschen Satz beweist er mit Reihenresten, hier wird mit Teilsummen und dem Cauchy-Kriterium gearbeitet, und das gliedweise Integrieren beruht dort auf der Vertauschung von Integral

[1] O. Forster, *Analysis 1*, 12. Auflage (2016). O. Forster und R. Wessoly, *Übungsbuch zur Analysis 1*, 5. Auflage (2011).

und Grenzwert, hier auf der gliedweisen Differentiation. Der Identitätssatz für Potenzreihen steht dort als Corollar zu § 21, Satz 3, mit dem üblichen Beweis über den ersten nicht verschwindenden Koeffizienten; die Reihe $\sum \frac{\sin kx}{k}$ als Beispiel einer Reihe stetiger Funktionen mit unstetiger Summe ist dort Beispiel (21.2). Den Weierstraßschen Approximationssatz leitet Forster (§ 22, Satz 8) aus einer Reihenentwicklung von $|x|$ und stückweise linearen Funktionen her; hier wird er mit Bernstein-Polynomen bewiesen, einem Standardweg. Das Übungsbuch zur Analysis 1 von Forster und Wessoly (5. Auflage 2011), § 21, enthält den Satz von Dini für fallende Folgen mit Grenzwert 0 als Aufgabe 21 D und beweist ihn mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß; Satz 14.5 ist allgemeiner gefasst und wird hier mit offenen Überdeckungen bewiesen.

Aufgaben und Lösungen zu Einheit 14

Aufgaben

Stufe R – Rechnen

R1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Geben Sie an, ob die Quotientenformel (Satz 14.16) anwendbar ist.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} z^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{8^n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + (-1)^n\right)^n z^n$

R2. Bestimmen Sie die punktweise Grenzfunktion und entscheiden Sie mit Hilfe der Supremumsnorm, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

(a) $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$ auf $\mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$ auf $[0, \infty)$ und auf $[a, \infty)$ für festes $a > 0$.

(c) $f_n(x) = x^n(1 - x)$ auf $[0, 1]$.

(d) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x)$ auf $[0, 1]$. Vergleichen Sie mit (c).

R3. Sei $f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Leiten Sie die Reihe $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m}$ $(|x| < 1)$ gliedweise ab und zeigen Sie $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (m+1) x^{2m}$ für $|x| < 1$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Bestimmen Sie $f^{(10)}(0)$ und $f^{(11)}(0)$, ohne zehnmal abzuleiten.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe aus (a) für jedes x mit $|x| \geq 1$ divergiert, obwohl f auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.

R4. Sei $f(x) = x^3$ auf $[0, 1]$. Berechnen Sie das Bernstein-Polynom $B_n f$ und zeigen Sie

$$B_n f(x) - x^3 = \frac{x(1 - x)(3nx + 1 - 2x)}{n^2}, \qquad 0 \leq B_n f(x) - x^3 \leq \frac{1}{n} \quad (x \in [0, 1]).$$

Prüfen Sie das Ergebnis für $n = 1$ und $n = 2$ direkt an der Definition.

R5. Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Gehen Sie vor wie in Beispiel 2 des Kapitels: Stellen Sie $\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ für $0 \le x < 1$ als Potenzreihe dar, gehen Sie mit dem Abelschen Grenzwertsatz zu $x = 1$ über und berechnen Sie $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}$ mit der Zerlegung

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3(t^2-t+1)}.$$

Stufe B – Beweisen

B1. Seien $f_n, g_n, f, g : D \to \mathbb{K}$, und gelte $f_n \to f$ und $g_n \to g$ gleichmäßig auf D.

(a) Zeigen Sie, dass $f_n + g_n \to f + g$ gleichmäßig auf D.

(b) Zeigen Sie: Sind f und g beschränkt, so gilt $f_n g_n \to fg$ gleichmäßig auf D.

(c) Zeigen Sie an $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ auf $D = \mathbb{R}$, dass (b) ohne Beschränktheit falsch ist.

B2. Konvergiere (f_n) gleichmäßig auf D gegen f. Zeigen Sie:

(a) Ist D eine beliebige nichtleere Menge und sind alle $f_n : D \to \mathbb{K}$ beschränkt, so ist f beschränkt, und die Folge ist *gleichmäßig beschränkt*: Es gibt ein C mit $|f_n(x)| \le C$ für alle n und alle $x \in D$.

(b) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und sind alle $f_n : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig (Definition 8.19), so ist f gleichmäßig stetig.

B3. Sei $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe auf $[-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert und f dort stetig ist, und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Zeigen Sie mit Beispiel 5 des Kapitels $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ für $0 < |x| < 1$. Zeigen Sie dann, dass $f(x)+f(1-x)+\ln x \, \ln(1-x)$ auf $(0,1)$ nicht von x abhängt, bestimmen Sie die Konstante mit (a), und drücken Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$ durch $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\ln 2$ aus.

(c) Zeigen Sie, dass f in 1 nicht linksseitig differenzierbar ist, obwohl die Reihe dort konvergiert und f auf $[-1, 1]$ stetig ist.

B4. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$, betrachtet für $x \in (-R, R)$.

(a) Zeigen Sie: Ist f auf $(-R, R)$ gerade, also $f(-x) = f(x)$, so ist $a_n = 0$ für jedes ungerade n.

(b) Zeigen Sie mit Satz 14.28, dass es keine solche Reihe mit $f(\frac{1}{k}) = \frac{(-1)^k}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < R$ gibt.

B5. (Polynome, die gegen $\sqrt{x}$ und $|t|$ konvergieren.) Für $x \in [0,1]$ sei $p_0(x) = 0$ und $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2)$.

(a) Zeigen Sie durch Induktion $0 \le p_n(x) \le p_{n+1}(x) \le \sqrt{x}$ für alle n und $x \in [0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass (p_n) auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

(c) Folgern Sie: Es gibt Polynome P_n mit $P_n(t) \to |t|$ gleichmäßig auf $[-1,1]$, und zwar ohne Satz 14.27.

Stufe V – Vertiefen

V1. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Konstante L (Definition 8.19). Zeigen Sie

$$\|B_n f - f\|_{[0,1]} \le \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst für Zahlen c_k und Gewichte $w_k \ge 0$ mit $\sum_k w_k = 1$ die Ungleichung $\left(\sum_k c_k w_k\right)^2 \le \sum_k c_k^2 w_k$.

V2. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\int_0^1 f(x) x^n \, dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $f = 0$ ist.

V3. (Ein Taubersatz.) Seien $a_n \ge 0$, die Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiere für $0 \le x < 1$, und der Grenzwert $s = \lim_{x \to 1-} f(x)$ existiere in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sum a_n$ konvergiert und den Wert s hat.

(b) Sei $a_n = (-1)^n (n+1)$. Zeigen Sie, dass $\sum a_n x^n$ für $0 \le x < 1$ konvergiert und $\lim_{x \to 1-} \sum a_n x^n$ existiert, obwohl $\sum a_n$ divergiert. Welche Voraussetzung von (a) fehlt?

V4. Konvergiere eine Folge von Polynomen (P_n) gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion f. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist. Folgern Sie, dass sich exp auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt, obwohl die Partialsummen der Exponentialreihe auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig konvergieren.

V5. (Das Quadrat der alternierenden harmonischen Reihe.) Sei $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, $H_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$ und $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ das Cauchy-Produkt von $\sum a_n$ mit sich selbst.

(a) Zeigen Sie $c_n = (-1)^n \frac{2H_{n+1}}{n+2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sum c_n$ konvergiert. Hinweis: $H_m \le 2\sqrt{m}$.

(c) Folgern Sie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2H_{n+1}}{n+2} = (\ln 2)^2$. Vergleichen Sie mit (G6) der Einheit 6.

Lösungen

Lösung R1. (a) $a_n = n^2/3^n$. Es ist $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 3\frac{n^2}{(n+1)^2} \to 3$ für $n \ge 1$, also $R = 3$ nach Satz 14.16. (Der Koeffizient $a_0 = 0$ stört nicht, die Formel verlangt nur fast alle $a_n \neq 0$.)

(b) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Es ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \to 4,$$

also $R = 4$.

(c) Die Koeffizienten sind $c_k = 8^{-k/3}$ für $k \in 3\mathbb{N}_0$ und $c_k = 0$ sonst. Die Quotientenformel ist nicht anwendbar, weil unendlich viele Koeffizienten null sind. Für $k = 3n$ mit $n \ge 1$ ist $\sqrt[k]{|c_k|} = (8^{-n})^{1/(3n)} = \frac{1}{2}$, sonst ist die Wurzel 0. Also $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{2}$ und nach Satz 14.15 $R = 2$. Direkt: Die Reihe ist die geometrische Reihe in $w = z^3/8$ und konvergiert genau für $|z|^3 < 8$.

(d) $\sqrt[n]{|a_n|} = 2 + (-1)^n$, also 3 für gerade und 1 für ungerade n. Der Limes superior ist 3, also $R = \frac{1}{3}$. Die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ sind $\frac{3^n}{1}$ für gerade n und $\frac{1}{3^{n+1}}$ für ungerade n; sie haben keinen Grenzwert, die Quotientenformel ist nicht anwendbar.

Lösung R2. (a) Punktweise: Für $x \neq 0$ ist $|f_n(x)| \le \frac{|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2|x|} \to 0$, und $f_n(0) = 0$; die Grenzfunktion ist 0. Die Funktion f_n ist ungerade; für $x \ge 0$ ist

$$f_n'(x) = \frac{(1+n^2x^2) - 2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2},$$

also wächst f_n auf $[0, \frac{1}{n}]$ und fällt auf $[\frac{1}{n}, \infty)$. Das Maximum ist $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n}$. Somit $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2n} \to 0$: gleichmäßige Konvergenz.

(b) Punktweise: $f_n(0) = 0$, für $x > 0$ ist $0 \le f_n(x) \le \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \to 0$; Grenzfunktion 0. Wegen $f_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$ ist $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ das Maximum auf $[0, \infty)$, also $\|f_n\|_{[0,\infty)} = \frac{1}{2}$:

keine gleichmäßige Konvergenz. Auf $[a,\infty)$: Für $n \geq \frac{1}{a}$ ist $a \geq \frac{1}{n}$, und f_n fällt auf $[a,\infty)$. Also ist $\|f_n\|_{[a,\infty)} = f_n(a) \leq \frac{1}{na} \to 0$: gleichmäßige Konvergenz. Die schlechte Stelle $\frac{1}{n}$ wandert gegen 0 und verlässt jeden Bereich $[a,\infty)$.

(c) Punktweise Grenzfunktion 0 (für $x < 1$ wegen $x^n \to 0$, bei $x = 1$ wegen des Faktors $1-x$). Es ist $f_n'(x) = x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big)$, das Maximum auf $[0,1]$ liegt bei $x = \frac{n}{n+1}$:

$$\|f_n\|_{[0,1]} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig. Der Faktor $1-x$ dämpft genau dort, wo x^n langsam fällt.

(d) Die Partialsummen sind nach der geometrischen Summe (Satz 1.13) $s_N(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n = 1 - x^{N+1}$ für $x \in [0,1)$, und $s_N(1) = 0$. Die Summe ist 1 auf $[0,1)$ und 0 bei 1, also unstetig; nach Satz 14.4 ist die Konvergenz nicht gleichmäßig. Vergleich: Die Glieder $x^n(1-x)$ konvergieren nach (c) gleichmäßig gegen 0, aber die Reihe konvergiert nicht gleichmäßig. Gleichmäßige Konvergenz der Glieder gegen 0 ist notwendig: Konvergiert eine Funktionenreihe $\sum g_n$ gleichmäßig, so ist nach dem Cauchy-Kriterium 14.3 (mit $m = n+1$) $\|g_{n+1}\| = \|s_{n+1} - s_n\| \to 0$. Sie ist aber nicht hinreichend, wie (c) und (d) zeigen.

Lösung R3. (a) Die Reihe $g(x) = \sum_{m\geq 0}(-1)^m x^{2m}$ ist die geometrische Reihe in $-x^2$; sie konvergiert für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1+x^2}$ (Satz 6.2) und divergiert für $|x| > 1$, weil die Glieder dann keine Nullfolge bilden (Folgerung 6.5). Ihr Radius ist also 1 (Satz 14.14 und die Bemerkung danach). Nach Satz 14.19 ist für $|x| < 1$

$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2} = g'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, 2m\, x^{2m-1}.$$

Für $0 < |x| < 1$ teilt man durch $-2x$ und setzt $m = j+1$:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} m\, x^{2m-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (j+1) x^{2j}.$$

Für $x = 0$ sind beide Seiten 1. Die Reihe hat den Radius 1: Für $0 \leq r < 1$ ist $((j+1)r^{2j})$ nach Satz 4.32 und Satz 4.4 (2) eine Nullfolge, also beschränkt; für $r \geq 1$ ist $(j+1)r^{2j} \geq j+1$ unbeschränkt. (Die Koeffizientenfolge hat an den ungeraden Stellen den Wert 0; das ändert an der Beschränktheit nichts.)

(b) Nach Folgerung 14.20 ist $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$, wobei a_k der Koeffizient von x^k in der Reihe aus (a) ist. Dabei hat f auf $\mathbb{R}$ und die Summe auf $(-1,1)$ dieselben Ableitungen

in 0, denn diese hängen nur von den Werten nahe 0 ab (Bemerkung über Lokalität in Abschnitt 10.1). Für $k = 10 = 2 \cdot 5$ ist $a_{10} = (-1)^5 \cdot 6 = -6$, also

$$f^{(10)}(0) = -6 \cdot 10! = -21\,772\,800.$$

Ungerade Potenzen kommen nicht vor, also $a_{11} = 0$ und $f^{(11)}(0) = 0$.

(c) Für $|x| \geq 1$ ist $|(-1)^j(j+1)x^{2j}| \geq j+1$; die Glieder bilden keine Nullfolge, die Reihe divergiert (Folgerung 6.5). Dagegen ist f nach der Quotientenregel (Satz 10.5) auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, weil der Nenner $(1+x^2)^2$ keine Nullstelle hat. Der Konvergenzradius 1 ist an der reellen Funktion nicht zu erkennen; den Grund nennt der Ausblick (Funktionentheorie): Der Nenner verschwindet bei $\pm i$.

Lösung R4. Mit $p_{n,k}$ wie in Definition 14.24 ist $B_n f(x) = \frac{1}{n^3}\sum_k k^3 p_{n,k}(x)$. Man schreibt $k^3 = k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k$ (ausmultiplizieren: $k^3-3k^2+2k+3k^2-3k+k = k^3$). Wie in Lemma 14.25 ist $k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)\binom{n-3}{k-3}$ für $3 \leq k \leq n$, also $\sum_k k(k-1)(k-2)p_{n,k}(x) = n(n-1)(n-2)x^3$ (für $n \leq 2$ sind beide Seiten null). Mit den Formeln aus dem Beweis von Lemma 14.25 folgt

$$B_n f(x) = \frac{n(n-1)(n-2)x^3 + 3n(n-1)x^2 + nx}{n^3} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2}x^2 + \frac{x}{n^2}.$$

Wegen $(n-1)(n-2) - n^2 = -3n+2$ ist

$$n^2\big(B_n f(x) - x^3\big) = (2-3n)x^3 + 3(n-1)x^2 + x = 3nx^2(1-x) + x(2x^2-3x+1).$$

Mit $2x^2-3x+1 = (1-x)(1-2x)$ wird das $x(1-x)\big(3nx+1-2x\big)$, die behauptete Formel.

Abschätzung für $x \in [0,1]$: Es ist $x(1-x) \geq 0$ und $3nx+1-2x \geq 3x+1-2x = 1+x > 0$, also $B_n f(x) \geq x^3$. Ferner $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ und $3nx+1-2x \leq 3n+1 \leq 4n$, also $B_n f(x) - x^3 \leq \frac{4n}{4n^2} = \frac{1}{n}$.

Kontrolle: Für $n=1$ ist $B_1 f(x) = f(0)(1-x)+f(1)x = x$, und die Formel gibt $x^3+x(1-x)(1+x) = x^3+x-x^3 = x$. Für $n=2$ ist $B_2 f(x) = f(0)(1-x)^2+f(\frac{1}{2})\cdot 2x(1-x)+f(1)x^2 = \frac{x(1-x)}{4}+x^2 = \frac{x+3x^2}{4}$, und die Formel gibt $x^3+\frac{x(1-x)(1+4x)}{4} = x^3+\frac{x+3x^2-4x^3}{4} = \frac{x+3x^2}{4}$.

Lösung R5. Für $|t|<1$ ist $\frac{1}{1+t^3} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{3n}$ (geometrische Reihe in $-t^3$, Satz 6.2). Diese Potenzreihe hat den Radius 1: Für $|t|<1$ konvergiert sie, für $|t|>1$ bilden die Glieder keine Nullfolge. Nach Satz 14.21 ist für $0 \leq x < 1$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = g(x), \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}.$$

Die Zahlen $\frac{1}{3n+1}$ fallen monoton gegen 0; nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 6.16) konvergiert $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$. Die Koeffizientenfolge von g hat an der Stelle $3n+1$ den Wert $\frac{(-1)^n}{3n+1}$ und sonst den Wert 0; die Partialsummen ihrer Reihe sind Partialsummen von $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$, jede höchstens dreimal wiederholt, und konvergieren deshalb gegen denselben Wert. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz 14.22 ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3},$$

zuletzt wegen der Stetigkeit der Integralfunktion (Satz 13.3 (1)). Die Zerlegung prüft man durch den Hauptnenner $3(1+t)(t^2-t+1) = 3(1+t^3)$: Der Zähler ist $(t^2-t+1)+(2-t)(1+t) = t^2-t+1+2+t-t^2 = 3$. Es ist $\int_0^1 \frac{dt}{3(1+t)} = \frac{\ln 2}{3}$, denn $\frac{1}{3}\ln(1+t)$ hat nach Satz 10.9 (2) und Satz 10.6 die Ableitung $\frac{1}{3(1+t)}$ (Folgerung 13.5). Im zweiten Teil schreibt man $2-t = -\frac{1}{2}(2t-1)+\frac{3}{2}$ und $t^2-t+1 = (t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$:

$$\int_0^1 \frac{2-t}{t^2-t+1}\,dt = -\frac{1}{2}\Big[\ln(t^2-t+1)\Big]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Der erste Summand ist 0: Wegen $t^2-t+1 = (t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$ ist $\ln(t^2-t+1)$ nach Satz 10.6 und Satz 10.9 (2) eine Stammfunktion von $\frac{2t-1}{t^2-t+1}$ (Folgerung 13.5), und t^2-t+1 hat bei 0 und bei 1 den Wert 1. Im zweiten substituiert man (Satz 13.10) $u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$, $(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1+u^2)$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}.$$

Dabei ist arctan nach Folgerung 10.19 (2) eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+u^2}$ (Folgerung 13.5), und $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (Abschnitt 9.9, Beispiel 5), also $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ (Satz 9.31). Ebenso ist $\tan(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, weil sin ungerade und cos gerade ist (Satz 9.21 (2)), und wegen $-\frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ folgt $\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$. Zusammen:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0{,}83564\ldots$$

Bemerkung: Wie bei $\ln 2$ und $\frac{\pi}{4}$ taugt die Reihe nicht zum Rechnen; nach dem Leibniz-Kriterium ist der Fehler nach n Gliedern höchstens $\frac{1}{3n+1}$.

Lösung B1. (a) Nach Lemma 14.2 ist $\|(f_n + g_n) - (f + g)\| \le \|f_n - f\| + \|g_n - g\| \to 0$.

(b) Es ist $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$, also

$$\|f_n g_n - fg\| \le \|f_n\|\,\|g_n - g\| + \|g\|\,\|f_n - f\|.$$

Für fast alle n ist $\|f_n - f\| \le 1$, also $\|f_n\| \le \|f\| + 1$. Mit $C = \max(\|f\| + 1, \|g\|) < \infty$ ist die rechte Seite für diese n höchstens $C(\|g_n - g\| + \|f_n - f\|) \to 0$.

(c) Es ist $\|f_n - x\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n} \to 0$, also $f_n \to f$ und $g_n \to g$ gleichmäßig mit $f(x) = g(x) = x$. Aber

$$f_n(x)g_n(x) - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2},$$

und das ist für festes n auf $\mathbb{R}$ unbeschränkt; also $\|f_n g_n - fg\|_{\mathbb{R}} = \infty$ für alle n. In (b) ging die Schranke $\|g\| < \infty$ ein; hier ist g unbeschränkt.

Lösung B2. (a) Wähle N mit $\|f_n - f\| \le 1$ für $n \ge N$. Dann ist $|f(x)| \le |f_N(x)| + 1 \le \|f_N\| + 1$, also f beschränkt. Für $n \ge N$ ist $\|f_n\| \le \|f\| + 1$. Mit

$$C = \max\bigl(\|f_1\|, \dots, \|f_{N-1}\|,\ \|f\| + 1\bigr)$$

gilt $|f_n(x)| \le C$ für alle n und x; das Maximum ist endlich, weil es endlich viele endliche Zahlen sind. Der Beweis benutzt nur Lemma 14.2 und gilt für jede Menge D.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N mit $\|f_N - f\| < \varepsilon/3$ und dazu, weil f_N gleichmäßig stetig ist, ein $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$. Für diese x, y ist

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Das δ hängt nur von ε ab, nicht von x und y; also ist f gleichmäßig stetig. Der Beweis ist der von Satz 14.4, mit y an Stelle von c.

Lösung B3. (a) Für $|x| \le 1$ ist $\bigl|\frac{x^n}{n^2}\bigr| \le \frac{1}{n^2}$, und $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert (Folgerung 6.12). Nach Satz 14.10 konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[-1, 1]$, nach Folgerung 14.11 (1) ist f dort stetig. Der Radius ist 1 nach Satz 14.16, denn $\frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1$.

(b) Nach Satz 14.19 ist für $|x| < 1$

$$xf'(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x),$$

die letzte Gleichung nach Beispiel 5 des Kapitels (Indexverschiebung $n = m + 1$). Für $x \ne 0$ folgt $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

Sei $h(x) = f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)$ für $0 < x < 1$; mit x liegt auch $1-x$ in $(0,1)$. Nach Kettenregel und Produktregel (Satz 10.6, Satz 10.5) und Satz 10.9 (2) hat $x \mapsto f(1-x)$ die Ableitung $-f'(1-x) = \frac{\ln x}{1-x}$, und

$$h'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0.$$

Nach Folgerung 10.15 (1) ist h auf $(0,1)$ konstant. Für $x \to 0+$ gilt $f(x) \to f(0) = 0$ und $f(1-x) \to f(1)$, weil f nach (a) auf $[-1,1]$ stetig ist, und

$$\ln x \ln(1-x) = (x \ln x) \cdot \frac{\ln(1-x)}{x} \to 0 \cdot (-1) = 0,$$

denn $x \ln x \to 0$ (Satz 9.19 mit $\alpha = 1$) und $\frac{\ln(1-x)-\ln 1}{-x} \to \ln'(1) = 1$ (Satz 10.9 (2)). Also ist $h = f(1)$ auf $(0,1)$. Mit $x = \frac{1}{2}$ folgt $2f(\frac{1}{2}) + (\ln 2)^2 = f(1)$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\, 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Der Wert von $\sum \frac{1}{n^2}$ wird im Kurs nicht bestimmt und hier nicht gebraucht.

(c) Angenommen, der linksseitige Differenzenquotient $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ hätte für $x \to 1-$ einen endlichen Grenzwert d. Sei $0 < x < 1$. Die Funktion f ist auf $[x,1]$ stetig nach (a) und auf $(x,1)$ differenzierbar nach (b); der Mittelwertsatz (Satz 10.14) liefert ein $\xi \in (x,1)$ mit

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = f'(\xi) = \frac{-\ln(1-\xi)}{\xi} \geq -\ln(1-\xi) > -\ln(1-x),$$

denn $0 < \xi < 1$, $-\ln(1-\xi) > 0$ und ln ist streng wachsend mit $1-\xi < 1-x$. Für $x \to 1-$ strebt $-\ln(1-x)$ gegen ∞, also auch der Differenzenquotient, im Widerspruch zur Annahme. Die Konvergenz der Reihe im Endpunkt und die Stetigkeit dort sagen also nichts über die Differenzierbarkeit dort; die abgeleitete Reihe $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$ divergiert bei $x = 1$.

Lösung B4. (a) Die Reihe $\sum (-1)^n a_n x^n$ hat denselben Radius R, denn ihre Koeffizienten haben dieselben Beträge, und ihre Summe ist $f(-x)$. Die beiden Potenzreihen stimmen auf $(-R,R)$ überein. Mit $r = \frac{1}{2}\min\{R,1\}$ liegen die Punkte $x_k = \frac{r}{k+1}$ in $(-R,R)\setminus\{0\}$ und streben gegen 0; nach Satz 14.28 haben die Reihen dieselben Koeffizienten, also $a_n = (-1)^n a_n$, und für ungerades n folgt $2a_n = 0$. (Ebenso folgt das aus Folgerung 14.20.)

(b) Angenommen, eine solche Reihe existiert. Die Potenzreihe für $f(x)-x$ hat dieselben Koeffizienten wie f bis auf $a_1 - 1$ an der Stelle 1, also ebenfalls den Radius R. Sei k_0

so groß, dass $\frac{1}{2k_0} < R$. Die Punkte $x_k = \frac{1}{2k}$ $(k \geq k_0)$ liegen in $(0,R)$, streben gegen 0, und es ist $f(x_k) - x_k = \frac{(-1)^{2k}}{2k} - \frac{1}{2k} = 0$. Nach Satz 14.28 ist $f(x) = x$ für alle $x \in (-R,R)$. Für $k \geq k_0$ liegt aber auch $\frac{1}{2k+1}$ in $(0,R)$, und dort müsste $f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{2k+1}$ und zugleich $f(\frac{1}{2k+1}) = -\frac{1}{2k+1}$ gelten, ein Widerspruch. Die Werte auf den geraden und den ungeraden Stammbrüchen legen zwei verschiedene Potenzreihen fest.

Lösung B5. (a) Induktion über n; wir zeigen $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$ und daraus $p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. Für $n = 0$ ist $p_0(x) = 0 \leq \sqrt{x}$. Gelte $0 \leq p_n(x) \leq \sqrt{x}$. Dann ist $p_n(x)^2 \leq x$, also $p_{n+1}(x) \geq p_n(x) \geq 0$, und

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \big(\sqrt{x} - p_n(x)\big) - \frac{1}{2}\big(\sqrt{x} - p_n(x)\big)\big(\sqrt{x} + p_n(x)\big) = \big(\sqrt{x} - p_n(x)\big)\Big(1 - \frac{\sqrt{x} + p_n(x)}{2}\Big).$$

Beide Faktoren sind nichtnegativ, der zweite wegen $\sqrt{x} + p_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$. Also $0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$, und der Induktionsschritt ist vollständig.

(b) Für festes x ist $(p_n(x))$ monoton wachsend und durch $\sqrt{x}$ beschränkt, also konvergent (Satz 4.16) gegen ein $L \in [0,\sqrt{x}]$ (Satz 4.10). Grenzübergang in der Rekursion (Satz 4.9) gibt $L = L + \frac{1}{2}(x - L^2)$, also $L^2 = x$ und wegen $L \geq 0$ dann $L = \sqrt{x}$. Die p_n sind Polynome (Induktion: Mit p_n ist auch $p_n + \frac{1}{2}(x - p_n^2)$ ein Polynom), also stetig; die Grenzfunktion $\sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ stetig (Folgerung 7.27), und die Folge wächst monoton. Nach dem Satz von Dini (Satz 14.5, Fassung für wachsende Folgen) ist die Konvergenz auf $[0,1]$ gleichmäßig.

(c) Setze $P_n(t) = p_n(t^2)$; das ist ein Polynom in t. Für $t \in [-1,1]$ ist $t^2 \in [0,1]$ und $\sqrt{t^2} = |t|$, also

$$|P_n(t) - |t|| = |p_n(t^2) - \sqrt{t^2}| \leq \big\|p_n - \sqrt{\cdot}\big\|_{[0,1]} \to 0.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $[-1,1]$. Das bestätigt für $|t|$ die Bemerkung nach Satz 14.27 mit ausdrücklich angegebenen Polynomen; anders als die Bernstein-Polynome sind sie rekursiv erzeugt.

Lösung V1. *Hilfsungleichung.* Sei $\mu = \sum_k c_k w_k$. Dann ist

$$0 \leq \sum_k (c_k - \mu)^2 w_k = \sum_k c_k^2 w_k - 2\mu \sum_k c_k w_k + \mu^2 \sum_k w_k = \sum_k c_k^2 w_k - \mu^2.$$

Abschätzung. Für $x \in [0,1]$ ist nach Lemma 14.25

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big) - f(x)\Big| p_{n,k}(x) \leq L \sum_{k=0}^{n} \Big|\frac{k}{n} - x\Big| p_{n,k}(x).$$

Die Hilfsungleichung mit $c_k = |\frac{k}{n} - x|$ und $w_k = p_{n,k}(x)$ (nichtnegativ mit Summe 1) und die dritte Formel des Lemmas geben

$$\Big(\sum_k \Big|\frac{k}{n} - x\Big| p_{n,k}(x)\Big)^2 \le \sum_k \frac{(k-nx)^2}{n^2} p_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n}.$$

Also $|B_n f(x) - f(x)| \le \frac{L}{2\sqrt{n}}$ für alle x, und das ist die Behauptung. Bemerkung: Für $f(x) = x^2$ (Lipschitz mit $L = 2$) ist der wahre Fehler $\frac{1}{4n}$ (Beispiel 4 des Kapitels), also viel kleiner als die Schranke $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Die Schranke ist allgemein, nicht scharf für glatte Funktionen.

Lösung V2. Aus der Voraussetzung und der Linearität des Integrals folgt für jedes Polynom P die Gleichung $\int_0^1 f(x)P(x)\,dx = 0$. Nach Satz 14.27 gibt es Polynome P_k mit $\|P_k - f\|_{[0,1]} \to 0$. Dann ist

$$\|fP_k - f^2\|_{[0,1]} \le \|f\|_{[0,1]}\, \|P_k - f\|_{[0,1]} \to 0,$$

mit $\|f\| < \infty$ nach dem Satz vom Maximum (Satz 8.16). Nach Satz 14.6 ist

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f(x)P_k(x)\,dx = 0.$$

Angenommen, $f(c) \neq 0$ für ein $c \in [0,1]$. Wegen der Stetigkeit von f^2 gibt es ein Intervall $J \subseteq [0,1]$ der Länge $\eta > 0$ mit $c \in J$ und $f(x)^2 \ge \frac{1}{2} f(c)^2$ auf J. Wegen $f^2 \ge 0$ und der Monotonie des Integrals ist dann $\int_0^1 f^2\,dx \ge \int_J f^2\,dx \ge \frac{\eta}{2} f(c)^2 > 0$, ein Widerspruch. Also $f = 0$.

Lösung V3. (a) Wegen $a_n \ge 0$ ist f auf $[0,1)$ monoton wachsend: Für $0 \le x < y < 1$ ist $a_n x^n \le a_n y^n$ für jedes n, also $f(x) \le f(y)$. Daraus folgt $f(x) \le s$ für alle $x \in [0,1)$: Wäre $f(x_1) > s$, so wäre $f(y) \ge f(x_1) > s$ für alle $y \in (x_1, 1)$, im Widerspruch zu $f(y) \to s$.

Für jedes N und $x \in [0,1)$ ist die Partialsumme $\sum_{n=0}^N a_n x^n \le f(x) \le s$, weil die weggelassenen Glieder nichtnegativ sind. Die linke Seite ist ein Polynom in x, also stetig; für $x \to 1-$ folgt $\sum_{n=0}^N a_n \le s$. Die Partialsummen von $\sum a_n$ wachsen also monoton und sind durch s beschränkt; die Reihe konvergiert gegen ein $t \le s$ (Monotonieprinzip, Satz 4.16). Nach dem Abelschen Grenzwertsatz 14.22 ist dann $s = \lim_{x\to 1-} f(x) = t$.

(b) Die Reihe $\sum_{n\ge 0} (-1)^n x^{n+1} = \frac{x}{1+x}$ hat den Radius 1 (geometrische Reihe in $-x$, mal x). Nach Satz 14.19 ist für $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \Big(\frac{x}{1+x}\Big)' = \frac{1}{(1+x)^2} \to \frac{1}{4} \qquad (x \to 1-).$$

Die Reihe $\sum(-1)^n(n+1)$ divergiert, weil ihre Glieder dem Betrag nach $n+1$ sind und keine Nullfolge bilden (Folgerung 6.5). Es fehlt die Voraussetzung $a_n \geq 0$. Das Beispiel zeigt mehr als (G11): Der Grenzwert für $x \to 1-$ existiert sogar, wenn die Glieder unbeschränkt sind.

Lösung V4. *Hilfssatz: Ein nicht konstantes Polynom ist auf $\mathbb{R}$ unbeschränkt.* Sei $P(x) = \sum_{j=0}^{d} c_j x^j$ mit $d \geq 1$ und $c_d \neq 0$, und sei $C = \sum_{j<d} |c_j|$. Für $|x| \geq 1$ ist $|x|^j \leq |x|^{d-1}$ für $j < d$, also

$$|P(x)| \geq |c_d|\,|x|^d - C|x|^{d-1} = |x|^{d-1}\big(|c_d|\,|x| - C\big),$$

und das wird für $|x| \to \infty$ beliebig groß.

Hauptteil. Nach dem Cauchy-Kriterium 14.3 gibt es N mit $|P_n(x) - P_m(x)| \leq 1$ für alle $n, m \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n \geq N$ ist also das Polynom $P_n - P_N$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt, nach dem Hilfssatz konstant: $P_n = P_N + c_n$ mit $c_n \in \mathbb{R}$. Es ist $c_n = P_n(0) - P_N(0) \to f(0) - P_N(0) =: c$. Für jedes x ist daher $f(x) = \lim_n P_n(x) = P_N(x) + c$; also ist f ein Polynom.

Folgerung. Wäre exp gleichmäßiger Grenzwert von Polynomen auf $\mathbb{R}$, so wäre exp ein Polynom, etwa vom Grad höchstens d. Dann wäre die $(d+1)$-te Ableitung null; sie ist aber exp > 0. Das widerspricht nicht der Konvergenz der Exponentialreihe: Ihre Partialsummen s_n konvergieren nach Satz 14.14 (3) auf jedem Intervall $[-\rho, \rho]$ gleichmäßig, aber auf $\mathbb{R}$ ist $\|\exp - s_n\|_{\mathbb{R}} = \infty$ für jedes n, denn $\exp(x) - s_n(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ für $x \geq 0$, und das ist unbeschränkt. Der Weierstraßsche Approximationssatz braucht ein kompaktes Intervall.

Lösung V5. (a) Es ist $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^{n-k}}{(k+1)(n-k+1)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)}$. Wegen $(k+1) + (n-k+1) = n+2$ ist

$$\frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2}\Big(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1}\Big).$$

Summiert über $k = 0, \dots, n$ durchlaufen $k+1$ und $n-k+1$ beide die Zahlen $1, \dots, n+1$; also $c_n = (-1)^n \frac{2H_{n+1}}{n+2}$.

(b) Sei $d_n = \frac{H_{n+1}}{n+2}$. *Monotonie:* Mit $H_{n+2} = H_{n+1} + \frac{1}{n+2}$ ist

$$d_n - d_{n+1} = \frac{(n+3)H_{n+1} - (n+2)H_{n+1} - 1}{(n+2)(n+3)} = \frac{H_{n+1} - 1}{(n+2)(n+3)} \geq 0,$$

weil $H_{n+1} \geq H_1 = 1$. *Nullfolge:* Für $m \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens $\sqrt{m}$ Summanden $\frac{1}{i}$ mit $i \leq \sqrt{m}$, jeder höchstens 1; die mit $\sqrt{m} < i \leq m$ sind höchstens m Stück, jeder kleiner

als $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Also $H_m \le \sqrt{m} + \frac{m}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{m}$ und $0 \le d_n \le \frac{2\sqrt{n+1}}{n+2} \le \frac{2}{\sqrt{n+1}} \to 0$. Nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 6.16) konvergiert $\sum c_n = \sum (-1)^n 2d_n$.

(c) Nach Beispiel 2 des Kapitels (oder Satz 11.10 (4)) ist $\sum a_n = \sum_{n\ge 0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$. Die Reihe $\sum a_n$ konvergiert, ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst konvergiert nach (b); nach dem Abelschen Produktsatz (Folgerung 14.23) ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2H_{n+1}}{n+2} = (\ln 2)^2 = 0{,}48045\ldots$$

Vergleich mit (G6) der Einheit 6: Dort wird $\sum a_n$ mit einer langsamer fallenden alternierenden Reihe multipliziert, und das Cauchy-Produkt divergiert. Satz 6.23 ist hier nicht anwendbar, weil $\sum a_n$ nicht absolut konvergiert; die Konvergenz des Produkts muss deshalb eigens gezeigt werden, und erst dann liefert Folgerung 14.23 den Wert.

Quellenverzeichnis

Die folgenden Werke werden in den Abschnitten „Zum Vergleich“ der jeweiligen Einheiten ausdrücklich herangezogen. Seiten- und Abschnittsnachweise stehen jeweils direkt bei der betreffenden Erörterung.

- Forster, Otto: *Analysis 1*. 12. Auflage. Springer Spektrum, 2016.
- Forster, Otto; Wessoly, Rüdiger: *Übungsbuch zur Analysis 1*. 5. Auflage. Vieweg+Teubner, 2011.