# Der Einbettungssatz von Takens

**Ein ausgeführter Beweis der Flussfassung**

Dr.Jo

Erste Fassung vom 24. November 2026

Diese Ergänzung zu § 2.4.1 der älteren Arbeit *Modellierung des Kalman-Filters mit optimalen Parametern* präzisiert den dort angeführten Einbettungssatz und führt seinen Beweis aus. Entscheidend sind drei Schritte: geeignete Vektorfelder dicht approximieren, endlich viele Messwerte und Ableitungen unabhängig verändern und damit Rangverluste sowie doppelte Bildpunkte ausschließen. Als tieferer Standardsatz wird die Dichtheitsaussage von Kupka–Smale verwendet und ausdrücklich als Voraussetzung des Beweises benannt. Der Satz betrifft deterministische, rauschfreie Dynamik.

## 1 Aussage und Bedeutung

Sei $M$ eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand mit $\dim M = m \geq 1$. Der Raum $\mathcal{X}^2(M)$ besteht aus den $C^2$-Vektorfeldern auf $M$. Ein Feld $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}^2(M)$ besitzt wegen der Kompaktheit einen für alle $t \in \mathbb{R}$ definierten Fluss $\varphi^t_{\boldsymbol{X}}$. Eine skalare Beobachtung ist eine Funktion $h \in C^2(M, \mathbb{R})$. Für eine *fest vorgegebene* Abtastzeit $\tau > 0$ setzen wir $L = 2m + 1$ und definieren die Verzögerungsabbildung

$$\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{X},h,\tau}(x) = \big(h(x), h(\varphi^{\tau}_{\boldsymbol{X}} x), \ldots, h(\varphi^{2m\tau}_{\boldsymbol{X}} x)\big) \in \mathbb{R}^L. \tag{1}$$

Eine $C^2$-Einbettung ist eine injektive $C^2$-Immersion, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist. Bei kompaktem $M$ folgt die letzte Eigenschaft schon aus Stetigkeit und Injektivität.

**Satz 1.1** (Takens, Flussfassung)**.** *Für jedes feste $\tau > 0$ ist die Menge*

$$\mathcal{E}_\tau = \{(\boldsymbol{X}, h) \in \mathcal{X}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) : \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{X},h,\tau} \text{ ist eine Einbettung}\}$$

*offen und dicht in der $C^2$-Produkttopologie.*

Dies ist die Flussfassung von Takens' Satz; der Originaltext formuliert sie für die Zeit-eins-Abbildung.[1] Die glatte Struktur von $M$ ist hier eine bequeme Festlegung für Karten, Normen und Abschneidefunktionen; Feld und Beobachtung bleiben lediglich $C^2$. *Generisch* bedeutet in Satz 1.1 offen und dicht im *Paarraum*. Es wird weder jede festgehaltene Dynamik noch jede einzelne Messfunktion erfasst. Für jedes Paar in $\mathcal{E}_\tau$ bestimmen die $L$ Messwerte den Zustand eindeutig; die Umkehrabbildung auf dem Bild ist stetig und in Mannigfaltigkeitskarten $C^2$.

[1] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, 1981, Theorem 2, S. 371. Theorem 1 betrifft Paare aus Diffeomorphismus und Beobachtung; Theorem 3 benutzt statt Zeitverzögerungen Lie-Ableitungen und verlangt höhere Regularität.

## 2 Drei Hilfsmittel

Wir versehen $M$ mit einer glatten Riemannschen Metrik. Auf kompaktem $M$ sind die benötigten $C^2$-Räume Banachräume, nach Wahl äquivalenter Normen; insbesondere gilt der Satz von Baire.

**Lemma 2.1** (Unabhängige endliche Messdaten)**.** *An endlich vielen verschiedenen Punkten $z_1, \dots, z_r$ lassen sich die Funktionswerte $h(z_i)$ und die Differentiale $dh_{z_i}$ unabhängig durch glatte Störungen von $h$ verändern. Kleine Änderungen dieser endlichen Daten können mit beliebig kleinem $C^2$-Normbetrag vorgenommen werden.*

*Beweis.* Wähle paarweise disjunkte Kartenumgebungen um die $z_i$, Kartenkoordinaten $\boldsymbol{u}_i$ mit $\boldsymbol{u}_i(z_i) = \mathbf{0}$ und Abschneidefunktionen $\rho_i$, die nahe $z_i$ gleich eins sind. Die durch null fortgesetzte Funktion

$$g_i(x) = \rho_i(x)\big(a_i + \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{u}_i(x)\big)$$

ändert bei $z_i$ den Wert um $a_i$ und das Differential um den durch den Zeilenvektor $\boldsymbol{\alpha}_i$ dargestellten Kovektor. Bei allen anderen $z_j$ verschwinden Wert und Differential. Die Summe dieser Funktionen realisiert die vorgeschriebenen Änderungen. Bei fest gewählten Karten und Abschneidefunktionen hängt die Summe linear und stetig von den endlich vielen Koeffizienten ab. □

**Lemma 2.2** (Vermeidung durch mehr Gleichungen als Variablen)**.** *Sei $W$ eine zweitabzählbare $C^1$-Mannigfaltigkeit der Dimension $a$ und $h \mapsto \boldsymbol{H}_h$ eine Familie von $C^1$-Abbildungen $W \to \mathbb{R}^b$, wobei $b > a$. Vorausgesetzt sei:*

1. *Auf kompakten Teilmengen hängt $\boldsymbol{H}_h$ stetig von $h$ in der $C^2$-Topologie ab.*
2. *Für jedes kompakte $K \subset W$ und jedes $h$ gibt es endlich viele glatte Funktionen $g_1, \dots, g_q$, sodass*

$$(\boldsymbol{s}, w) \longmapsto \boldsymbol{H}_{h+\sum_{\nu=1}^{q} s_\nu g_\nu}(w)$$

*$C^1$ ist und ihre Ableitung nach $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^q$ auf einer Umgebung von $\{\mathbf{0}\} \times K$ surjektiv ist.*

*Dann bilden die $h$, für die $\boldsymbol{H}_h$ auf ganz $W$ keine Nullstelle hat, eine residuale dichte Menge in $C^2(M, \mathbb{R})$.*

*Beweis.* Betrachte zunächst ein kompaktes $K$. Für kleine Parameter und eine offene Umgebung $U$ von $K$ ist die angegebene Parameterabbildung eine Submersion. Ihre Nullstellenmenge $Z$ ist daher nach dem Satz über reguläre Niveauflächen eine $C^1$-Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim Z = q + a - b < q.$$

Die Projektion von $Z$ auf den Parameterraum $\mathbb{R}^q$ hat Lebesgue-Maß null. Hierfür ist kein Satz von Sard in hoher Regularität nötig: In abzählbar vielen Karten wird diese Projektion durch $C^1$-Abbildungen aus Räumen kleinerer Dimension beschrieben. Auf kompakten Kartenwürfeln sind sie Lipschitz-stetig. Überdeckt man einen $d$-dimensionalen Würfel durch $O(\varepsilon^{-d})$ Würfel der Kantenlänge $\varepsilon$, so lassen sich deren Bilder durch $q$-dimensionale Würfel mit Gesamtvolumen $O(\varepsilon^{q-d})$ überdecken. Für $d < q$ geht dieses gegen null.

Folglich gibt es beliebig kleine Parameter $\boldsymbol{s}$, für die die gestörte Abbildung auf $K$ keine Nullstelle hat. Die so erzielte Eigenschaft ist offen, denn auf $K$ hat ihre Norm ein positives Minimum. Sie ist also für jedes kompakte $K$ offen und dicht. Jede zweitabzählbare Mannigfaltigkeit besitzt eine abzählbare Überdeckung durch kompakte Teilmengen. Der Satz von Baire liefert für deren Schnitt die Behauptung. □

In den folgenden Anwendungen ist $\boldsymbol{H}_h$ linear in $h$. Die benötigte Surjektivität wird jeweils lokal durch Lemma 2.1 hergestellt. Sie bleibt in einer Umgebung des betrachteten Punktes erhalten. Eine endliche Überdeckung von $K$ und das Zusammennehmen aller zugehörigen Störfunktionen liefern dann Bedingung 2: Zusätzliche Parameterspalten können den Rang nicht vermindern. Das Maß-null-Argument bezieht sich nur auf diese *Hilfsparameter*; der Satz selbst trifft keine Wahrscheinlichkeitsaussage über Dynamik und Messung.

**Lemma 2.3** (Stabilität von Einbettungen)**.** *Für kompaktes $M$ sind die $C^1$-Einbettungen $M \to \mathbb{R}^L$ eine offene Menge in der $C^1$-Topologie.*

*Beweis.* Sei $\boldsymbol{F}$ eine solche Einbettung. Die Injektivität von $D\boldsymbol{F}$ ist gleichmäßig stabil: Auf dem kompakten Einheitstangentialbündel hat $\|D\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{v}\|$ ein positives Minimum.

Auch die lokale Injektivität ist gleichmäßig stabil. Um jeden Punkt wähle eine Karte und eine lineare Projektion $\boldsymbol{\pi} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^m$, für die $D(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{F})$ im Kartenmittelpunkt invertierbar ist. Auf einer hinreichend kleinen konvexen Kartenkugel liegt diese Ableitung gleichmäßig nahe einer festen invertierbaren Matrix $\boldsymbol{A}$. Für jede hinreichend $C^1$-nahe Abbildung $\boldsymbol{G}$ gilt dort mit einem $c > 0$

$$\|\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{v})\| \geq c\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|.$$

Dies folgt durch Integration der Ableitung entlang der Strecke und Abschätzung des Fehlers gegenüber $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$. Endlich viele kleinere Kartenkugeln überdecken $M$. Ein Lebesgue-Radius $\delta > 0$ dieser Überdeckung sorgt dafür, dass alle Punktepaare mit Abstand kleiner $\delta$ schon durch diese lokale Abschätzung getrennt werden, gleichmäßig für nahe $\boldsymbol{G}$.

Die übrigen Paare liegen in der kompakten Menge $\{(x, y) : d(x, y) \geq \delta\}$. Dort hat $\|\boldsymbol{F}(x) - \boldsymbol{F}(y)\|$ wegen der Injektivität ein positives Minimum $\eta$. Für $\|\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\|_\infty < \eta/3$ bleiben auch diese Paare getrennt. Somit ist $\boldsymbol{G}$ eine injektive Immersion; Kompaktheit macht sie zur Einbettung. □

## 3 Dichte Wahl geeigneter Vektorfelder

Wir beweisen zunächst die Aussage für $\tau = 1$. Der einzige hier ohne Beweis verwendete Satz über generische Dynamik lautet:

**Kupka–Smale, benötigter Teil.** In $\mathcal{X}^2(M)$ liegt die Menge der Vektorfelder dicht, deren Gleichgewichte und nichtkonstante geschlossene Bahnen sämtlich hyperbolisch sind.

Ein Gleichgewicht ist hyperbolisch, wenn die Linearisierung keine Eigenwerte mit Realteil null hat. Für eine geschlossene Bahn verlangt man, dass kein Eigenwert der Ableitung ihrer Poincaré-Rückkehrabbildung den Betrag eins hat. Die Flussrichtung selbst wird dabei ausgenommen. Der zusätzliche Transversalitätsteil des vollständigen Kupka–Smale-Satzes wird nicht benötigt.[2]

**Lemma 3.1.** *Beliebig nahe an jedem $\boldsymbol{X} \in \mathcal{X}^2(M)$ gibt es ein Feld $\boldsymbol{Y}$, dessen Zeit-eins-Abbildung $f = \varphi^1_{\boldsymbol{Y}}$ folgende Eigenschaften hat:*

1. *$P = \operatorname{Fix} f$ ist endlich und besteht genau aus den Gleichgewichten.*
2. *Außerhalb von $P$ besitzt $f$ keine periodischen Punkte.*
3. *Für jedes $p \in P$ hat $Df_p$ über $\mathbb{C}$ nur einfache Eigenwerte.*

[2] M. Chaperon, *Generic Complex Flows*, zugänglicher Preprint, PDF-S. 9, § 5: Dort sind die kritischen Elemente als Gleichgewichte und nichttriviale periodische Bahnen definiert. Die dortige glatte Fassung liefert die hier benötigte $C^2$-Dichte durch Glättung: Zuerst wird ein $C^2$-Feld durch ein glattes Feld approximiert, anschließend wird im glatten Raum innerhalb der vorgegebenen $C^2$-Nähe perturbiert. Der stärkere Transversalitätsteil des dort formulierten Satzes wird hier nicht benutzt.

*Beweis. Gleichgewichte und Spektren.* Approximiere zuerst durch ein Kupka–Smale-Feld. Seine Gleichgewichte sind isoliert und bilden eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten $M$; sie sind daher endlich. Ihre Linearisierungen sind invertierbar. Durch kleine, lokal getragene Änderungen der Linearisierungen bei unveränderten Nullstellen kann man zusätzlich einfache komplexe Spektren erreichen: Reelle Matrizen mit mehrfachen komplexen Eigenwerten sind die Nullstellen des nicht identisch verschwindenden Diskriminantenpolynoms. Ihr Komplement ist offen und dicht. Die Änderung wird in einer Karte durch einen abgeschnittenen linearen Term realisiert.

In einer kleinen $C^1$-Umgebung des so erhaltenen Feldes gibt es weiterhin genau diese endlich vielen, nun leicht verschobenen Gleichgewichte mit hyperbolischer und einfacher Linearisierung. Das folgt nahe den Nullstellen aus dem Satz über implizite Funktionen; außerhalb kleiner Nullstellenumgebungen ist die Norm des Feldes nach unten positiv beschränkt. Wähle in dieser offenen Umgebung *erneut* ein Kupka–Smale-Feld $\boldsymbol{Z}$. Damit gelten die Bedingungen an Gleichgewichte und geschlossene Bahnen gleichzeitig.

*Abzählbarkeit der geschlossenen Bahnen.* Die geometrisch verschiedenen nichtkonstanten geschlossenen Bahnen von $\boldsymbol{Z}$ sind höchstens abzählbar. Dazu betrachte

$$\mathcal{R} = \{(x,T) \in M \times (0,\infty) : \varphi_{\boldsymbol{Z}}^T x = x,\ \boldsymbol{Z}(x) \neq \boldsymbol{0}\}.$$

Dies ist als Unterraum eines zweitabzählbaren Raums zweitabzählbar. Bei einem Rückkehrpaar $(x, kT_0)$ einer Bahn mit Minimalperiode $T_0$ ist die entsprechende Poincaré-Abbildung die $k$-te Potenz der einfachen Rückkehrabbildung. Hyperbolizität impliziert, dass ihre Ableitung keinen Eigenwert eins besitzt. Der Satz über implizite Funktionen auf einer lokalen Transversale zeigt deshalb: Alle hinreichend nahen Rückkehrpaare gehören zu derselben geometrischen Bahn. Die jedem Orbit zugeordnete Teilmenge von $\mathcal{R}$ ist somit offen in $\mathcal{R}$. Diese Mengen sind nichtleer und paarweise disjunkt. Davon gibt es in einem zweitabzählbaren Raum nur abzählbar viele, weil jede eine andere Menge einer abzählbaren Basis enthalten muss. Bezeichne ihre Minimalperioden mit $T_\alpha$.

*Ausschluss von Abtastresonanzen.* Setze nun $\boldsymbol{Y} = c\boldsymbol{Z}$ mit $c > 0$ beliebig nahe eins. Es gilt $\varphi_{\boldsymbol{Y}}^t = \varphi_{\boldsymbol{Z}}^{ct}$. Ein nichtstationärer Punkt kann für die Zeit-eins-Abbildung genau dann nach $j \in \mathbb{N}$ Schritten zurückkehren, wenn für irgendeine Bahn und ein $k \in \mathbb{N}$

$$cj = kT_\alpha, \qquad \text{also} \qquad c = \frac{kT_\alpha}{j}.$$

Alle diese verbotenen Skalierungsfaktoren bilden eine abzählbare Menge.

An einem Gleichgewicht mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von $D\boldsymbol{Z}_p$ hat

$$D\varphi_{c\boldsymbol{Z}}^1(p) = \exp(cD\boldsymbol{Z}_p)$$

die Eigenwerte $e^{c\lambda_i}$. Eine Kollision zweier dieser Werte verlangt $c(\lambda_i - \lambda_j) \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Für $\lambda_i \neq \lambda_j$ liefert dies höchstens abzählbar viele positive $c$. Es gibt nur endlich viele Gleichgewichte und Eigenwertpaare. Auch diese verbotenen Werte lassen sich daher vermeiden. Hyperbolizität schließt $e^{c\lambda_i} = 1$ ohnehin aus.

Das Komplement einer abzählbaren Menge trifft jedes offene Intervall. Wähle dort $c$ so nahe eins, dass die verlangte Approximation erhalten bleibt. Dann sind alle drei Eigenschaften erfüllt. □

## 4 Einbettung für ein geeignetes festes Feld

Sei von nun an $f$ ein $C^2$-Diffeomorphismus mit den Eigenschaften aus Lemma 3.1. Wir schreiben

$$\boldsymbol{\Phi}_h(x) = \big(h(x), h(fx), \dots, h(f^{L-1}x)\big), \qquad L = 2m+1.$$

Wir zeigen, dass die geeigneten Beobachtungen $h$ offen und dicht liegen.

## 4.1 An den Gleichgewichten

Für $p \in P$ und $\boldsymbol{A} = Df_p$ gilt nach der Kettenregel

$$D\boldsymbol{\Phi}_h(p) = \begin{pmatrix} dh_p \\ dh_p\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ dh_p\boldsymbol{A}^{L-1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Die ersten $m$ Zeilen haben für eine offene dichte Menge von Kovektoren $\boldsymbol{\alpha} = dh_p$ Rang $m$. Zum Nachweis diagonalisiere $\boldsymbol{A}$ über $\mathbb{C}$: $\boldsymbol{AV} = \boldsymbol{V}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Mit $\beta_i = (\boldsymbol{\alpha V})_i$ erhält man

$$\det\left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha A}^{m-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{V}\right] = \left(\prod_{i=1}^{m} \beta_i\right) \prod_{1 \le i < j \le m} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Die Vandermonde-Determinante verschwindet nicht. Die Determinante vor der Multiplikation mit $\boldsymbol{V}$ ist also ein nichttriviales Polynom in $\boldsymbol{\alpha}$ mit reellen Koeffizienten. Ein solches Polynom kann nicht auf ganz $\mathbb{R}^m$ verschwinden. Sein Nichtnullbereich ist offen und dicht.

Lemma 2.1 erlaubt diese Wahl unabhängig an allen endlich vielen $p \in P$. Zugleich können wir die Werte $h(p)$ paarweise verschieden wählen. Es entsteht eine offene dichte Menge $\mathcal{U}_P$ von Beobachtungen, für die $\boldsymbol{\Phi}_h$ an jedem $p \in P$ immersiv ist und verschiedene Punkte aus $P$ trennt. Für $P = \varnothing$ gibt es hier keine Bedingung.

## 4.2 Immersion außerhalb der Gleichgewichte

Betrachte das Einheitstangentialbündel

$$W = \{(x, \boldsymbol{v}) : x \in M \setminus P,\ \boldsymbol{v} \in T_xM, \|\boldsymbol{v}\| = 1\}.$$

Es hat Dimension $2m - 1$. Für

$$\boldsymbol{H}_h(x, \boldsymbol{v}) = D\boldsymbol{\Phi}_h(x)\boldsymbol{v} = \left(dh_{f^j x}(Df_x^j \boldsymbol{v})\right)_{j=0}^{L-1}$$

sind die $L$ Punkte $x, fx, \ldots, f^{L-1}x$ verschieden, da es außerhalb von $P$ keine periodischen Punkte gibt. Jeder Tangentialvektor $Df_x^j \boldsymbol{v}$ ist ungleich null. Durch unabhängig gewählte Differentiale an diesen Punkten lässt sich somit jede der $L$ Komponenten unabhängig ändern. Lemma 2.2 ist anwendbar, denn

$$L = 2m + 1 > 2m - 1 = \dim W.$$

Für eine residuale dichte Menge von $h$ besitzt $\boldsymbol{H}_h$ keine Nullstelle. Das ist genau die Injektivität von $D\boldsymbol{\Phi}_h(x)$ für alle $x \notin P$.

## 4.3 Trennung disjunkter Beobachtungssegmente

Schreibe $S(x) = \{x, fx, \ldots, f^{L-1}x\}$ und betrachte die offene Menge

$$W_0 = \{(x, y) \in M^2 : S(x) \cap S(y) = \varnothing,\ (x, y) \notin P \times P\}.$$

Sie hat Dimension $2m$. Mindestens eines der beiden Segmente besteht aus $L$ verschiedenen Punkten. Ändert man nur dort die Funktionswerte, unabhängig voneinander und ohne die Punkte des anderen Segments zu berühren, so verändert man sämtliche Komponenten von

$$\boldsymbol{H}_h(x, y) = \boldsymbol{\Phi}_h(x) - \boldsymbol{\Phi}_h(y)$$

unabhängig. Lemma 2.2 mit $L > 2m$ zeigt: Für residual dicht viele $h$ gibt es auf $W_0$ kein Paar mit gleichem Bild. Paare aus $P \times P$ mit verschiedenen Komponenten sind bereits durch $\mathcal{U}_P$ getrennt.

### 4.4 Trennung überlappender Beobachtungssegmente

Seien $x \neq y$ und $S(x) \cap S(y) \neq \varnothing$. Aus $f^i x = f^j y$ folgt $y = f^{i-j}x$. Nach Vertauschen von $x$ und $y$ dürfen wir daher annehmen

$$y = f^s x, \qquad 1 \leq s \leq L-1.$$

Beide Punkte liegen außerhalb von $P$; andernfalls wären sie gleich. Für jedes dieser endlich vielen $s$ betrachten wir auf $M \setminus P$

$$\boldsymbol{B}_{s,h}(x) = \big(h(f^j x) - h(f^{j+s}x)\big)_{j=0}^{L-1}.$$

Die $L + s$ beteiligten Bahnpunkte sind verschieden. Die lineare Abbildung der zugehörigen Werte

$$(a_0, \ldots, a_{L+s-1}) \longmapsto (a_j - a_{j+s})_{j=0}^{L-1}$$

ist surjektiv: Für beliebig vorgegebene $b_0, \ldots, b_{L-1}$ setze zunächst $a_0 = \cdots = a_{s-1} = 0$ und dann aufsteigend

$$a_{j+s} = a_j - b_j \quad (j = 0, \ldots, L-1).$$

So erhält man genau $a_j - a_{j+s} = b_j$. Diese Werte können nach Lemma 2.1 durch lokale Störungen von $h$ realisiert werden. Wegen $L > m = \dim(M \setminus P)$ liefert Lemma 2.2 für jedes $s$ residual dicht viele Beobachtungen ohne Nullstelle von $\boldsymbol{B}_{s,h}$. Ihr endlicher Schnitt trennt alle überlappenden Segmente.

### 4.5 Zusammenfassung bei fester Dynamik

Der Schnitt von $\mathcal{U}_P$ mit den gerade gewonnenen residualen dichten Mengen ist nach Baire dicht. Für jedes $h$ darin ist $\boldsymbol{\Phi}_h$ eine injektive Immersion. Die Fallunterscheidung ist vollständig: Verschiedene Punkte sind entweder beide fest, haben disjunkte Segmente oder liegen im zuletzt behandelten Überlappungsfall. Wegen der Kompaktheit von $M$ ist $\boldsymbol{\Phi}_h$ eine Einbettung.

Die Abbildung $h \mapsto \boldsymbol{\Phi}_h$ ist stetig von $C^2$ nach $C^1$. Lemma 2.3 macht die Menge *aller* einbettenden Beobachtungen offen. Da sie die eben konstruierte dichte Menge enthält, ist sie offen und dicht. Damit ist die Behauptung für jedes $f$ aus Lemma 3.1 bewiesen.

## 5 Abschluss des Beweises

Zu einem beliebigen Paar $(\boldsymbol{X}_0, h_0)$ und beliebigen $C^2$-Umgebungen wähle nach Lemma 3.1 darin ein geeignetes Feld $\boldsymbol{Y}$. Für dessen Zeit-eins-Abbildung gibt es nach Abschnitt 4 in der vorgegebenen Umgebung von $h_0$ ein einbettendes $h$. Damit ist $\mathcal{E}_1$ dicht.

Die Abhängigkeit $(\boldsymbol{X}, h) \mapsto \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{X},h,1}$ ist stetig nach $C^1$. Dies folgt aus der stetigen Abhängigkeit der Lösungen und ihrer Anfangswertableitungen auf dem festen Zeitintervall $[0, 2m]$. In lokalen Koordinaten erfüllt die Ableitung $\boldsymbol{V}(t) = D\varphi^t_{\boldsymbol{X}}$ die Variationsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t) = D\boldsymbol{X}(\varphi^t_{\boldsymbol{X}} x)\boldsymbol{V}(t), \qquad \boldsymbol{V}(0) = \boldsymbol{I}.$$

Die üblichen Integralabschätzungen mit der Gronwall-Ungleichung liefern die gleichmäßige Stetigkeit der Lösungen und dieser Ableitungen; eine endliche Kartenüberdeckung genügt auf dem kompakten $M$. Zusammen mit Lemma 2.3 ist $\mathcal{E}_1$ deshalb offen.

Schließlich gilt für jedes feste $\tau > 0$

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}^{j\tau} = \varphi_{\tau\boldsymbol{X}}^{j}, \qquad \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{X},h,\tau} = \boldsymbol{\Phi}_{\tau\boldsymbol{X},h,1}.$$

Die Skalierung $\boldsymbol{X} \mapsto \tau\boldsymbol{X}$ ist ein Homöomorphismus von $\mathcal{X}^2(M)$. Daher ist $\mathcal{E}_\tau$ ebenfalls offen und dicht. Dies beweist Satz 1.1. □

## 6 Einordnung in die ältere Arbeit

**Was die Einbettung leistet.** Der Beobachtungsvektor enthält auf seinem Bild die vollständige Zustandsinformation. Für $f = \varphi_{\boldsymbol{X}}^{\tau}$ wird die Dynamik dort durch $\boldsymbol{\Phi} \circ f \circ \boldsymbol{\Phi}^{-1}$ beschrieben. Das ist eine Koordinatendarstellung derselben Dynamik. Gemeint ist ein Diffeomorphismus von $M$ auf die eingebettete Untermannigfaltigkeit $\boldsymbol{\Phi}(M)$, kein Diffeomorphismus zwischen $M$ und dem gesamten $\mathbb{R}^{2m+1}$.

**Warum die Quantoren wesentlich sind.** Auf $M = S^1$ wähle eine gleichförmige Kreisbewegung mit Periode $\tau$. Dann ist $\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\tau} = \mathrm{id}$, also $\boldsymbol{\Phi}(x) = (h(x), \ldots, h(x))$. Keine stetige reelle Beobachtung $h$ ist auf dem Kreis injektiv: Sonst wäre $S^1$ homöomorph zu einem kompakten Intervall; das Entfernen eines inneren Bildpunktes trennt das Intervall, aber das Entfernen eines Punktes trennt den Kreis nicht. Für dieses festgehaltene Feld scheitert somit jede Beobachtung. Satz 1.1 garantiert auch keine gemeinsame offene dichte Paarmenge, die gleichzeitig für *alle* Abtastzeiten funktioniert.

**Ein anschaulicher nichtresonanter Fall.** Bei $\varphi^t(\theta) = \theta + \omega t$ und $h(\theta) = \cos\theta$ setze $\beta = \omega\tau$. Für $\sin\beta \neq 0$ ergeben bereits zwei Messwerte

$$\cos\theta = h(\theta), \qquad \sin\theta = \frac{\cos\beta\, h(\theta) - h(\theta+\beta)}{\sin\beta}.$$

Sie rekonstruieren den Punkt $(\cos\theta, \sin\theta)$ und betten den Kreis ein. Die Zahl $2m+1$ ist also eine allgemeine hinreichende Grenze, keine für jedes einzelne System notwendige Zahl von Messwerten.

**Reichweite für das Kalman-Modell.** Dissipativität ist keine Voraussetzung des bewiesenen Satzes. Stochastische Störungen werden ebenfalls nicht erfasst: Bei $\boldsymbol{x}_{k+1} = f(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{w}_k$ sind spätere Zustände ohne Kenntnis der Störungen keine eindeutigen Funktionen von $\boldsymbol{x}_k$. Ein verrauschter Messvektor ist deshalb nicht die Abbildung (1). Eine Anwendung auf dieses Modell verlangt einen gesonderten Robustheits- oder Identifizierbarkeitssatz. Ebenso darf die Mannigfaltigkeitsdimension $m$ nicht ohne weiteren Satz durch eine fraktale Attraktordimension ersetzt werden. Die ältere Takens-Stelle sollte deshalb mit der präzisen Aussage aus Abschnitt 1 und dieser Begrenzung verbunden werden.

**Beweisabhängigkeiten und Herkunft.** Der Beweis ist eine ausgeführte Darstellung eines bekannten Satzes, kein Anspruch auf einen neuen Einbettungssatz. Unbewiesen benutzt wird der oben explizit formulierte Teil von Kupka–Smale. Hinzu kommen die üblichen Grundlagen: lokale Flusstheorie und Poincaré-Abbildung, impliziter Funktionensatz, reguläre Niveauflächen, Baire und Kompaktheit. Das Parameterargument, die Resonanzauswahl, das Rangargument an Gleichgewichten und die gesamte Trennung der Punktpaare wurden hier ausgeführt. Hukes Darstellung dient als ergänzende Quelle für die Beweisarchitektur; sein Satz für einen festgehaltenen Diffeomorphismus wird nicht mit Takens' Flusssatz gleichgesetzt.[3]

[3] J. P. Huke, *Embedding Nonlinear Dynamical Systems: A Guide to Takens' Theorem*, MIMS EPrint 2006.26. Herangezogen wurden insbesondere PDF-S. 6, 10–12 und 22–24 (Druck-S. 4, 8–10 und 20–22): Aussage, generische Beobachtung und Beweisstruktur. Eine Volllektüre aller Erweiterungen wird damit nicht behauptet.

## Literatur


[1] F. Takens: *Detecting strange attractors in turbulence*. In: D. Rand und L.-S. Young (Hrsg.), *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, Lecture Notes in Mathematics 898, Springer, 1981, S. 366–381. DOI: 10.1007/BFb0091924. Zugänglicher Scan des Originalbeitrags.

[2] J. P. Huke: *Embedding Nonlinear Dynamical Systems: A Guide to Takens' Theorem*. MIMS EPrint 2006.26. Universität Manchester, Repositorium.

[3] M. Chaperon: *Generic Complex Flows*. In: F. Norguet und S. Ofman (Hrsg.), *Géométrie complexe II*, Travaux en cours, Hermann, Paris, 2004, S. 71–79. Benutzte Satzstelle: frei zugänglicher Preprint, PDF-S. 9, § 5. Publikationsdaten nach der Publikationsliste des Autors; keine Zuordnung der PDF-Seite zu einer Verlagsseite vorgenommen.